ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, N° 2, 1995 Механика

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ПЬЕЗОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Аветисян А. С.

Ավետիսյան Ա.Ս.

Վերջավոր լայնույթով էլեկտրաառաձգական մակերևութային ալիքները պիեզոէլեկտրական միջավայրում

Հետազոտվում է պիեզոէլեկտրական $6mm$ դասի բյուրեղում մակերևութային ալիքի տարածումը երկրաչափական ոչ գծային դրվածքի դեպքում: Ստացված է ալիքային ազդանշանից գրգռված էլեկտրաառաձգական դաշտի նկարագիրը:

Avetisyan A.S.

Electroelastic surface waves of finite amplitude on an piezodielectric solid.

Исследуется распространение поверхностной электроупругой волны конечной амплитуды в пьезодиэлектрике класса 6mm с учетом только геометрической нелинейности. Получены описания генерируемых первичным волновым сигналом электроупругих полей.

Рассматривается распространение электроупругих высокочастотных (коротких) волн конечной амплитуды, локализованные у поверхности раздела $x_2 = 0$ пьезодиэлектрика класса $6mm$ гексагональной симметрии с вакуумом. Учет больших деформаций усложняет взаимодействие между упругим и электромагнитным полями, а также между плоским и антиплоским электроупругим состояниями.

Пьезодиэлектрическая среда занимает полупространство $|x_1| < \infty$, $|x_2| < 0$, $|x_3| < \infty$, где решаются уравнения движения упругой среды

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial x_j} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_j}{\partial j^2}, \qquad i, j = 1,2,3 \tag{1.1}$$

и уравнения электромагнетостатики

$$\frac{\partial D_n}{\partial x_n} = 0, \qquad \frac{\partial B_p}{\partial x_p} = 0, \qquad n, p = 1,2,3 \tag{1.2}$$

в лагранжевой форме описания. Здесь $L_{ij} = \sigma_{ij} + t_{ij}$ - тензор термодинамических напряжений Лагранжа, компоненты которого с учетом только геометрической нелинейности имеют вид [1, 2]:

$$L_{ij}=c_{ijmk}\frac{\partial u_m}{\partial x_k}+e_{mij}\frac{\partial\Phi}{\partial x_m}+\delta_{wj}e_{mik}\frac{\partial\Phi}{\partial x_m}\frac{\partial u_w}{\partial x_k}+$$
$$+\left(\delta_{jm}c_{inkl}+\frac{1}{2}\delta_{km}c_{ijkl}\right)\frac{\partial u_n}{\partial x_l}\frac{\partial u_m}{\partial x_n} \qquad (1.3)$$

Лагранжевые индукции электрического и магнитного полей с учетом конечных деформаций соответственно равны :

$$D_m=e_{mij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\varepsilon_{mk}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\delta_{ik}e_{mnj}\frac{\partial u_k}{\partial x_n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-$$
$$-\varepsilon_{mn}l_{kmij}\frac{\partial\Phi}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (1.4)$$

$$B_p=-\left(\mu_{kp}\frac{\partial u_n}{\partial x_n}-\mu_{kn}\frac{\partial u_p}{\partial x_n}-\mu_{pl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x_k}-\mu_{kp}\frac{\partial\Psi}{\partial x_k} \qquad (1.5)$$

В материальных соотношениях (1.3)-(1.5), а также в дальнейшем в материальных соотношениях внешней среды мы пользуемся выражениями лагранжевых напряженностей электрического $E_k(x_j,t)$, магнитного $H_k(x_j,t)$ полей, которые с учетом конечных деформаций описываются через градиент деформаций $\xi_{i,j}=\delta_{ij}+u_{i,j}$ и потенциалы соответствующих полей $\Phi(x_j,t)$ и $\Psi(x_j,t)$

$$E_m=-\frac{\partial\Phi}{\partial x_m}-l_{mnij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}$$
$$H_m=-\frac{\partial\Psi}{\partial x_m}-l_{mnij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial\Psi}{\partial x_n} \qquad (1.6)$$

В соотношениях (1.4) , (1.6) тензор " геометрической стрикции" $\ddot{a}_{mnij}$ имеет вид

$$l_{mnij}=\delta_{im}\delta_{jn}+\delta_{in}\delta_{jm}-\delta_{ij}\delta_{nm}$$

Во внешней вакуумной области $|x_1|<\infty$, $x_2<0$, $|x_3|<\infty$ решаются уравнения электромагнетостатики для вакуума

$$\frac{\partial D_n^{(0)}}{\partial x_n}=0,\qquad \frac{\partial E_p^{(0)}}{\partial x_p}=0,\qquad n,p=1,2,3 \qquad (1.7)$$

где индукции электрического $D_n^{(0)}(x_i,t)$ и магнитного $B_n^{(0)}(x_i,t)$ полей в лагранжевой форме описания выражаются через потенциалы этих внешних полей $\Phi^{(0)}(x_i,t)$ и $\Psi^{(0)}(x_i,t)$ соответственно, а также через деформации точек поверхности раздела сред $u_k^{(0)}(x_i,t)=u_k(x_1,0,x_3,t)$ [1]:

$$
\begin{aligned}
D_p^{(0)} &= -\varepsilon_0\left[\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial x_p}-\left(\frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_p}+\frac{\partial u_p^{(0)}}{\partial x_m}\right)\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial x_m}+\frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_n}\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial x_p}\right]\\
B_p^{(0)} &= -\mu_0\left[\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial x_p}-\left(\frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_p}+\frac{\partial u_p^{(0)}}{\partial x_m}\right)\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial x_m}+\frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_n}\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial x_p}\right]
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Естественно, что конечность деформаций поверхности электроупругой среды искажает ("деформирует") нематериальную внешнюю среду, чем и продиктованы выражения материальных уравнений (1.8). Учет "деформаций" внешней вакуумной области особенно важно в задачах о распространении поверхностных электроупругих волн.

На границе раздела сред $x_2=0$ удовлетворяются непрерывность тангенциальных компонент векторов напряженностей электрического и магнитного полей

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial x_m}-\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial x_m}+l_{mnij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}-\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial x_m}\right]=0\\
&\frac{\partial\Psi}{\partial x_m}-\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial x_m}+l_{mnij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial x_n}-\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial x_m}\right]=0
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

и нормальных компонент векторов индукций этих полей

$$
D_2=D_2^{(0)},\qquad B_2=B_2^{(0)} \tag{1.10}
$$

На недеформированной границе раздела $x_2=0$ термодинамические напряжения L_{ij} должны равняться нулю :

$$
L_{ij}=0 \tag{1.11}
$$

Очевидно, что учет "деформирования" внешней нематериальной области усложняет запись материальных соотношений внешней среды (1.8) и граничных условий (1.9) , (1.10) . Кроме этого, из приведенных соотношений следует, что посредством градиента деформаций $\xi_{i,j}=\delta_{ij}+u_{i,j}$ квазистатические электрическое и магнитное поля взаимосвязаны. Это значит, что если в пьезодиэлектрическую среду излучать электроупругую волну конечной амплитуды, то в среде индуцируется также магнитное поле.

Наряду с граничными условиями (1.9) - (1.11) для локализованных у поверхности раздела волн должны удовлетворяться также условия затухания по глубине полупространств всех волновых характеристик .

2. Пусть на вход пьезодиэлектрической среды падает монохроматическая волна конечной амплитуды. Нелинейность уже не допускает простых периодических волновых решений и приводит к последовательному возбуждению временных гармоник падающей волны $f_n = A_n(\xi\tau)\exp i(\omega_n t - k_n\bar{r})$. При этом амплитуды генерационных гармоник будут медленно изменяющими функциями времени и направления распространения волны $(\xi=\varepsilon r,\ \tau=\varepsilon t)$. Здесь ε физический малый параметр, которым может быть мера понижения первичного волнового сигнала на расстоянии длины волны. Исходя из вышесказанного и учитывая, что нелинейность кристаллов мала, при решении задачи о распространении волн конечной амплитуды достаточно ограничиться приближением заданного волнового поля (падающего волнового сигнала).

Воспользуемся методом возмущений, представляя искомые величины электромагнитоупругого поля в виде

$$F(x_j,t,\xi\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n F_n(x_j,t,\xi\tau) \tag{2.1}$$

Не нарушая общности решения, за направлением распространения волны принята координатная ось Ox_1 (т.е. $\xi=\varepsilon x_1$). В нелинейные волновые уравнения и граничные условия эти изменения входят посредством замены производных по x_1 и по t

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\to\frac{\partial}{\partial x_1}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi},\qquad \frac{\partial}{\partial t}\to\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau} \tag{2.2}$$

Подставляя разложение искомых величин (2.1) в уравнения электромагнитоупругости (1.1), (1.2), (1.7) и в граничные условия (1.9) - (1.11) с учетом материальных соотношений (1.3) - (1.5), (1.8), преобразований (2.2) и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, в первом приближении получим линейную однородную краевую задачу электромагнитоупругости. Известно, что для пьезодиэлектрических кристаллов класса $6mm$ задачи плоско - деформированного упругого поля и магнитного поля разделяются от задачи антиплоской деформации, которая электроактивна. Это означает, что в данной среде в качестве волнового сигнала можно возбуждать один из указанных волновых полей.

В дальнейшем вместо обозначений декартовых координат x_1, x_2, x_3 для удобства будем пользоваться обозначениями x, y, z.

Затухающие по глубине граничащих полупространств решения полученных краевых задач, с учетом слабой нелинейности пьезокристалла, запишутся в виде

$$u_0(x,y,t,\xi\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}U_{0m}(\xi\tau)\left[\exp(-m\nu_1 y)-(\nu_1\nu_2)^{1/2}\exp(-m\nu_2 y)\right]\times$$

$$\times\exp(im\varphi)+k.c.$$

$$v_0(x,y,t,\xi\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}-iU_{0m}(\xi\tau)\left[\nu_1\exp(-m\nu_1 y)-\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{1/2}\exp(-m\nu_2 y)\right]\times \qquad (2.3)$$

$$\times\exp(im\varphi)+k.c.$$

$$w_0(x,y,t,\xi\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}W_{0m}(\xi\tau)\exp(-mk\alpha y)\exp(im\varphi)+k.c.$$

$$\Phi_0(x,y,t,\xi\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e_{15}}{e_{11}}W_{om}(\xi\tau)\left[\exp(-mk\alpha y)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}\exp(-mky)\right]\exp(im\varphi)+k.c. \qquad (2.4)$$

$$\Phi_0^{(0)}(x,y,t,\xi\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e_{15}}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}W_{0m}(\xi\tau)\times$$

$$\times\exp(mky)\exp(im\varphi)+k.c.$$

Потенциальные, затухающие по глубине полупространств сигнальные магнитные поля не существуют. А это значит, что в данной среде невозможно возбуждать локализованное у поверхности раздела сред высокочастотное потенциальное магнитное поле. Однако из линейной теории электроупругости известно, что электрическое поле в пьезодиэлектрике индуцирует вихревое магнитное поле, определяющееся формулой [3]

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}_0}{\partial t}$$

Под индукцией $\vec{D}_0$ понимается заданное значение $\vec{D}$, определяемое из задачи электроупругости, вихревая часть магнитоупругого поля в акустоэлектрической задаче имеет порядок $\left(v^2/c_0^2\right)\times|\nabla\Phi|$ и всегда пренебрежимо мала.

В соотношениях (2.3) и (2.4) использованы обозначения

$$\alpha=\left[1-\frac{v_B^2}{c_t^2}\right]^{1/2}=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}\frac{\chi^2}{1+\chi^2}$$

$$\nu_1=\sqrt{1-v_R^2/c_l^2},\qquad \nu_2=\sqrt{1-v_R^2/c_{1t}^2} \qquad (2.5)$$

$$c_t^2=\frac{c_{44}}{\rho}(1+k^2),\qquad c_{1t}^2=\frac{c_{66}}{\rho},\qquad c_l^2=\frac{c_{11}}{\rho}$$

$\varphi(x,t)=kx-\omega t$ - фазовая функция.

В случае "электрически закрытой" границы (металлизированная поверхность пьезоэлектрика) во внешней вакуумной среде отсутствует также электрическое поле (т.е. $\Phi_0^{(0)}(x,y,t,\xi,\tau)=0$), а внутри пьезодиэлектрика электрическое поле описывается функцией

$$\Phi_0^{(0)}(x,y,t,\xi,\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}W_{0m}(\xi,\nu)\left[\exp(-m\alpha ky)-\exp(-mky)\right]\times$$
$$\times\exp(im\varphi)+k.c.$$

Во втором приближении волновые уравнения электромагнитоупругости получаются в виде

$$L_1[u_1,v_1]=-2c_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial\xi}-(c_{11}-c_{66})\frac{\partial^2 v_0}{\partial y\partial\xi}+2\rho\frac{\partial^2 u_0}{\partial t\partial\tau}+F_1[u_0,v_0,w_0,\Phi_0]$$
$$L_2[u_1,v_1]=-2c_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial\xi}-(c_{11}-c_{66})\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial\xi}+2\rho\frac{\partial^2 v_0}{\partial t\partial\tau}+F_2[u_0,v_0,w_0,\Phi_0] \tag{2.6}$$

$$L_3[w_1,\Phi_1]=-2c_{44}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial\xi}-2e_{15}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\partial\xi}+2\rho\frac{\partial^2 w_0}{\partial t\partial\tau}+F_3[u_0,v_0,w_0,\Phi_0]$$
$$L_4[w_1,\Phi_1]=-2e_{15}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial\xi}+2\varepsilon_{11}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\partial\xi}+F_4[u_0,v_0,\Phi_0] \tag{2.7}$$

$$L_5[\Phi_1^{(0)}]=-2\frac{\partial^2\Phi_0^{(0)}}{\partial x\partial\xi}+F_5[u_0^{(0)},v_0^{(0)},\Phi_0^{(0)}]$$
$$L_6[\Psi_1]=-2\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial x\partial\xi}+F_6[u_0,v_0,\Psi_0] \tag{2.8}$$
$$L_7[\Psi_1^{(0)}]=-2\frac{\partial^2\Psi_0^{(0)}}{\partial x\partial\xi}+F_7[u_0^{(0)},v_0^{(0)},\Psi_0^{(0)}]$$

Здесь $L_k[*]$ - линейные волновые операторы, а $F_k[*]$ - нелинейные операторы.

На деформированной поверхности раздела двух сред $y=0$ искомые величины волнового поля удовлетворяют неоднородным граничным условиям

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{c_{11}}{c_{12}}\frac{\partial v_1}{\partial y}=-\frac{\partial u_0}{\partial\xi}+B_1[u_0,v_0,w_0,\Phi_0]$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial x}=-\frac{\partial v_0}{\partial\xi}+B_2[u_0,v_0,w_0,\Phi_0,\Phi_0^{(0)}] \tag{2.9}$$
$$\frac{\partial w_1}{\partial y}+\frac{e_{15}}{c_{44}}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}=B_3[u_0,v_0,w_0,\Phi_0,\Phi_0^{(0)}]$$

$$\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{\partial w_1}{\partial y}-\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}}\frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial y}=B_4\left[u_0,v_0,w_0,\Phi_0,\Phi_0^{(0)}\right]$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}-\frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial x}=-\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi}+\frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\delta \xi}+B_5\left[u_0^{(0)},v_0^{(0)},\Phi_0,\Phi_0^{(0)}\right] \tag{2.10}$$

$$\frac{\mu_{11}}{\mu_0}\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}-\frac{\partial \Psi_1^{(0)}}{\partial x}=B_6\left[u_0^{(0)},v_0^{(0)},\Psi_0,\Psi_0^{(0)}\right]$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}-\frac{\partial \Psi_1^{(0)}}{\partial x}=-\frac{\partial \Psi_0}{\partial \xi}+\frac{\partial \Psi_0^{(0)}}{\partial \xi}+B_7\left[u_0^{(0)},v_0^{(0)},\Psi_0,\Psi_0^{(0)}\right] \tag{2.11}$$

здесь также $B_x[*]$ - нелинейные операторы и выражения соответствующих слагаемых не приводятся из-за их громоздкости.

В практике обычно используются или рэлеевский электроупругий сигнал $\{u_0(x,y,t),\ v_0(x,y,t),\ 0,\ \Phi_0(x,y,t)\}$, или чисто сдвиговой электроупругий волновой сигнал $\{0,\ 0,\ w_0(x,y,t),\ \Phi_0(x,y,t)\}$ (волны Гуляева - Блюстейна). В случае пьезокристалла класса $6mm$, в указанном срезе xOy, рэлеевское волновое поле не электроактивное, то есть имеем

$$u_0(x,y,t)\neq 0,\qquad v_0(x,y,t)\neq 0,\qquad w_0(x,y,t)=0$$

$$\Phi_0(x,y,t)=0,\qquad \Phi_0^{(0)}(x,y,t)=0$$

$$\Psi_0(x,y,t)=0,\qquad \Psi_0^{(0)}(x,y,t)=0$$

Тогда, если в первом приближении имеется только одна рэлеевская волна, в соотношениях (2.6) - (2.11), а также в следующих приближениях $(m\geq 1)$ будем иметь:

$$F_k[u_m,v_m,0,0]=F_k^{(1)}[u_m,v_m],\quad (k=1,2)$$

$$F_j[u_m,v_m,0,0]=0,\quad (j=3,4,5,6,7)$$

$$B_k[u_m,v_m,0,0]=B_k^{(1)}[u_m,v_m],\quad (k=1,2)$$

$$B_j[u_m,v_m,0,0]=0,\quad (j=3,4,5,6,7) \tag{2.12}$$

С учетом (2.12) из (2.7), (2.8) и (2.10), (2.11), очевидно, что начальное плоско-деформированное волновое поле не возбуждает высшие гармоники антиплоского электроупругого, а также магнитоупругого полей. Происходит только последовательное возбуждение высших гармоник чисто упругого плоско-деформированного волнового поля в плоскости изотропии пьезокристалла xOy. Исследование данной задачи можно найти в работах [4,5].

В случае чисто сдвигового электроупругого волнового сигнала:

$$u_0(x,y,t)=0, \qquad v_0(x,y,t)=0$$
$$\Psi_0(x,y,t)=0, \qquad \Psi_0^{(0)}(x,y,t)=0$$

а $w_0(x,y,t)$, $\Phi_0(x,y,t)$ и $\Phi_0^{(0)}(x,y,t)$ определяются соотношениями (2.4). Существует также пренебрежимо малое вихревое поле внутри и вне пьезополупространства. Тогда в уравнениях и граничных условиях имеем:

$$\begin{aligned} &F_k(0,0,w_m,\Phi_m)=F_k^{(2)}(w_m,\Phi_m)\\ &F_j(0,0,w_m,\Phi_m,\Phi_m^{(0)})=0\\ &B_k(0,0,w_m,\Phi_m,\Phi_m^{(0)})=B_k^{(2)}(w_m,\Phi_m,\Phi_m^{(0)})\\ &B_j(0,0,w_m,\Phi_m,\Phi_m^{(0)})=0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

где также $k=1,2$ и $j=3,4,5,6,7$.

Генерация высших гармоник сдвиговой электроупругой волны происходит из-за самовоздействия волнового сигнала (первичной гармоники). Условие отсутствия вековых членов в решении, получается из граничных условий краевой задачи электроупругости (2.7) и (2.10):

$$M_{ij}{}^0 C_j(\varepsilon,\tau)=A_i(W_{0,\xi},W_{0,\tau}) \tag{2.14}$$

Учитывая, что первичным электроупругим полем обеспечивается выполнение условия $\det\left\|M_{ij}{}^0\right\|=0$, из условия существования нетривиального решения получаем дифференциальное уравнение, описывающее характер изменения амплитуд высших гармоник сдвиговой электроупругой волны

$$a_0 W_{om,\xi}+W_{om,\tau}=0 \quad \text{для} \quad m\geq 1 \tag{2.15}$$

где $a_0=\dfrac{c_\chi{}^2}{v_B}\left(1-\alpha^2\dfrac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}+\varepsilon_0}\right)$ - скорость изменения амплитуды волны (групповая скорость), $\alpha=\chi^2\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}+\varepsilon_0}$, $v_B=c_t\left[1-\alpha^2\right]^{1/2}$ - скорость поверхностной волны Гуляева - Блюстейна.

При падении линейного волнового сигнала, для комплексных амплитуд гармоник $W_{0m}(\xi,\tau)$ входными условиями будут

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\left[W_{01}(0,0)\right]=A_0, \quad \mathrm{Im}\left[W_{01}(0,0)\right]=0\\ &\mathrm{Re}\left[W_{0m\geq2}(0,0)\right]=0, \quad \mathrm{Im}\left[W_{0m\geq2}(0,0)\right]=0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

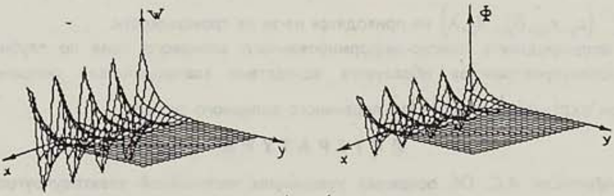
С учетом этого для комплексных амплитуд получаем

$$
\begin{aligned}
&W_{01}(\xi,\tau) = A_0 \exp(a_0\tau - \xi), \quad \mathrm{Im}[W_{01}(\xi,\tau)] = 0 \\
&W_{0m}(\xi,\tau) = 0 \quad \text{при} \quad m \geq 2
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Затухающие по глубине граничащих полупространств антиплоское электроупругое поле получается в виде

$$
\begin{aligned}
&w_1(x,y,t,\xi,\tau) = A_0 \exp(a_0\tau-\xi)\left[\cos(kx-\omega t) + \alpha\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}+\varepsilon_0} y\sin(kx-\omega t)\right]\times\exp(-k\alpha y) \\
&\Phi_1(x,y,t,\xi,\tau) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} A_0 \exp(a_0\tau-\xi)\left[\cos(kx-\omega t)\left[\exp(-k\alpha y) + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}\exp(-ky)\right]+\right. \\
&\left.+\left[\exp(-ky) + \alpha\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}\exp(-k\alpha y)\right] y\sin(kx-\omega t)\right] \\
&\Phi_1^{(0)}(x,y,t,\xi,\tau) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}} A_0 \exp(a_0\tau-\xi)\exp(ky)\left[\cos(kx-\omega t) - y\sin(kx-\omega t)\right]
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Очевидно, что возникает запаздывающая электроупругая волна, отстающая из основного волнового сигнала фазой на $\frac{3}{2}\pi$ и неоднородность волны в глубь полупространств имеет иной характер по сравнению с основным волновым сигналом (фиг. 1). Запаздывающая волна имеет максимальную амплитуду не на поверхности $y = 0$, а на глубине $y = \frac{\lambda}{2\pi\alpha}$ для каждой волны длиной λ.



фиг. 1

Из (2.13) следует, что в этом случае генерируется также плоско-деформированное волновое поле. Во первых, здесь возникает акустическое детектирование (нераспространяющаяся волна), обусловленное взаимодействием гармоник электроупругой сдвиговой волны

$$
\begin{aligned}
&u_{01}(x,y,t,\xi,\tau) = 0 \\
&v_{01}(x,y,t,\xi,\tau) = R_0^{\,2}\left[A_1 \exp(-2\alpha ky) + B_1 \exp(-2\alpha ky)\right]
\end{aligned}
$$

где

$$A_1 = 1+\alpha^2 - 2\frac{c_{66}}{c_{11}} + \left(1-\alpha^2\right)\frac{\varepsilon_{15}{}^2}{c_{66}\varepsilon_{11}}$$

$$B_1 = 4\frac{e_{15}{}^2}{c_{11}\varepsilon_{11}}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}, \quad R_0{}^2 = \frac{2\pi A_0{}^2}{\lambda}$$

Локализованное у поверхности раздела $y=0$ распространяющееся плоско-деформированное поле (волна Рэлея) определяется из краевой задачи (2.6),(2.9) с учетом (2.13) и (2.18):

$$u_1(x,y,t,\xi\,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{1n}{}^{(1)}\exp(-n\alpha ky) + A_{1n}{}^{(2)}\exp(-nky) + \right.$$
$$\left. + A_{1n}{}^{(3)}\exp(-(n+\alpha-1)ky) + A_{1n}{}^{(4)}\exp((-n\alpha+\alpha-1)ky)\right] +$$
$$+\sum_{n=2}^{1+\frac{1}{\alpha}} A_{1n}{}^{(5)}\exp((n\alpha-\alpha-1)ky)\exp(in\varphi) + k.c.$$

$$v_1(x,y,t,\xi\,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[B_{1n}{}^{(1)}\exp(-n\alpha ky) + B_{1n}{}^{(2)}\exp(-nky) + \right.$$
$$\left. + B_{1n}{}^{(3)}\exp(-(n+\alpha-1)ky) + B_{1n}{}^{(4)}\exp((-n\alpha+\alpha-1)ky)\right] +$$
$$+\sum_{n=2}^{1+\frac{1}{\alpha}} B_{1n}{}^{(5)}\exp((n\alpha-\alpha-1)ky)\exp(in\varphi) + k.c.$$

где выражения коэффициентов $A_{mn}{}^{(i)}\left(c_{ij}, e_{kij}, \delta_{jk}, A_0, \lambda\right)$ и $B_{mn}{}^{(i)}\left(c_{ij}, e_{kij}, \delta_{jk}, A_0, \lambda\right)$ не приводятся из-за их громоздкости.

Неоднородность плоско-деформированного волнового поля по глубине пьезополупространства образуется вследствие взаимодействия основных форм $\exp(-\alpha ky)$ и $\exp(-ky)$ первичного волнового сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аветисян А.С.* Об основных уравнениях нелинейной электроупругости пьезоэлектрического диэлектрика. - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1990, т.43, № 4, с. 41-51.
2. *Maugin G.A.* Nonlinear electromechanical effects and application.- World Sci. Publ., Singapore, 1985.
3. *Балакирев М.К., Гилинский И.А.* Волны в пьезокристаллах.- Новосибирск.: Наука, 1982.
4. *Kalyanasundaram N.* Nonlinear surface acoustic waves on an isotropic solid.- Int. J. Eng. Sci., 1981, v.19, № 1, pp. 279-286.

5. *Lardner R.W.* Nonlinear surface acoustic waves on an elastic solid of general anisotropy.- J. Elast., 1986, v.16, № 1, pp. 63-75.
6. *Nelson D.F.* Theory of nonlinear electroacoustics of dielectric, piezoelectric and pyroelectric crystals. - J. Acoust. Soc. Amer., 1978. v. 63. pp. 1738-1748.

Институт Механики АН Армении

Поступила в редакцию
19.12.1992