ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 2, 1995 Механика

ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТОУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА

БАГДАСАРЯН Г. Е. , ПИЛИПОСЯН Г. Т.

Բաղդասարյան Գ.Ե., Փիլիպոսյան Գ.Թ.

Գերհաղորդիչ սալի մագնիսաառաձգական կայունության ուսումնասիրությունը Նեյմանի խնդրի թվային լուծման հիման վրա

Հոդվածում Նեյմանի արտաքին խնդրի համար առաջարկված է լուծման թվային մեթոդ: Ցույց է տրված սալի ստատիկ կայունության կորստի հնարավորությունը: Ընդ որում, ընդլայնական մագնիսական դաշտի կրիտիկական արժեքը մեկ կարգով փոքր է երկայնական մագնիսական դաշտի կրիտիկական արժեքից:

Bagdasarian G.Y., Piliposian G.T.

Investigation of Magnetoelastic Stability of Superconducting Plates Based on the Numerical Solution of Neyman's External Problem.

В статье предложен численный метод решения для внешней задачи Неймана. Показана возможность потери статической устойчивости сверхпроводящей пластинки, причем критическое значение поперечного магнитного поля на порядок ниже критического значения продольного магнитного поля.

1. Постановка задачи. Пусть изотропная упругая пластинка постоянной толщины $2h$ изготовлена из сверхпроводящего материала и находится во внешнем стационарном магнитном поле H_0. Пусть, далее, пластинка отнесена к прямоугольной декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью x_1x_2. Принимается, что электромагнитные свойства среды, окружающей пластинку, эквивалентны свойствам вакуума. Предполагается также, что влияние деформацией невозмущенного состояния и влияния токов смещения на характеристики магнитоупругой устойчивости пластинки можно пренебрегать.

Известно, [1], что при помещении сверхпроводящего тела в магнитное поле на тонком приповерхностном слое появляются экранирующие токи, препятствующие проникновению магнитного поля во внутрь тела и изменяющие напряженности магнитного поля в области вне тела. Это изменение является результатом наложения на начальное поле H_0 магнитного поля H^0, создаваемого экранирующими токами $\left(H^{(e)} = H_0 + H^0\right)$. Кроме этого, тангенциальные компоненты магнитного поля $H^{(e)}$ и следовательно компоненты тензора напряжений Максвелла $\hat{T}_0$ на поверхности пластинки претерпевают разрыв (так как напряженность магнитного поля во внутренней области равна нулю). Этим разрывом обусловлено появление магнитного давления P_0 магнитного происхождения, определяемого формулой [1]

$$P_0 = N_0 \hat{T}^0 \tag{1.1}$$

где $\hat{T}^0$ -тензор напряжений Максвелла

$$T_{ik}^0 = \mu_0 \left[\left(H_k^0 + H_{0k}\right)\left(H_i^0 + H_{0i}\right) - \frac{1}{2}\delta_{ik} H^{(e)2} \right] \tag{1.2}$$

N_0 - единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности пластинки.

Под действием поверхностной нагрузки P_0 в пластинке устанавливается напряженное состояние (которое будем называть невозмущенным), характеризующееся вектором перемещения u_0, тензором упругих напряжений $\hat{S}_0$ и вектором напряженности $H_0^{(e)}$ во внешней области. Указанные величины невозмущенного состояния, как обычно, в теории упругой устойчивости [2] будут определяться из линейных уравнений теории упругости и квазистатических уравнений Максвелла при поверхностных условиях, написанных без учет деформаций поверхности, ограничивающей пластинку. Тогда характеристики невозмущенного состояния будут определяться из следующих уравнений (равновесий и магнитостатики) и граничных условий на недеформированной поверхности пластинки:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S_{ik}^0}{\partial x_k} = 0 \\ &S_{ik}^0 N_k^0 = T_{ik}^0 N_k^0 \quad \text{при} \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} H^0 = 0, \qquad \operatorname{div} H^0 = 0 \\ &\left(H_{0k} + H_k^0\right) N_k^0 = 0 \quad \text{при} \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma \\ &H^0 \to 0, \quad \text{при} \quad {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \to \infty \end{aligned} \tag{1.4}$$

Характеристики возмущенного состояния $\left(u_0 + u, S_0 + S, P_0 + P, H_0^{(e)} + h\right)$ должны удовлетворять краевым условиям на деформированной поверхности пластинки и нелинейным уравнениям теории упругости и квазистатической электродинамики. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия, аналогично работам [2,3,4], линеаризуются. В результате получаются следующие линейные уравнения возмущенного состояния:

в области, занимаемой пластинкой

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[S_{ik}+S_{im}^0\frac{\partial u_k}{\partial x_m}\right]=\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \tag{1.5}$$

в области вне тела пластинки:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{h}=0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{h}=0 \tag{1.6}$$

и следующие линейные условия на поверхности S:

$$S_{ik}N_k^0=T_{ik}N_k^0 \tag{1.7}$$

$$h_kN_k^0+H_k\frac{\partial u_k}{\partial x_i}N_i^0=0 \tag{1.8}$$

Здесь

$$S_{ik}=\frac{E}{(1+\nu)}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ik}\frac{\partial u_m}{\partial x_m}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right] \tag{1.9}$$

$$T_{ik}=\mu_0\left[H_kh_i+h_kH_i-\delta_{ik}hH\right] \tag{1.10}$$

где E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона, ρ - плотность материала пластинки, а по повторяющимся индексам производится суммирование.

Пусть для рассматриваемой пластинки справедлива гипотеза недеформируемых нормалей, согласно которой имеем следующие соотношения:

$$u=u-x_1\frac{\partial w}{\partial x_1}, \qquad u_2=\mathrm{v}-x_3\frac{\partial w}{\partial x_2}, \qquad u_3=w(x_1,x_2) \tag{1.11}$$

где $u=u(x_1,x_2,t)$, $\mathrm{v}=\mathrm{v}(x_1,x_2,t)$, $w=w(x_1,x_2,t)$- возмущения перемещений срединной плоскости пластинки.

Подставляя (1.9) и (1.10) в (1.5) и осредняя полученные при этом уравнения по толщине пластинки, с учетом поверхностных условий (1.8) и соотношений (1.10), получим следующую систему дифференциальных уравнений устойчивости пластинки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\left(T_{31}^+-T_{31}^-\right)=0 \tag{1. 12}$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x_2^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x_1^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\left(T_{32}^+-T_{32}^-\right)=0$$

$$D\Delta^2 w - h\frac{\partial}{\partial x_1}\left(T_{31}^{+} + T_{31}^{-}\right) - h\frac{\partial}{\partial x_2}\left(T_{32}^{+} + T_{32}^{-}\right) -$$

$$-t_{11}^{0}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - 2t_{12}^{0}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - t_{22}^{0}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = T_{33}^{+} - T_{33}^{-}$$

В уравнениях (1.12) t_{ik}- усилия, характеризующие невозмущенное состояние пластинки

$$t_{ik}^{0} = \int_{-h}^{h} S_{ik}^{0} dx_3 \tag{1.13}$$

где S_{ik}^{0} являются решением задачи (1.3), T_{ik} - компоненты тензора напряжений Максвелла возмущенного состояния, определяемые согласно (1.10), а знаками "+" и "-" здесь и в дальнейшем отмечены значения рассматриваемой величины на плоскостях $x_3 = h$ и $x_3 = -h$, соответственно.

Рассматривая систему уравнений (1.12), замечаем, что она не замкнута. В нее, согласно (1.10), входят неизвестные поверхностные значения $H_i^{0\pm}$ компоненты магнитного поля $\boldsymbol{H}^0$ экранирующих токов и неизвестные поверхностные значения $h_i^{\pm}$ компонент индуцированного магнитного поля $\boldsymbol{h}$. Их определяем, соответственно решая задачу (1.4) и задачу (1.6)-(1.7) при условии затухания возмущений на бесконечности.

При решении конкретных задач устойчивости к уравнениям (1.12) необходимо присоединить также условия на торцах пластинки.

2. Устойчивость сверхпроводящей пластинки-полосы в постоянном магнитном поле. На основе уравнений и граничных условий, приведенных выше, рассмотрим две конкретные задачи устойчивости пластинки-полосы ($|x_1| \le a,\ -\infty < x_2 < +\infty,\ |x_1| \le h$) в заданном постоянном магнитном поле, предполагая, что все величины не зависят от координаты x_2.

а) Случай продольного магнитного поля. Пусть рассматриваемая пластинка находится в продольном магнитном поле $H_0(0, H_0, 0)$, вектор напряженности которого параллелен оси $0x_2$. При этих условиях задачи (1.4), (1.5)-(1.7) имеют нулевые решения ($\boldsymbol{H}^0 = 0,\ \boldsymbol{h} = 0$) и поэтому, согласно (1.10), $T_{ik} = 0$. В силу этого легко заметить, что задача (1.3), определяющая напряжения S_{ik}^{0} невозмущенного состояния, имеет следующее значение:

$$\begin{gathered} S_{11}^{0} = S_{33}^{0} = -\frac{1}{2}\mu_0 H_0^{\,2} \\ S_{12}^{0} = S_{13}^{0} = S_{22}^{0} = S_{23}^{0} = 0 \end{gathered} \tag{2.1}$$

Учитывая изложенное и подставляя (2.1) в систему (1.12), замечаем, задача определения продольного возмущения "u" отделяется от задачи определения поперечного возмущения "w" и задача устойчивости рассматриваемой сверхпроводящей пластинки в продольном магнитном поле сводится к решению следующего уравнения:

$$D\frac{d^4 w}{dx_1^{\,4}}+2\rho_0 h\frac{d^2 w}{dt^2}+h\mu_0 H_0^{\,2}\frac{d^2 w}{dx_1^{\,2}}=0 \tag{2.2}$$

при обычных условиях закрепления краев $x_1=\pm a$ пластинки.

Рассматривая уравнение (2.2), замечаем, что данная задача устойчивости сводится к известной задаче [5] статической устойчивости пластинки-полосы, сжатой по направлению коротких сторон равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью $h\mu_0 H_0^{\,2}$, приложенной по длинным торцам пластинки. Решение уравнения (2.2) в случае шарнирно опертой пластинки будем искать в виде

$$w=w_0\cos\frac{n\pi x_1}{2a}\qquad (n=1,2,\ldots) \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.2) для определения минимального критического значения индукции магнитного поля $B_{0*}=\mu_0 H_{0*}$, при котором пластинка теряет устойчивость, получаем формулу

$$B_{0*}^{\,2}=\frac{\pi^2\mu_0 E}{6(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{a}\right)^2 \tag{2.4}$$

Формула (2.4) показывает, что присутствие магнитного поля с индукцией порядка одной теслы может привести к потере статической устойчивости тонкой пластинки.

б) Случай поперечного магнитного поля. Рассмотрим случай, когда пластинка-полоса находится в заданном магнитном поле $\boldsymbol{H}_0(0,0,H_0)$, вектор напряженности которого перпендикулярен к поверхности пластинки. В этом случае также плоская задача отделяется от задачи изгиба, а задача (1.3) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} &S_{13}^0=S_{31}^0=0\\ &S_{11}^0=\frac{1}{2}\mu_0\left[H_0+H_3^0(a,x_3)\right]^2\\ &S_{33}^0=-\frac{1}{2}\mu_0\left[H_1^0(x_1,h)\right]^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в третье уравнение системы (1.12) и учитывая поверхностные условия, из (1.4) и (1.7) получаем следующее уравнение устойчивости пластинки:

$$
\begin{gathered}
D\frac{d^4w}{dx_1^{\,4}}-h\mu_0\frac{d}{dx_1}\left\{\left[\left(H_1^{0+}\right)^2+\left(H_1^0\right)^2\right]\frac{dw}{dx}\right\}+\\
+\frac{\mu_0}{2}\frac{d^2w}{dx_1^{\,2}}\int_{-h}^{h}\left[H_0+H_0^3(a,x_3)\right]^2dx_3=\mu_0\left[\left(H_1^0h_1\right)^- -\left(H_1^0h_1\right)^+\right]
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

В уравнение (2.6) входят неизвестные компоненты H_i^0 магнитного поля $\boldsymbol{H}^0$ экранирующих токов, которые необходимо найти, решая задачу (1.4) во внешней области, и неизвестная компонента индуцированного магнитного поля $\boldsymbol{h}$, которую определяем, решая задачу (1.6)-(1.7). Решение задачи (1.4) введением потенциальной функции φ_0 посредством

$$
\boldsymbol{H}^0=\boldsymbol{H}_0\operatorname{grad}\varphi_0 \tag{2.7}
$$

сводится к решению следующей задачи Неймана вне прямоугольника $\left(|x_1|\le a,\ |x_3|\le h\right)$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_1^{\,2}}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_3^{\,2}}=0\\
&\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_3}=-1 \qquad \text{при} \quad x_3=\pm h\\
&\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}=0 \qquad \text{при} \quad x_1=\pm a\\
&\varphi_0=0 \qquad \text{при} \quad |r|\to\infty
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Что же касается задачи (1.6)-(1.7), граничные условия которой согласно (1. 7) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&h_3=-H_1^0\frac{\partial u_1}{\partial x_3}=H_1^0\frac{\partial w}{\partial x_1}=H_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1} \qquad \text{при} \quad x_3=\pm h\\
&h_1=-\left(H_{03}+H_3^0\right)\frac{\partial w}{\partial x_1} \qquad \text{при} \quad x_1=\pm a
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

то для ее решения необходимо знать выражения прогиба пластинки. Поэтому, предполагая, что края пластинки $x_1=\pm a$ шарнирно оперты, решение уравнения (2.5) представим в виде

$$
w=w_0\cos\frac{\pi x_1}{2a} \tag{2.10}
$$

Тогда введением потенциальной функции φ посредством

$$h = H_0 w_0 \frac{\pi}{2\alpha} \operatorname{grad} \varphi \tag{2.11}$$

задача определения магнитного поля h сводится к решению следующей внешней задачи Неймана для рассматриваемого прямоугольника:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3{}^2} = 0 \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} \frac{\pi}{2a} \sin \frac{\pi x_1}{2a} \qquad \text{при} \quad x_3 = \pm h \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \left(1 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_3}\right) \frac{\pi}{2a} \sin \frac{\pi x_1}{2a} \qquad \text{при} \quad x_1 = \pm a \\
&\varphi = 0 \qquad \text{при} \quad |r| \to \infty
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Задачи (2.8) и (2.12) в следующем пункте будут решаться численным методом и поэтому будем считать, что функции φ_0 и φ известны. Тогда, подставляя (2.9) в уравнение устойчивости (2.6) и используя процесс ортогонализации с учетом (2.7) и (2.11), получаем следующую формулу для определения критического значения индукции B_{0*} магнитного поля:

$$\begin{aligned}
&B_{0*} = \frac{2\mu_0 D \lambda^3}{[\lambda A + 2C - 4hB]} \\
&A = \int_{-h}^{h} \left[1 + \frac{\partial \varphi_0(a, x_3)}{\partial x_3}\right]^2 dx_3, \qquad B = \frac{\lambda}{a} \int_{-a}^{a} \left(\frac{\partial \varphi_0(x_1, h)}{\partial x_1}\right)^2 \sin^2 \lambda x_1 \, dx_1 \\
&C = \frac{2}{a} \int_{-a}^{a} \frac{\partial \varphi_0(x_1, -h)}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_0(x_1, h)}{\partial x_1} \cos \lambda x_1 \, dx_1
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Величины A, B, C, входящие в (2.13), вычисляются, используя формулы (3.14) и (3.15) и численные решения задач Неймана (2.8) и (2.12), которые приведены в следующем пункте. На основе (2.13) произведено вычисление критического значения индукции B_{0*} внешнего магнитного поля при различных значениях h/a. Для расчета принято $E = 7.5 \cdot 10^{10}$ н/м^2, $\nu = 0.34$ (дюраль). Результаты вычисления приведены в таблице.

Таблица значений B_{0*}

$\frac{h}{a}$	0.05	0.01	0.005	0.002
$B_{0*}(TL)$	$7 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$	10^{-1}	$3 \cdot 10^{-2}$

Сравнивая значения критического магнитного поля, приведенные в таблице и полученные по формуле (2.4), легко заметить, что влияние поперечного магнитного поля намного сильнее, чем в случае продольного магнитного поля. Значение B_{0*} в случае поперечного магнитного поля на порядок ниже по сравнению со значением B_{0*}, полученном на основе (1.14) в случае продольного магнитного поля.

3. Численное решение задачи Неймана вне прямоугольника. Рассмотрим внешнюю задачу Неймана в двумерной области D

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 \\ &\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_c = f \end{aligned} \tag{3.1}$$

где C - граница D; n - внешняя нормаль в точках C.

Приведем вкратце схему приведения этой задачи к интегральному уравнению .

Будем искать решение внешней второй краевой задачи (3.1) в виде потенциала простого слоя [6]

$$u(M) = \int_C \ln\frac{1}{R_{MP}}\mu(P)dS_P \tag{3.2}$$

При любом выборе измеримой $\mu(P)$ функция $u(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа во внешней области. Нормальные производные потенциала простого слоя в некоторой точке P_0, лежащей на контуре C, являются разрывными функциями, для которых имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial n_B}\right)_B &= \left(\frac{\partial u}{\partial n_B}\right)_0 - \pi\mu(P_0) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n_B}\right)_H &= \left(\frac{\partial u}{\partial n_B}\right)_0 + \pi\mu(P_0) \end{aligned} \tag{3.3}$$

если ось x_3 направить по внутренней нормали. В (3.3) $\partial u/\partial n_B$ - внутренняя нормальная производная функции $u, (\partial u/\partial n)_B$ и $(\partial u/\partial n)_H$ - пределы производной $\partial u/\partial n$ при стремлении точки M к точке P_0 соответственно с внутренней или внешней стороны поверхности пластинки, $(\partial u/\partial n)_0$ - значение нормальной производной потенциала простого слоя в точке P_0. Для выполнения граничного условия , очевидно, надо потребовать, чтобы

$$\left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial n_H}\right)_H = f(P_0) \tag{3.4}$$

Принимая во внимание формулы (3.3), получаем уравнение для определения функции $\mu(P)$

$$\pi\mu(s_0)+\int_C K(s_0,s)\mu(s)\,ds=f(s_0) \tag{3.5}$$

где

$$K(s,s_0)=\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\left(\ln\frac{1}{R_{PP_0}}\right)=\frac{\cos\psi}{R_{PP_0}} \tag{3.6}$$

В (3.6) ψ - угол между внутренней нормалью $\boldsymbol{n}$ в точке P и вектором PP_0. R_{PP_0} - расстояние между точками P и P_0.

В рассматриваемом случае область является прямоугольником $\{-a\le x\le a,-h\le y\le h\}$ и вычисления показывают, что уравнение (2.5) распадается на систему четырех интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$:

$$\pi\varphi_1(t)+\frac{h}{a}\int_{-1}^{1}\frac{2\varphi_2(t_0)\,dt_0}{4\frac{h^2}{a^2}+(t-t_0)^2}+\frac{h^2}{a^2}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_3(t_0)(1-t_0)\,dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(1-t_0)^2+(1-t)^2}+$$

$$+\frac{h^2}{a^2}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_4(t_0)(1-t_0)\,dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(1-t_0)^2+(1+t)^2}=f_1(t)$$

$$\frac{h}{a}\int_{-1}^{1}\frac{2\varphi_1(t_0)\,dt_0}{4\frac{h^2}{a^2}+(t-t_0)^2}+\pi\varphi_2(t)+\frac{h^2}{a^2}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_3(t_0)(1+t_0)\,dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(1+t_0)^2+(1-t)^2}+$$

$$+\frac{h^2}{a^2}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_4(t_0)(1+t_0)\,dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(1+t_0)^2+(1+t)^2}=f_2(t)$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(t_0)(1-t_0)\,dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(1-t)^2+(1-t_0)^2}+\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(t_0)(1-t_0)\,dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(1+t)^2+(1-t_0)^2}+\pi\varphi_3(t)+ \tag{3.7}$$

$$+\frac{h}{a}\int_{-1}^{1}\frac{2\varphi_4(t_0)\,dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(t-t_0)^2+4}=f_3(t)$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(t_0)(1+t_0)\,dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(1-t)^2+(1+t_0)^2}+\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(t_0)(1+t_0)\,dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(1+t)^2+(1+t_0)^2}+$$

$$+\frac{h}{a}\int_{-1}^{1}\frac{2\varphi_3(t_0)\,dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(t-t_0)^2+4}+\pi\varphi_4(t)=f_4(t)$$

В (3.7) $\varphi_i(t)$ - значения функции $\mu(as)$ на соответствующих сторонах прямоугольника $y=\pm h$ и $\mu(hs)$- на сторонах $x=\pm a$.

Запишем систему уравнений (3.6) в векторно-матричной форме

$$\varphi(t)+\int_{-1}^{1}K(t,t_0)\varphi(t_0)\,dt_0=f(t) \tag{3.8}$$

где

$$\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t),\varphi_4(t))^{tr}$$

$$f(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t))^{tr}$$

$$K(t,t_0)=\left\|K(t,t_0)\right\|_{I,J}^{4}$$

$$K_{11}(t,t_0)=K_{22}(t,t_0)=K_{33}(t,t_0)=K_{44}(t,t_0)=0$$

$$K_{12}(t,t_0)=\frac{h}{a}\frac{2}{4\frac{h^2}{a^2}+(t-t_0)^2},\quad K_{13}(t,t_0)=\frac{h^2}{a^2}\frac{(1-t_0)}{\frac{h^2}{a^2}(1-t_0)^2+(1-t)^2}$$

$$K_{14}(t,t_0)=\frac{h^2}{a^2}\frac{(1-t_0)}{\frac{h^2}{a^2}(1-t_0)^2+(1+t)^2},\quad K_{23}(t,t_0)=\frac{h^2}{a^2}\frac{(1+t_0)}{\frac{h^2}{a^2}(1+t_0)^2+(1-t)^2}$$

$$K_{24}(t,t_0)=\frac{h^2}{a^2}\frac{(1+t_0)}{\frac{h^2}{a^2}(1+t_0)^2+(1+t)^2},\quad K_{31}(t,t_0)=\frac{h^2}{a^2}\frac{(1-t_0)}{\frac{h^2}{a^2}(1-t)^2+(1-t_0)^2}$$

$$K_{32}(t,t_0)=\frac{(1-t_0)}{\frac{h^2}{a^2}(1+t)^2+(1-t_0)^2},\quad K_{34}(t,t_0)=\frac{h}{a}\frac{2}{\frac{h^2}{a^2}(t-t_0)^2+4}$$

$$K_{41}(t,t_0)=\frac{(1-t_0)}{\frac{h^2}{a^2}(1-t)^2+(1+t_0)^2},\quad K_{42}(t,t_0)=\frac{(1+t_0)}{\frac{h^2}{a^2}(1+t)^2+(1+t_0)^2}$$

$$K_{21}(t,t_0)=K_{12}(t,t_0),\qquad K_{43}(t,t_0)=K_{34}(t,t_0) \tag{3.9}$$

Для приближенного решения уравнения (3.8) интеграл, входящий в уравнение, заменим квадратурной формулой Гаусса порядка n, согласно которой [7]

$$\int_{-1}^{1} F(t)\,dt=\sum_{i=1}^{n} A_i F(t_i) \tag{3.10}$$

где точки $t_1,t_2,\ldots,t_n$ - нули соответствующего полинома Лежандра

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)\right]\qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

а $A_1,A_2,\ldots,A_n$ - соответствующие коэффициенты Гаусса.

В данном случае для вычисления интеграла общего вида

$$\int_a^b F(x)\,dx$$

сделав замену переменной

$$x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t$$

получим

$$\int_a^b F(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\Phi(t)\,dt$$

$$\Phi(t)=F\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t\right) \tag{3.11}$$

Последний интеграл вычисляем по трехточечной формуле Гаусса

$$\int_{-1}^{1}\Phi(t)\,dt=A_1\Phi(z_{-1})+A_2\Phi(0)+A_3\Phi(z_1) \tag{3.12}$$

где $z_{-1}=-\sqrt{3/5},\ z_1=\sqrt{3/5},\ A_1=A_3=5/9,\ A_2=8/9.$

Разделив в интегральном уравнении (3.8) отрезок $(-1,1)$ на $2N$ частей точками $-1=x_{-n}<x_{-n+1}<\ldots<x_0=0<\ldots<x_n=1,\ (x_k=-x_{-k})$, применим к каждому интегралу

$$I_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k} K(t,t_0)\,\varphi(t_0)\,dt_0$$

формулу (3.12), $(a=t_{k-1},\ b=t_k)$.

В результате придем к системе алгебраических уравнений порядка $6N$

относительно матрицы $\{\varphi(z_p)\}$, где z_p пробегает построенную указанным образом сетку узлов Гаусса $(p=1,2,\dots,6N)$.

Таким образом, матрица полученной системы будет иметь вид

$$A=\left\|A_{ij}\right\|_{i,j=1}^{6N} \tag{3.13}$$

где (4×4)- блока A_{ij} имеют вид

$$A_{ii}=E, \quad (E-\text{единичная матрица}),$$

$$A_{ij}=B_{ij}K(z_i,z_j) \quad (i\neq j)$$

где B_{ij} - соответствующие коэффициенты.

Имея ввиду объем оперативной памяти в компьютере, можем производить расчеты для $N=1,2,3,4$.

Обратив внимание на вид функций $K_{ij}(t,t_0)$, замечаем, что основная их часть имеет сингулярности в некоторых из точек $(t,t_0)=(-1,1)$. Например, функции K_{13} и K_{31} на линии $t=1$ равны $1/(1-t_0)$, т. е. не интегрируемы на $t_0\in[-1,1]$. Поэтому, естественно, что сеть дискретизации $\{z_k\}\in[-1,1]$ выгодно выбирать неравномерную, сгущающуюся у концов отрезка $[-1,1]$. Будем исходить из разбиения

$$x_k=\pm\left|\frac{k}{h}\right|^a, \quad 0<a<1, \quad k=0,1,\dots,N$$

Значение a в дальнейшем оптимизируем согласно данным численного эксперимента.

Из (3.2) искомые значения $\partial u/\partial x=H_1$ и $\partial u/\partial y=H_2$ (в приложениях представляющие искомые значения соответствующих компонент магнитных полей $\boldsymbol{H}^0$ и $\boldsymbol{h}$), которые были использованы в предыдущем пункте при решении задачи устойчивости, восстанавливаются по формулам

$$H_1=-\left[\int_{-1}^{1}\frac{(t-t_0)\varphi_1(t_0)\,dt_0}{(t-t_0)^2+\frac{h^2}{a^2}(t-1)^2}+\int_{-1}^{1}\frac{(t-t_0)\varphi_2(t_0)\,dt_0}{(t-t_0)^2+\frac{h^2}{a^2}(t+1)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{h}{a}\int_{-1}^{1}\frac{(t-1)\varphi_3(t_0)\,dt_0}{(t-1)^2+\frac{h^2}{a^2}(t-t_0)^2}+\frac{h}{a}\int_{-1}^{1}\frac{(t+1)\varphi_4(t_0)\,dt_0}{(t+1)^2+\frac{h^2}{a^2}(t-t_0)^2}\right] \tag{3.14}$$

$$H_2 = -\left[\frac{h}{a}\int_{-1}^{1}\frac{(t-1)\varphi_1(t_0)\,dt_0}{(t-t_0)^2+\frac{h^2}{a^2}(t-1)^2}+\frac{h}{a}\int_{-1}^{1}\frac{(t+1)\varphi_2(t_0)\,dt_0}{(t-t_0)^2+\frac{h^2}{a^2}(t+1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{h^2}{a^2}\int_{-1}^{1}\frac{(t-t_0)\varphi_3(t_0)\,dt_0}{(t-1)^2+\frac{h^2}{a^2}(t-t_0)^2}+\frac{h^2}{a^2}\int_{-1}^{1}\frac{(t-t_0)\varphi_4(t_0)\,dt_0}{(t+1)^2+\frac{h^2}{a^2}(t-t_0)^2}\right] \tag{3.15}$$

Если в формулах (3.14) и (3.15) $t \neq 1$, квадратурные формулы строятся по схеме п. 2. В противном случае в формулах (3.14) и (3.15) появляются сингулярные интегралы вида

$$I = \int_{-1}^{1}\frac{F(t)}{(x-t)}\,dt$$

которые, следуя известным рекомендациям [8] эффективно представляется по формуле трапеций

$$I = h\left[\frac{F(t_0)}{2(x_0-t_0)}+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{F(t_i)}{x_i-t_i}+\frac{F(t_N)}{2(x_N-t_N)}\right]$$

где t_k-точки равномерной сети $t_k \in \left\{\pm\frac{k}{N}\right\}$, $k=0,1,\ldots,N$, а $x_k \in \left\{\pm\frac{k+1/2}{N}\right\}$.

Для того, чтобы применить эту схему в данном случае, надо значения $\varphi(t)$, найденные при решении системы с матрицей (3.13) на гауссовой сети, пересчитать на равномерной сети $t_k \in \left\{\pm\frac{k}{N}\right\}$. Для этого снова воспользуемся системой (3.7), применив те же гауссовы квадратурные формулы, но уже при $t \in \left\{\pm\frac{k}{N}\right\}$.

В заключение отметим, что на основании тестовых экспериментов при расчетах на сети вида $x_k = \left\{\pm\left(\frac{k}{N}\right)^{\alpha}\right\}$, $k=0,1,\ldots,N$ параметр α выбран равным $\alpha = 0.6$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д. , Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред, М. : Наука, 1982. 624 с.

2. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. - М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. -Л. -М. : Гостехиздат, 1948. 212 с.
4. *Амбарцумян С. А. , Багдасарян Г. Е. , Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. - ПММ, 1973, т. 37, вып. 1, 114-130 с.
5. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. -М.: Физматгиз, 1963. 879с.
6. *Тихонов А. Н. , Самарский А. А.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. 736 с.
7. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.- М. : "Наука", 1974.
8. *Лифонов И. К.* Квадратурные формулы и формула Пуанкаре-Бертрана для сингулярных интегралов. - Сиб. мат. журнал, 1980, т. 21, №6, 46-60 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
9.08.1993