

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Амбарцумян С.А., Белубекян М.В., Минасян М.М.

Համարաձույան Մ. Ա., Բելուբեկյան Մ. Վ., Մինասյան Մ. Մ.

Ոչ գծային առանցական թաղանթի առանցքա-սիմետրիկ
փափրանումները երկայնական մագնիսական դաշտում

Դիտարկվում է շրջանային զանային էլեկտրամագնիսական թաղանթի մագնիսաառանցական փափրանումները: Շտամմաստիտության էինքում դրված են բարակ մաթեմատիկական մագնիսաառանցականության վարկածը և լարումների ու դեֆորմացիաների ինտենսիվությունների միջև ոչ գծային կապի առկայությունը: Կիրառվել է Քուրան-Գալերկինի մեթոդը ըստ փափրամական փոփոխականի և ինտեգրման ասինգլյուբրական մեթոդները ըստ ժամանակի: Ցույց է տրված, որ մագնիսական դաշտի ուժեղացումը լուծի հաստատուն ազդեցության բնույթ փափրանումների համախոսության վրա: Բազանապակել է, որ ուժեղ մագնիսական դաշտերում առաջանում են բարձր համախոսության փափրանումներ, որոնք ունեն զուտ մագնիսական բնույթ:

S.A. Ambartsumian, M.V. Belubekian, M.M. Minassian

The axially-symmetrical vibrations of non-linear elastic shells in longitudinal magnetic field

Применяется метод Бубнова-Галеркина по пространственным координатам и асимптотические методы интегрирования по времени. Исследовано линейное приближение для определения значений параметров (интенсивность магнитного поля и параметр электропроводности), при которых эффект нелинейности будет значительным. Показано, что непрерывное увеличение интенсивности магнитного поля имеет изменяющийся характер влияния на частоту колебаний. Выявлено, что для сильных полей возникают чисто магнитные, не зависящие от упругих свойств материала, высокочастотные колебания.

Получены пороговые значения параметров, установлены оценки для учета нелинейности и выведены упрощенные уравнения для колебательных мод. Определены амплитудно-частотные характеристики нелинейных свободных колебаний.

1. Исходные предположения и уравнения. Рассматривается нелинейно-упругая электропроводящая (с конечной электропроводностью σ) круговая цилиндрическая оболочка (с радиусом кривизны R и толщины h) в продольном магнитном поле напряженности B_0 .

Предполагается, что средняя поверхность оболочки отнесена к ортогональной системе координат α, β , совпадающими с линиями кривизны поверхности, т.е. с прямолинейными образующими $\beta = \text{const}$ и с направляющими дугами $\alpha = \text{const}$. Прямолинейная координата γ направлена по нор-

мали к срединной поверхности. В осесимметричной задаче все функции зависят лишь от координаты α и времени t .

В основе исследования лежат следующие предположения и упрощения:

а) принимается гипотеза магнитоупругости тонких тел [1], согласно которой для отличной от нуля тангенциальной компоненты возбужденного в оболочке электрического поля и нормальной компоненты магнитного поля имеет место соответственно

$$e_2 = \Psi(\alpha, t), \quad h_3 = f(\alpha, t) \quad (1)$$

б) если λ - длина полуволны изгибных упругих колебаний, то отношение λ/R считается малым в той степени, что становится приемлемым способом приведения общей трехмерной задачи путем магнитоупругости тонких тел к двумерной задаче введения пограничного слоя [1,2]. В силу такого предположения для внешней задачи получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \diamond(h_1^+ - h_1^-) &= \frac{2}{\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \\ \diamond(h_1^+ + h_1^-) &= 0, \quad \left(\diamond = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

где h_1^\pm - значения тангенциальных компонент возбужденного магнитного поля на внешних поверхностях оболочки, c - электродинамическая постоянная ($c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек);

в) принимается гипотеза недеформируемых нормалей [3], в силу чего для компонент тензора деформаций имеем:

$$\begin{aligned} e_\alpha &= \epsilon_1 + \gamma \chi_1, & e_\beta &= \epsilon_2, \\ e_{\alpha\beta} &= 0, & e_{\alpha\gamma} &= 0, & e_{\beta\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

где, при отсутствии осевой силы ($T_\alpha = 0$) [4,5]

$$\epsilon_1 = -\frac{w}{2R}, \quad \epsilon_2 = \frac{w}{R}, \quad \chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \quad (4)$$

а w - нормальное перемещение оболочки;

г) материал оболочки считается несжимаемым, т.е.

$$e_\gamma = -e_\alpha - e_\beta \quad (5)$$

д) направляющие тензоров напряжений и деформаций совпадают.

Это допущение с учетом (3) и (5) позволяет получить следующие приближенные представления для напряжений [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \frac{4}{3} \frac{T_i}{E_i} \left(e_{\alpha} + \frac{1}{2} e_{\beta} \right), & \tau_{\alpha\beta} &= 0, & \tau_{\alpha\gamma} &= 0 \\ \sigma_{\beta} &= \frac{4}{3} \frac{T_i}{E_i} \left(e_{\beta} + \frac{1}{2} e_{\alpha} \right), & \tau_{\beta\gamma} &= 0, & \sigma_{\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

е) между интенсивностью напряжений T_i и интенсивностью деформаций E_i существует нелинейная связь в виде [5-7]

$$T_i = aE_i + bE_i^m \quad (7)$$

где m , a и b - постоянные, характеризующие материал оболочки, которые определяются из опыта при испытании материала на простое растяжение.

В рассматриваемом случае для интенсивности деформаций имеем [4,5]

$$E_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_{\alpha}^2 + e_{\alpha}e_{\beta} + e_{\beta}^2} \quad (8)$$

Согласно (3)-(8) для отличных от нуля напряжений получаем [5-7]

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \frac{4}{3} \gamma \chi_1 \left[a + b \left(\varepsilon_2^2 + \frac{4}{3} \gamma^2 \chi_1^2 \right)^{\frac{m-1}{2}} \right], \\ \sigma_{\beta} &= \left(\varepsilon_2 + \frac{2}{3} \gamma \chi_1 \right) \left[a + b \left(\varepsilon_2^2 + \frac{4}{3} \gamma^2 \chi_1^2 \right)^{\frac{m-1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения движения оболочки представим в виде [3,4,5]

$$\begin{aligned} -\frac{T_{\beta}}{R} + \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \alpha} &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left(1 + \frac{\gamma}{R} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} d\gamma - \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left(1 + \frac{\gamma}{R} \right) K_3 d\gamma \\ \frac{\partial M_{\alpha}}{\partial \alpha} - N_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho \gamma \left(1 + \frac{\gamma}{R} \right) \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial t^2} d\gamma \end{aligned} \quad (10)$$

где для внутреннего усилия T_{β} и изгибающего момента M_{α} имеем обычные представления:

$$T_{\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\beta} d\gamma, \quad M_{\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \gamma \sigma_{\alpha} d\gamma \quad (11)$$

В (10) ρK_3 - компонента объемной силы электромагнитного происхождения, отнесенная к единице объема тела, ρ - плотность материала оболочки, N_{α} - поперечное усилие, u_{α} - компонента тангенциального перемещения оболочки. Производными по времени от u_{α} пренебрегаем.

Объемная сила электромагнитного происхождения, вызванная движением оболочки в магнитном поле определяется формулой [1,2]

$$\rho K_3 = -\frac{\sigma B_0}{c} e_2 - \frac{\sigma B_0^2}{c^2} \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{B_0}{c} \sigma \left(\psi + \frac{B_0}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (12)$$

Уравнение внутренней задачи магнитоупругости имеет вид [1,2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha} &= \frac{h_1^+ - h_1^-}{h} - \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\psi + \frac{B_0}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Из совместного рассмотрения уравнений движения оболочки (10) систем уравнений для внешней (2) и внутренней (13) задач, после серий преобразований с учетом вышеприведенных формул и соотношений приходим к следующей системе исходных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial \alpha^2} - \frac{T_\beta}{R} &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{B_0^2 \sigma h}{c^2} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{B_0 \sigma h}{c} \psi \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{2}{\lambda h} \psi &= \frac{4\pi\sigma B_0}{c^3} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (14)$$

Исключая из системы (14) функцию ψ и введя безразмерные переменные

$$x = \frac{\alpha}{l}, \quad \xi = \frac{a_0 t}{h}, \quad W = \frac{w}{h} \quad (15)$$

получим уравнение для $W(x, \xi)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \mu_0 L_1 \right) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} L_2[W] + L_3[W] + L_4[W] \right\} + \nu_0^2 \frac{\partial}{\partial \xi} L_1[W] = 0 \quad (16)$$

где линейные операторы L_1 , L_2 и L_3 имеют виды

$$L_1 = \frac{2h}{\lambda} - \left(\frac{h}{l} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_2 = 1 - \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_3 = \left(\frac{h}{R} \right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{h}{l} \right)^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \quad (17)$$

а L_4 - нелинейный оператор

$$L_4[W] = \frac{1}{2} \frac{b}{a} \int_{-1}^1 \left[\frac{z^2}{3} \left(\frac{h}{l} \right)^4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right] \left[W^2 \left(\frac{h}{R} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{l} \right)^4 z^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} dz$$

Безразмерные параметры μ_0 и ν_0^2 определены в виде

$$\mu_0 = \frac{c^2}{4\pi\sigma a_0 h}, \quad \nu_0^2 = \frac{b_0^2}{a_0^2} \quad (18)$$

где $a_0 = \sqrt{\frac{a}{\rho}}$ - характерная упругая скорость "звука", а $b_0 = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$ - скорость Альфвена.

2. Свободные колебания оболочки. Рассмотрим свободные колебания оболочки при шарнирном опирании ее краев:

$$\begin{aligned} W(0, \xi) = W_1(1, \xi) = 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Для функции Ψ принимаем следующие граничные условия:

$$\Psi(0, \xi) = \Psi(1, \xi) = 0 \quad (20)$$

Вследствие получим еще два дополнительных условия для

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \Big|_{x=1} = 0 \quad (21)$$

Представляя решение задачи (16), (19), и (21) в виде

$$W(x, \xi) = F(\xi) \sin \pi n x \quad (22)$$

и применяя обычную процедуру метода Галеркина для функции $F(\xi)$, получим уравнение

$$\left(\frac{d}{d\tau} + \mu \right) \left(\frac{d^2 F}{d\tau^2} + F + k |F|^{m-1} F \right) + \gamma^2 \frac{dF}{d\tau} = 0 \quad (23)$$

где

$$\mu = \mu_0 \alpha_1 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}, \quad \gamma^2 = \gamma_0^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \quad \tau = \omega_0 t = \frac{\omega_0 h}{a_0} \xi, \quad \omega_0^2 = \frac{a_0^2}{h^2} \frac{\alpha_3}{\alpha_2}$$

$$\alpha_1 = \frac{2h}{\lambda} + \left(\frac{\pi n h}{l} \right)^2, \quad \alpha_2 = 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\pi n h}{2l} \right)^2, \quad \alpha_3 = \left(\frac{h}{R} \right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{\pi n h}{l} \right)^4$$

$$k = \frac{9}{\pi} \left(\frac{b}{a} \right) \frac{2^{m+1} \Gamma^2 \left(\frac{m}{2} + 1 \right)}{\alpha_3 \Gamma(m+2)} \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{h}{R} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi n h}{l} \right)^4 z^2 \right]^{\frac{m+1}{2}} dz$$

Заметим, что ω_0 является частотой свободных колебаний оболочки без магнитного поля и для линейного материала.

Очевидно, что эффект влияния нелинейности существенно зависит от степени затухания колебаний. При слабом затухании нелинейность сказывается

намного ярче, чем при сильном затухании.

Для выяснения этого вопроса сначала исследуем линейное приближение. Приняв в уравнении (23) $k = 0$, имеем

$$\left(\frac{d}{d\tau} + \mu \right) \left(\frac{d^2 F}{d\tau^2} + F \right) + v^2 \frac{dF}{d\tau} = 0 \quad (24)$$

Для идеального проводника $\mu = 0$. Тогда из (24) получим незатухающие колебания с частотой ω

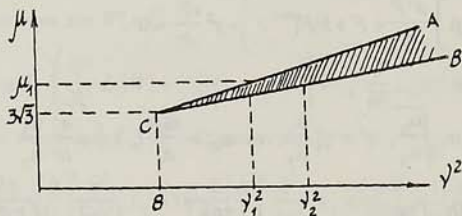
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_m^2}, \quad \omega_m^2 = \frac{b_0^2}{h^2} \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \quad (25)$$

Для непроводящего материала ($\mu \rightarrow \infty$) имеются незатухающие колебания с частотой ω_0 . Исключая эти два крайних случая и представляя решение (25) в виде $F \sim \exp(s\tau)$, получим характеристическое уравнение

$$(s + \mu)(s^2 + 1) + v^2 s = 0 \quad (26)$$

Корни уравнения зависят от знака $\Delta(\mu, v^2)$, где

$$\Delta(\mu, v^2) = \mu^4 + \frac{\mu^2}{4}(8 - 20v^2 - v^4) + (1 + v^2)^3 \quad (27)$$



Фиг. 1

На фиг. 1 показаны области знакопостоянства Δ .

На линиях CA и CB $\Delta = 0$ и уравнение (26) имеет три вещественные корни ($s_1 < 0, s_2 = s_3 < 0$).

В точке $C(8, 3\sqrt{3})$ $s_1 = s_2 = s_3 = -\sqrt{3}$

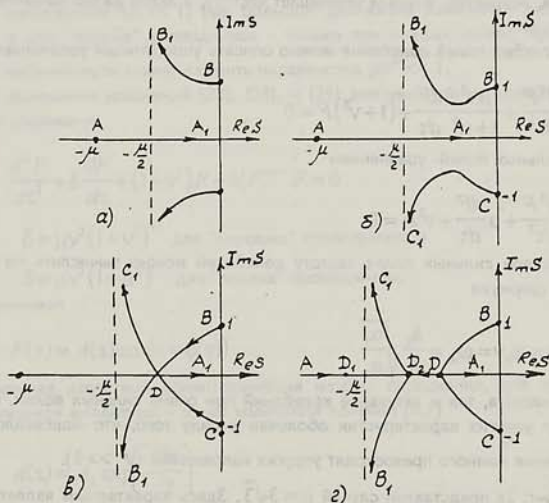
Уравнения линий CA и CB с большой точностью можно представить следующим образом:

$$CA: \mu = 0,5v^2 + 1,2$$

$$CB: \mu = \sqrt{4v^2 - 5}$$

В заштрихованной области ($\Delta < 0$) все корни вещественны, отрицательны и разные. Вне этой области ($\Delta > 0$) один корень вещественный отрицательный, а два других - комплексно сопряженные с отрицательными действительными частями.

Таким образом, существование колебаний зависит от степени проводимости и величины магнитного поля.



Фиг. 2

На фиг. 2 представлены движения корней в комплексной плоскости S по мере возрастания v^2 (магнитного поля) от 0 до ∞ . Точками B, C и A соответствует значение $v^2 = 0$ (отсутствие магнитного поля), а точкам B_1, C_1 и $A_1 - v^2 \rightarrow \infty$ (большие магнитные поля). Ветви BB_1 и CC_1 представляют колебательные движения, а отрезки AA_1 - безколебательные экспоненциальные затухания.

Как видно из фиг. 2, магнитное поле по-разному влияет на характеристики колебаний и это существенно зависит от степени проводимости μ .

Фиг. 1а представляет случай малых значений μ ("хороший проводник").

Здесь возрастание V^2 увеличивает частоту колебаний и одновременно усиливает затухание. При $V^2 \rightarrow \infty$ $\text{Re } s \rightarrow \mu/2$. При $\mu \ll 1$ для всего диапазона изменения V^2 вместо уравнения (24) для колебательных мод можно пользоваться более простым уравнением

$$\frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{\mu V^2}{1+V^2} \frac{dF}{dt} + (1+V^2)F = 0 \quad (28)$$

Фиг. 26 представляет случай конечных $\mu < 3\sqrt{3}$. Как видно, здесь магнитное поле, возрастая, вначале уменьшает частоту, а затем резко начинает увеличивать ее.

Для слабых полей колебания можно описать упрощенным уравнением

$$\frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{\mu V^2}{1+\mu^2} \frac{dF}{dt} + (1+V^2)F = 0 \quad (29)$$

а для сильных полей - уравнением

$$\frac{d^2 F}{dt^2} + \mu \frac{dF}{dt} + V^2 F = 0 \quad (30)$$

Тогда при сильных полях частоту колебаний можно вычислить по упрощенной формуле

$$\omega = \omega_0 V = \omega_m = \frac{b_0}{h} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \quad (31)$$

Как частота, так и затухание колебаний при очень сильных полях, не зависят от упругих характеристик оболочки в силу того, что максвелловские напряжения намного превосходят упругих напряжений ($V^2 \gg 1$).

На фиг. 2в представлен случай $\mu = 3\sqrt{3}$. Здесь характерным является появление точки D , где встречаются все три корня при $V^2 = 8$ (точка C на фиг. 1). В окрестности этой точки имеются низкочастотные колебания с сильным затуханием. Для слабых полей можно также пользоваться уравнением (29), а для сильных полей - уравнением (30).

Фиг. 1д представляет случай больших значений μ ("плохой" проводник). При некотором значении $V^2 = V_1^2$, определяемого из уравнения CA (фиг. 1) колебания в системе исчезают, однако при значении $V^2 = V_2^2$, определяемого из уравнения CB при том же значении $\mu = \mu_1$, колебания снова возникают.

Таким образом, выяснено, что увеличение интенсивности магнитного поля в рамках принятой здесь модели взаимодействия упругого и электромагнитного полей, постоянно усиливая затухание, по-разному влияет на частоту колебаний. Критическое значение магнитного поля, превышение которого при-

водит к подавлению колебаний, определяется из условия $V^2 = 8$, откуда

$$B_0^2 = 32\pi a \sqrt{\left[\left(\frac{h}{R} \right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{\pi h}{l} \right)^4 \right] \left[\frac{2h}{\lambda} + \left(\frac{\pi h}{l} \right)^2 \right]^{-1}} \quad (32)$$

Для реальных упругих материалов такая оценка точки неосуществима и поэтому ограничимся случаем только колебаний при $V^2 < 8$.

Из вышеизложенного анализа линейного приближения следует, что эффект нелинейности материала оболочки может быть ощутимым для "хороших" проводников ($\mu \ll 1$) при большом диапазоне изменения магнитного поля, а для "плохих" проводников - только при слабых полях. Критерием учета нелинейности может служить неравенство $\mu V^2 \ll 1$.

На основании уравнений (23), (28), и (29) для нелинейных колебаний получим уравнения

$$\frac{d^2 F}{d\tau^2} + \delta \frac{dF}{d\tau} + (1 + V^2)F + k|F|^{m-1}F = 0 \quad (33)$$

где $\delta = \mu V^2 (1 + V^2)^{-1}$ для "хороших" проводников и

$\delta = \mu V^2 (1 + \mu^2)^{-1}$ для "плохих" проводников.

Принимая

$$F(\tau) = A(\tau) \cos(\tau + \varphi(\tau)) \quad (34)$$

и применяя известные асимптотические методы осреднения, для медленно меняющихся амплитуды и фазы колебаний получим [6,7]

$$A(\tau) = A_0 \exp\left(-\frac{\delta\tau}{2}\right) \quad (35)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\beta A^{m-1}}{\sqrt{1+V^2}}$$

где

$$\beta = \frac{k}{\pi} \frac{2^{m+1} \Gamma^2\left(1 + \frac{m}{2}\right)}{\Gamma(m+2)}$$

Для частоты колебаний получим

$$\omega^2 = (\omega_0^2 + \omega_m^2) \left(1 + \frac{2\beta A^{m-1}}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_m^2}} \right) \quad (36)$$

Мы рассмотрели наиболее простой случай граничных условий. При иных условиях, хотя и выкладки станут более трудоемкими, однако принципиальные оценки и качественные результаты останутся теми же.

Авторы благодарны за полезные замечания рецензента, который, в частности, обратил наше внимание на работу [8], где рассматривается вопрос распространения изгибных волн в идеально проводящей нелинейно-упругой (по модели Каудерера) пластинке.

Настоящее исследование выполнено по гранту INTAS-94-1210.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.-М.: Наука, 1977. 272 с.
2. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Колебания и устойчивость тонкостенных упругих пластин.- Ереван, Изд. Академия, 1992. 121 с.
3. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек.-М.: Наука, 1974. 1-446 с.
4. Ильющин А.А. Пластичность.-М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
5. Амбарцумян С.А. Об осесимметричной задаче трехслойной цилиндрической оболочки, составленной из нелинейно-упругих материалов.- Изв. АН Арм. ССР, сер. физ-мат. н., 1961, т.14, в.1.
6. Ambartsumian S.A., Belubekian M.V. and Minassian M.M. On the Problem of Vibrations of Non-Linear Elastic Elektroconductive Plates in Transverse and Longitudinal Magnetic Fields.-Int. J. Non-Linear Mechanics, 1983, vol.19, No 2.
7. Ambartsumian S.A., Belubekian M.V. and Minassian M.M. The Problem of Vibration of Current-Carrying Plates.- Int. J. Applied Elektromagnetics in Materials, 1992, No 3.
8. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. Нелинейные колебания пластин в продольном магнитном поле.-Изв.АН Арм ССР, Механика, 1982, т.35, №1, с.16-22

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию
25.10.1993