ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 1, 1995 Механика

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ В УПРУГОМ, ВЯЗКОМ, ДИСПЕРСИОННОМ И ТЕПЛОПРОВОДЯЩЕМ ПЬЕЗОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ

БАГДОЕВ А. Г., ШЕКОЯН А. В

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԱՅԻՆ ՓՆՋԵՐԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ, ՄԱԾՈՒՑԻԿ, ԴԻՍՊԵՐՍԻՈՆ ԵՎ ՋԵՐՄԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ՊՅԵԶՈԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿ ՇԵՐՏՈՒՄ

Ուսումնասիրված է ոչ գծային ալիքային փնջերի տարածումը և անդրադարձումը ազատ մակերևույթից մածուցիկ, դիսպերսիոն, ջերմահաղորդիչ պյեզոդիէլեկտրիկ շերտում։

Նեղ փնջերի համար ստացված են անալիտիկ լուծումներ, ռեզոնանսի պայմանը։

A. G. BAGDOEV, A.V. SHEKOYAN

NONLINEAR WAVE BEAMS IN THE VISCOELASTIC DISPERSIVE AND THERMOCONDUCTING PIEZODIELECTRIC LAYER

Изучено распространение и отражение от свободной поверхности нелинейного гауссовского пучка в вязком дисперсном и теплопроводящем пьезодиэлектрическом слое, который находится в постоянном электрическом поле и предварительно деформирован.

Для узких пучков найдены аналитические решения. Показано, что падающие и отраженные пучки распространяются симметрично. Найдено резонансное условие, ограничивающее толщину слоя.

В настоящее время опубликованы несколько статей, изучающих распространение квазимонохроматической волны в диссипативных дисперсионных пьезодиэлектриках [1, 2]. В этих работах изучено распространение нелинейного пучка упругой волны в бесконечной пьезодиэлектрической среде. Такая постановка дает возможность изучать некоторые особенности самой волны с учетом свойств среды и внешних факторов. Однако бесконечная среда на практике редко осуществляется.

В различных акустических приборах, резонаторах, интерферометрах упругая волна распространяется в слое пьезодиэлектрической среды. В таком слое волна генерируется в одной плоскости, распространяется до другой границы, которая обычно бывает свободной поверхностью, оттуда часть волны отражается, распространяясь в обратном направлении, а другая часть преломляется, переходя в другую среду.

В линейном приближении достаточно изучены законы отражения и преломления упругих волн от свободной границы [3, 4]. Особенности отражения нелинейных волновых пучков изучены очень мало из-за математических трудностей. В этом плане нам известны только две работы [5, 14]. Часто в указанных приборах используют ультразвуковую волну большой интенсивности, которая распространяется в виде пучка. Поэтому представляет практический интерес рассмотреть такую задачу, которая описывается ниже.

1. *Постановка задачи.* Предполагается, что пьезодиэлектрик находится между двумя плоскостями, то есть имеется слой. Координатная система x_1, x_2, x_3 выбрана таким образом, чтобы плоскость $x_3=0$ совпадала с одной из плоскостей, ограничивающих пьезодиэлектрик. Пьезодиэлектрик принадлежит гексагональным или тетрагональным сингониям с симметрией $6mm$ или $4mm$. Ось шестой или четвертой степени симметрии направлена по оси ox_3. Предполагается, что другая плоскость, ограничивающая пьезодиэлектрик, есть $x_3=l$, где заданы продольные перемещения в виде гауссового пучка. Они создают пучок нелинейной квазимонохроматической, квазипродольной волны, который распространяется вдоль оси x_3 в направлении к плоскости $x_3=0$. Ось x_3 направлена в обратную сторону распространения волны. Предполагается, что плоскость $x_3=0$ свободная, так что напряжения на ней равны нулю.

Предполагается, что пьезодиэлектрик находится во внешнем постоянном электрическом поле E_3^0, направленном по оси симметрии, которое создает в среде постоянные напряжения или постоянные деформации.

Уравнения движения в проекции на оси x_1, x_2 берутся линейными, поэтому указанные постоянные деформации в уравнения возмущений не войдут. Что касается уравнения в проекции на ось x_3, то в него войдут нелинейные члены, наибольшие по порядку слагаемые, содержащие $\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}$ [12, 13].

Предполагается, что среда однородная, но в ней есть маленькие неоднородности типа шариков. Концентрация шариков p мала. Размеры неоднородностей меньше характерной длины волны. В ультразвуковом диапазоне это приводит к очень малым размерам шариков, соизмеримым с размерами примесей, которые всегда существуют в не очень чистых кристаллах. Размеры шариков гораздо меньше длины волны, тогда шарики под действием упругой волны, как внешней силы, колеблются вокруг точек, в которых они находились до распространения упругой волны. В результате, упругая волна распространяется с малой дисперсией и дополнительной малой диссипацией.

Аналогичная модель для композитной среды описана в книге [7]. В нашем случае эта модель обобщается для среды с пьезосвойствами.

Нелинейная интенсивная упругая волна сильно поглощается, поэтому, в объеме занимаемой волны среда нагревается. Следовательно, следует учитывать тепловые эффекты. Они малы и нелинейные термические эффекты пренебрегаются.

Уравнения, описывающие поведение нелинейной волны в пьезодиэлектриках с вышеуказанными условиями, состоят из системы уравнений Максвелла, уравнений теории упругости, колебания шариков и уравнения теплопроводности. Уравнения этой системы предварительно упрощаются методом, описанным в статьях [1, 6, 12, 13]. В итоге они принимают следующий вид:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_n \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + c_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - e_{15} \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - e_{31} \frac{\partial E_3}{\partial x_1} - \gamma_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \qquad (1.1)$$

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c_n \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + c_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} - e_{15} \frac{\partial E_2}{\partial x_3} - e_{31} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \gamma_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x_2}, \qquad (1.2)$$

$$\rho_2 p \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + (1-p)\rho_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = c_n \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + c_{44}\Delta_\perp u_3 + c'_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} -$$

$$- e_{15}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2}\right) + b\frac{\partial E_3}{\partial x_3} - a_{33}E_3 \frac{\partial E_3}{\partial x_3} + (3c_{33} + C_{333})\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} +$$

$$+ \eta_{33}\frac{\partial^3 u_3}{\partial t \partial x_3^2} - \gamma_{33}\frac{\partial \theta}{\partial x_3}, \qquad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + 2q\frac{\partial}{\partial t}(u_n - u_3) + \Omega^2(u_n - u_3) = 0, \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_3} = 0 \qquad (1.5)$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} = 0 \qquad (1.6)$$

$$\varepsilon_{11}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{2}(e_{15} + e_{31})\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{2}e_{15}\Delta_\perp u_3 + \varepsilon'_{33}\frac{\partial E_3}{\partial x_3} +$$

$$+ b\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + (a_{33} - \varepsilon_{33})\frac{\partial E_3}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + a_{33}E_3\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = 0 \qquad (1.7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma_{33}Tc^{-1}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t \partial x_3} = \chi\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \qquad (1.8)$$

где $c'_{33} = c_{33} + (3c_{33} + C_{333})\frac{\partial \varphi_3^0}{\partial x_3}$, $\varepsilon'_{33} = \varepsilon_{33} + a_{33}\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$, $c_n = c_{13} + c_{44}$, ρ_1 и ρ_2 — плотности среды и шарика, c_{ij}, C_{ijk}, e_{ik}, a_{ik}, η_{ik}, γ_{ik} — соответственно, модули линейной и нелинейной упругости, пьезомодуль, тензоры диэлектрической проницаемости, электрострикции коэфициентов вязкости и термичности, c — теплоемкость единицы объема среды, χ — коэффициент температуропроводности, $\theta = T_0 - T$, T — начальная однородная, а T_0 — текущая температура среды, $b = e_{33} + a_{33}E_3^0$, $q = \frac{9}{2}\rho_1\rho_2^{-1}(2w^3 +$

$+1)(2w^2+1)^{-2}$, $\Omega^2=9\rho_3\rho_2^{-1}v^2l_0^{-2}(2w^2+1)^{-1}$, $w=vv_1^{-1}$; v, v_1—соответственно, линейные скорости продольной и поперечной упругой волны, l_0—радиус шарика, u_i—компоненты вектора смещения, E_i—компоненты вектора электрического напряжения, u_n—смещение шарика, $\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

В уравнениях (1.3) и (1.7) учтены упругая, геометрическая, электроупругая и электрическая нелинейности. В уравнениях (1.3) и (1.7) множители $1+\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$ заменены единицей в силу малости $\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$. При выводе уравнений (1.1)–(1.7) используется система лагранжевых переменных. Основной по порядку величины является компонента скорости $\frac{\partial u_3}{\partial t}$ и электрического поля E_3, вдоль оси x_3. Из $\sigma_{3i}^0=0$ $i=1, 2, 3$, полагая $\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}=0$, i, $j\neq 3$, получится $E_3^0=c_{33}e_{33}^{-1}\ \frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$.

3. *Вывод уравнений коротких волн.* Волна, которая генерируется в плоскости $x_3=l$, распространяется до свободной поверхности $x_3=0$ и отражается. Таким образом, в пьезодиэлектрике существуют два волновых поля—падающее и отраженное.

Все функции в системе уравнений (1.1)—(1.7) будут представлены в виде сумм двух величин, из которых однократно штрихованная соответствует падающей волне, а другая—двукратно штрихованная—отраженной. Легко выдеть, что все линейные уравнения будут расщеплены на два новых независимых уравнения для падающей и отраженной волны. Согласно работам [8, 9, 10, 11] нелинейные уравнения в первом приближении также можно расщепить на 2 новых нелинейных независимых уравнения. Таким образом, получаются две новые независимые системы уравнений типа (1.1)—(1.8) для падающей и отраженной волны. Это означает, что в среде образованы два независимых нелинейных волновых пучка, распространяющихся друг против друга. По закону суперпозиции они налагаются, создавая нелинейные стоячие волны. Пучки падающих и отраженных волн влияют друг на друга через граничные условия.

В систему уравнений с однократно штрихованными функциями введем новую координату $\tau_1=\tau-t+\frac{l}{v}$, где $\tau=-x_3v^{-1}$, v—линейная скорость волны, имеющая следующий вид:

$$v^2=\rho_1^{-1}(c_{33}+\gamma^2Tc^{-1}+b^2\varepsilon_{33}^{-1})$$

Упрощая эту систему дифференциальных уравнений обычной процедурой, как в статьях [1, 2, 6], и исключая последовательно функции для величины $\psi_1=\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}$, получится следующее уравнение коротких волн:

ние уравнения (3.2) можно искать в виде квазимонохроматической волны, имеющей следующий вид:

$$\psi_{1,2}=\frac{1}{2}\{A_{1,2}(\tau_{1,2},t)\exp[i\alpha\tau_{1,2}-(i\omega+\nu)t]+$$

$$+B_{1,2}(\tau_{1,2},t)\exp[2i\alpha\tau_{1,2}-2(i\omega+\nu)t]+\text{к.с.}\} \tag{4.1}$$

где α—основная частота; ω—прекращение частоты за счет малых дисперсий; $A_{1,2}$, $B_{1,2}$—медленно меняющиеся амплитуды первой и второй гармоник; ν—коэффициент поглощения.

Вычисляя производные от (4.1), подставляя в (3.2), приравнивая к нулю коэффициенты у экспонент первой и второй гармоник, можно получить уравнения для $A_{1,2}$, $B_{1,2}$.

Считается, что основной по порядку в (4.1) являются $A_{1,2}$, а $B_{1,2}$—малые более высокого порядка, которые появляются за счет нелинейностей. Приравнивая к нулю наибольшие по порядку недифференцируемые члены в уравнении для первой гармоники, получится уравнение линейной дисперсии и затухания:

$$\omega=-N\alpha^3v^{-1},\quad \nu=H\alpha^4v^{-1}-D\alpha^2v^{-1} \tag{4.2}$$

При выполнении неравенств $\omega\tau\gg 1$ и $\omega\ll\alpha$, в уравнении для $B_{1,2}$ можно пренебречь производным, в результате получится алгебраическое уравнение. Для изучения падающей и отраженной волны следует использовать координаты τ_1 или τ_2, соответственно. Ясно, что выражения (4.2) справедливы для обеих волн.

Уравнение модуляции будет изучено в стационарном случае. В этом случае от координат t и $\tau_{1,2}$ переходим к медленной координате τ, тогда для падающей волны будет $\dfrac{\partial}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial\tau_1}=\dfrac{\partial}{\partial\tau}$, а для отраженной волны $\dfrac{\partial}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial\tau_2}=-\dfrac{\partial}{\partial\tau}$. Однако после ввода координат $\tau'=-\tau$ для отраженной волны будет $\dfrac{\partial}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial\tau_2}=\dfrac{\partial}{\partial\tau'}$ и уравнения модуляции для отраженных и падающих волн совпадут. Исключая функцию $B_{1,2}$ и после некоторых преобразований коэффициентов с учетом (4.2), уравнение модуляции примет следующий вид:

$$\left(i\alpha+3i\omega+2\nu+\frac{2H\alpha^2}{v}\right)\frac{\partial A_{1,2}}{\partial\tau}-\frac{1}{2}L(A_{1,2})=\Gamma^2\alpha^4\left[2v^2\left(4i\alpha\nu-12\alpha\omega+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{24iH\alpha^5}{v}\right)\right]^{-1}|A_{1,2}|^2A_{1,2}\exp(-2\nu t) \tag{4.3}$$

В уравнении (4.3) для отраженной волны τ надо заменить на τ'.

Записывая $A_{1,2}=a_{1,2}\exp(i\varphi_{1,2})$, где $\varphi_{1,2}$—эйконал, а $a_{1,2}$—действительная амплитуда, подставляя в уравнение (4.3), отделяя мнимые и действительные части и переходя к цилиндрическим координатам, получим два уравнения для эйконала и амплитуды.

ние уравнения (3.2) можно искать в виде квазимонохроматической волны, имеющей следующий вид:

$$\psi_{1,2}=\frac{1}{2}\{A_{1,2}(\tau_{1,2},t)\exp[i\alpha\tau_{1,2}-(i\omega+\nu)t]+$$
$$+B_{1,2}(\tau_{1,2},t)\exp[2i\alpha\tau_{1,2}-2(i\omega+\nu)t]+\text{к.с.}\} \tag{4.1}$$

где α—основная частота; ω—прекращение частоты за счет малых дисперсий; $A_{1,2}$, $B_{1,2}$—медленно меняющиеся амплитуды первой и второй гармоник; ν—коэффициент поглощения.

Вычисляя производные от (4.1), подставляя в (3.2), приравнивая к нулю коэффициенты у экспонент первой и второй гармоник, можно получить уравнения для $A_{1,2}$, $B_{1,2}$.

Считается, что основной по порядку в (4.1) являются $A_{1,2}$, а $B_{1,2}$—малые более высокого порядка, которые появляются за счет нелинейностей. Приравнивая к нулю наибольшие по порядку недифференцируемые члены в уравнении для первой гармоники, получится уравнение линейной дисперсии и затухания:

$$\omega=-N\alpha^3 v^{-1}, \quad \nu=H\alpha^4 v^{-1}-D\alpha^2 v^{-1} \tag{4.2}$$

При выполнении неравенств $\omega\tau\gg1$ и $\omega\ll\alpha$, в уравнении для $B_{1,2}$ можно пренебречь производным, в результате получится алгебраическое уравнение. Для изучения падающей и отраженной волны следует использовать координаты τ_1 или τ_2, соответственно. Ясно, что выражения (4.2) справедливы для обеих волн.

Уравнение модуляции будет изучено в стационарном случае. В этом случае от координат t и $\tau_{1,2}$ переходим к медленной координате τ, тогда для падающей волны будет $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\tau_1}=\frac{\partial}{\partial\tau}$, а для отраженной волны $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\tau_2}=-\frac{\partial}{\partial\tau}$. Однако после ввода координат $\tau'=-\tau$ для отраженной волны будет $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\tau_2}=\frac{\partial}{\partial\tau'}$ и уравнения модуляции для отраженных и падающих волн совпадут. Исключая функцию $B_{1,2}$ и после некоторых преобразований коэффициентов с учетом (4.2), уравнение модуляции примет следующий вид:

$$\left(i\alpha+3i\omega+2\nu+\frac{2H\alpha^2}{v}\right)\frac{\partial A_{1,2}}{\partial\tau}-\frac{1}{2}L(A_{1,2})=\Gamma^2\alpha^4\left|2v^2(4i\alpha\nu-12\alpha\omega+\right.$$
$$\left.+\frac{24iH\alpha^5}{v}\right)\Big|^{-1}|A_{1,2}|^2A_{1,2}\exp(-2\nu t) \tag{4.3}$$

В уравнении (4.3) для отраженной волны τ надо заменить на τ'.

Записывая $A_{1,2}=a_{1,2}\exp(i\varphi_{1,2})$, где $\varphi_{1,2}$—эйконал, а $a_{1,2}$—действительная амплитуда, подставляя в уравнение (4.3), отделяя мнимые и действительные части и переходя к цилиндрическим координатам, получим два уравнения для эйконала и амплитуды.

Уравнения для эйконала и амплитуды преобразовываются следующими выражениями:

$$a_{1,2}=b_{1,2}f_{1,2}^{-1}\exp\left[-\frac{1}{2}r^2(r_{1,2}f_{1,2})^{-2}\right],\quad \varphi_{1,2}=\sigma_{1,2}(\tau)+\frac{1}{2}r^2R_{1,2}^{-1}(\tau) \qquad (4.4)$$

где $f_{1,2}$—безразмерная ширина пучка, $\sigma_{1,2}$—набег фазы на оси пучка и $R_{1,2}$—переменный радиус кривизны $b_{1,2}$ и $r_{1,2}$ амплитуды и радиус пучка на границах. Здесь индекс один соответствует падающей волне, а индекс 2—отраженной. Подставляя (4.4) в систему уравнений для $\varphi_{1,2}$ и $a_{1,2}$ обычным образом [4, 2, 6],получим уравнения для $f_{1,2}$, $\sigma_{1,2}$, $R_{1,2}$. Они имеют следующий вид:

$$\frac{d\sigma_{1,2}}{d\tau}=Gf_{1,2}^{-2} \qquad (4.5)$$

$$R_{1,2}^{-1}=\frac{1}{2}\alpha(1-3\xi)L_1^{-1}f_{1,2}^{-1}\frac{df_{1,2}}{d\tau}+\frac{1}{2}\varkappa_2 b_{1,2}^2\alpha^{-1}f_{1,2}^{-2} \qquad (4.6)$$

$$\frac{d^2f_{1,2}}{d\tau^2}=Mf_{1,2}^{-3} \qquad (4.7)$$

где $\varkappa_1=3\zeta\alpha^2\xi$, $\varkappa_2=-\zeta(\nu+6H\alpha^4v^{-1})$, $G=[-2L\alpha^{-1}r_{1,2}^{-2}-\varkappa_1b_{1,2}\alpha^{-1}](1-3\xi)^{-1}$

$$M=4L_1\alpha^{-1}(1-3\xi)^{-2}\left[\frac{\varkappa_2^2}{4}b_{1,2}^2\frac{\alpha^{-1}}{L_1}+\varkappa_1b_{1,2}^2\alpha^{-1}r_{1,2}^{-2}+L_1\alpha^{-1}r_{1,2}^{-4}\right]$$

$$\zeta=\frac{1}{8}\Gamma^2v^{-2}\left[9\xi^2+\left(\frac{\nu}{\alpha}+6H\alpha^3v^{-1}\right)^2\right]\exp(2\nu t)$$

$\xi=-\dfrac{\omega}{\alpha}$, L_1—коэффициент в операторе L, стоящем перед лапласианом $\Delta_\perp$.

5. *Граничные условия.* Из постановки задачи ясно, что должно быть два граничных условия. Первое из них задается в плоскости $x_3=l$ и относится к падающей волне. Предполагается, что в этой плоскости задается пучок с гауссовским профилем и выполняются следующие условия:

$$f_1(l)=1,\quad \frac{df_1(l)}{d\tau}=F,\quad \sigma_1(l)=0\quad F=\frac{2L_1}{\alpha(1-3\xi)}\left[\frac{\varkappa_2}{2}b_1^2-R_1^{-1}(l)\right. \qquad ((.1)$$

Итак, уравнения (4.5)—(4.7) с индексами один у искомых функций следует решить с граничными условиями (5.1).

Второе граничное условие задается в плоскости $x_3=0$. Эта плоскость предполагается свободной, то есть напряжения $\sigma_{13}=\sigma_{23}=\sigma_{33}=0$. Будем ограничиваться наивысшими порядками в этих уравнениях, так как ограничиваемся изучением пучка квазипродольных волн. В наибольших порядках уравнения $\sigma_{13}=\sigma_{23}=\sigma_{33}=0$ расщепляются, то есть отделяются условия, которые относятся к поперечным и продольным волнам. Напряжения σ_{13}, σ_{23}, σ_{33} состоят из двух слагаемых: постоянных, обусловленных электрическим напряжением E_3^0, и переменных, обусловленных волной. Когда переменные слагаемые напряжений—нули (волновой процесс еще не начался), то постоянные слагаемые тоже будут нулями, так как требуется, чтобы в плоскости $x_3=0$ напряжения были нулями. Тогда в наивысшем порядке уравнение $\sigma_{33}=0$ дает

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0 \tag{5.2}$$

В наивысшем порядке $\sigma_{13}=\sigma_{23}=0$ выполняются автоматически.

Подставляя в (5.2) $u_3=u_3'+u_3''$, переходя в выражениях $\psi_1=\frac{\partial u_3'}{\partial\tau_1}$ и $\psi_2=-\frac{\partial u_3''}{\partial\tau_2}$ от координат τ_1, τ_2 к x_3, учитывая $\frac{\partial}{\partial x_3}=\pm v^{-1}\frac{\partial}{\partial\tau_{1,2}}$, получится следующее граничное условие:

$$\psi_1=-\psi_2 \text{ при } x_3=0 \tag{5.3}$$

Подставив в уравнениях (5.3) решение (4.1) при $\tau=0$, ограничиваясь первой гармоникой, получим $A_1=-A_2$ при $\tau=0$. Подставим в последнем равенстве эйкональное решение, а потом—соотношения (4.4), получим, что $\sigma_1(0)=\sigma_2(0)$, $f_1(0)=f_2(0)$, $R_1(0)=R_2(0)$.

Из последних двух равенств при учете выражения (4.6) для $R_{1,2}$ нетрудно видеть, что выполняется также $\frac{df_{1,2}(0)}{d\tau}=0$ Окончательно, для граничных условий в плоскости $x_3=0$ получатся следующие соотношения:

$$h_1=-h_2,\ f_1(0)=f_2(0),\ R_1(0)=R_2(0),\ \sigma_1(0)=\sigma_2(0),\ \frac{df_{1,2}(0)}{d\tau}=0 \tag{5.4}$$

Уравнения (4.5)—(4.7) с индексами два следует решать с граничными условиями (5.4).

6. *Решения уравнения (4.5)—(4.7).* Сперва решим уравнения (4.7) и (4.5) с граничными условиями (5.1). Легко проверить, что решения имеют следующий вид:

$$f_1^2=\left[\tau-\frac{l}{v}+F(F^2+M)^{-1}\right](F^2+M)-M(F^2+M)^{-1} \tag{6.1}$$

$$\sigma_1=M^{-1/2}G\left\{\operatorname{arctg}\left\{(F^2+M)M^{-1/2}\left[\tau-\frac{l}{v}+(F^2+M)^{-1}F\right]\right\}-\operatorname{arctg}(FM^{-1/2})\right\} \tag{6.2}$$

Условие $\frac{df_1(0)}{d\tau}=0$ ограничивает значение l.

Легко найти, что она имеет вид:

$$l=vF(F^2+M)^{-1} \tag{6.3}$$

Условие (6.3) есть условие резонанса.

Решения уравнений (4.5) и (4.7) с граничными условиями (5.4) имеют следующий вид:

$$f_2^2=f_1^2(0)+Mf_1^2(0)(\tau')^2 \qquad (6.4)$$

$$\sigma_2=GM^{-1/2}\mathrm{arctg}[M^{1/2}f_1^{-2}(0)]\tau'+\sigma_1(0),\ \tau'=-\tau \qquad (6.5)$$

Легко проверить, что при выполнении условия (6.3) существуют равенства $f_1(\tau)=f_2(\tau')$, $\sigma_1(\tau)=\sigma_2(\tau')$. Эти равенства указывают на существование симметрии для падающих и отраженных пучков.

Полученные решения (6.1)—(6.5) верны для постоянных коэффициентов, что верно в случаях $\nu t\ll 1$ и $\nu t\gg 1$, причем в последнем случае $\varkappa_1=\varkappa_2\approx 0$ и решение линейное.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шекоян А. В.** Трехмерные нелинейные квазимонохроматические волны в пьезодиэлектриках с учетом вязкости и теплопроводности.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1982, т. 35, № 5, с. 27—37.
2. **Багдоев А. Г., Шекоян А. В.** Нелинейные стационарные волны в пьезодиэлектриках с шариковыми включениями.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1987, т.40, №5, с. 14—23.
3. **Бреховских Л. М.** Волны в слоистых средах.—М.: Наука, 1973. 426 с.
4. **Исакович М. А.** Общая акустика.—М.: Наука, 1973. 494 с.
5. **Багдоев А. Г., Шекоян А. В.** Отражение квазимонохроматической нелинейной волны от свободной поверхности среды.—Изв. АН РА. Механика, 1991, т. 44, № 1, с. 28—35.
6. **Bagdoev A. G. and Shekoyan A. V.** Focusing of nonlinear ultrasonic waves in visous thermoelastic materials with spherical inclusians.—Phys. stat. sol.(a), 1985, v. 89. P. 449—507.
7. **Кристенсен Р.** Введение в механику композитов.—М.: Мир, 1982. 332 с.
8. **Hunter J. K., Keller J. B.** Weakly nonlinear high freguency waves.—Communicatious on pure and applied mathem. 1983, v. 36, no. 5, p. 547—558.
9. **Garbonaro P. High freguency waves in guasilinear invisid gasodinamices.—ZAMP,** 1986. v. 37. no. 1, p. 43—52.
10. **Багдоев А. Г., Шекоян А. В.** Трехмерные нелинейные волны в пьезодиэлектриках и в пьезополупроводниках.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1981, т. 34, №4, с. 3—15.
11. **Канер В. В., Руденко О. В.** О распространении волн конечной амплитуды в акустических волноводах.—Вестник МГУ. Сер. физич., астрономия, 1978, т. 19, с. 78.
12. **Багдоев А. Г., Шекоян А. В.** Трехмерные нелинейные волны в пьезодиэлектриках и пьезополупроводниках.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1981, т. 34, №34, с. 3—15.
13. **Багдоев А. Г., Шекоян А. В.** Распространение нелинейных квазимонохроматических волн в термоупругой линейно-вязкой среде.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1982, т. 35, № 4, с. 3—13.
14. **Шекоян А. В.** Отражение гауссовского пучка от свободной поверхности в нелинейной вязкоупругой среде с внутренними осцилляциями.—В сб.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред.—Ереван, Изд. АН Арм. ССР, 1990, с. 283—287.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
14.05.1993