

ОБ УПРАВЛЯЕМОМ ДВИЖЕНИИ УПРУГОГО
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

ГУКАСЯН А. А.

Ա. Ա. ԳՐԻԿՅԱՆ

ԱՌԱԶԳԱԿԱՆ ՏԻԵԶԵՐԱԿԱՆ ՍԱՐԻ ԴԵՎԱՎԱՐՎՈՂ ՀԱՐԺՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Հետազոտված է ձկուն վաճաններով արեգակնային մարտկոցներով տիեզերական սարքի պտտական շարժումը:

Ձկուն վաճանները մոդելավորված են որպես առաձգական սալեր: Որոշված են սալերի առաձգական առանձնների կասեցման օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը:

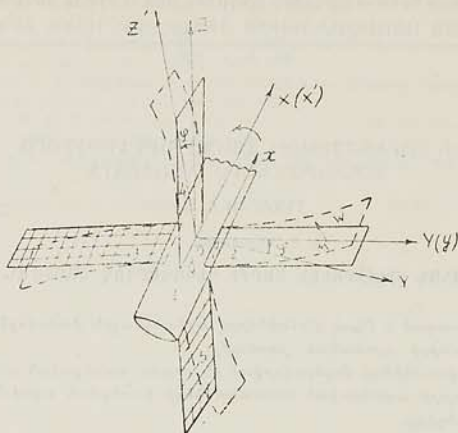
ON CONTROLLED MOTION OF AN ELASTIC COSMIC APPARATUS

A. A. GUKASIAN

В раб. *те* исследуется вращательное движение ЛКА с гибкими панелями солнечных батарей, которые моделируются как упругие пластины. Определены упругие колебания пластины и исследована задача оптимального управления с гашением колебаний в конце процесса.

1. *Описание механической системы.* Рассматривается управляемые движения летательного космического аппарата (ЛКА), представляющего собой основное твердое тело 1 (фиг. 1) с двумя парами гибких панелей солнечных батарей 2—5. Предполагается, что солнечные батареи есть изотропные прямоугольные пластины одинаковых размеров (a , b). Они жестко скреплены с основным телом. Пластины имеют постоянную толщину h и характеризуются цилиндрической жесткостью на изгиб D и плотностью ρ , для которых имеет место гипотеза недеформируемых нормалей [1]. Колебательные движения происходят в вертикальной плоскости YOZ . Считается, что управление осуществляется моментом сил $M(t)$, приложенным к основному телу и создаваемым ракетными двигателями. Поскольку рассматриваются движения тела вокруг продольной оси, то солнечные батареи в каждой паре при определенных начальных условиях будут совершать антисимметричные колебания, и можно ограничиться рассмотрением динамики только одной батареи 2, а эффект воздействия ее на основное тело умножить на четыре [2].

Радиус-вектор точек пластины 2 относительно точки O' обозначим через



Фиг. 1

$$\vec{R}(t, x, y) = \vec{R}_0(t, x, y) + \vec{w}(t, x, y) \quad (1.1)$$

где $\vec{R}_0(t, x, y)$ —вектор состояния недеформированной пластины относительно точки O' ; $\vec{w}(t, x, y)$ —вектор упругих поперечных смещений точек срединной плоскости пластины в момент времени t .

Векторы R_0 и \vec{w} в инерциальной системе координат $OXYZ$ имеют следующие координатные представления:

$$\vec{R}_0(t, x, y) = \begin{pmatrix} x \\ (y+r)\cos\varphi \\ (y+r)\sin\varphi \end{pmatrix} \quad \vec{w}(t, x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -w(t, x, y)\sin\varphi \\ w(t, x, y)\cos\varphi \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

где φ —угол между плоскостью XOY и плоскостью $X'O'Y'$ (ось $O'Y'$ является касательной к срединной поверхности деформируемой пластины), r —расстояние от продольной оси OX до линии прикрепления пластины.

Кинетическая энергия ЛКА состоит из кинетической энергии вращательного движения основного жесткого тела и кинетической энергии колебательных движений прямоугольных пластин

$$K = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + 2\rho h \int_0^l \int_0^b |\dot{\vec{R}}(t, x, y)|^2 d\Omega \quad (1.3)$$

где J —момент инерции основного тела относительно оси OX , $d\Omega$ —элемент площади срединной плоскости пластины.

Потенциальная энергия упругой деформации пластин имеет вид [1]:

$$P = 2D \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} d\Omega \quad (1.4)$$

Здесь $D = Eh^3/12(1-\nu)^2$, E — модуль упругости материала, ν — коэффициент Пуассона.

Исследования проводятся в рамках линейной теории упругости, где имеют место следующие предположения: упругое поперечное смещение пластин мало по сравнению с линейными размерами ($\max|w(t, x, y)| : \min(a, b) \sim \epsilon$), а цилиндрическая жесткость на изгиб велика ($D \sim \epsilon^{-1}$, $\epsilon \ll 1$). Предполагается также, что повороты пластины как целого вокруг оси OX конечные ($\varphi \sim 1$), а отношение времени движения (поворота) к максимальному периоду собственных упругих колебаний пластин имеет порядок $T/T_0 \sim \epsilon^{1/2}$. Из этих предположений следует также, что $\dot{\varphi} \sim \epsilon^{1/2}$ и $\ddot{\varphi} \sim \epsilon$ [3, 4].

2. Уравнения колебательных движений пластин ЛКА. Из вариационного принципа механики получим линейное интегро-дифференциальное уравнение движения

$$J\ddot{\varphi} + 4\rho h \iint_{\Omega} (y+r) [\ddot{\varphi}(y+r) + \ddot{w}(t, x, y)] d\Omega = M \quad (2.1)$$

и уравнения упругих колебаний пластин ЛКА

$$\ddot{w}(t, x, y) + \frac{D}{\rho h} \Delta^2 w(t, x, y) = -(y+r)\ddot{\varphi} \quad (2.2)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} w(t, x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial w(t, x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \\ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2} \right)_{y=a} = 0, \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=a} = 0 \\ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)_{x=0, b} = 0, \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=0, b} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\text{где } \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Согласованные с краевыми условиями (2.3), начальные условия задачи представим в виде

$$\varphi(t_0) = \varphi^0, \quad \dot{\varphi}(t_0) = \omega^0 \quad (2.4)$$

$$w(t_0, x, y) = F_1(x, y), \quad \dot{w}(t_0, x, y) = F_2(x, y)$$

3. Решение краевой задачи (2.2)–(2.4). Решение уравнения (2.2) с заданной правой частью представим в виде ряда по собственным формам однородной краевой задачи [1]

$$\omega(t, x, y) = \sum_{m, n=1}^{\infty} \theta_{mn}(t) X_m(x) Y_n(y) \quad (3.1)$$

Функции $X_m(x)$ и $Y_n(y)$ представляют собой собственные формы колебаний однородных балок. $X_m(x)$ удовлетворяет краевым условиям балки со свободными краями, а $Y_n(y)$ — краевым условиям для балки, жестко заделанной на конце $y=0$ и со свободным краевым концом $y=a$.

Подставляя (3.1) в уравнение (2.2) и учитывая условие ортогональности

$$\int_0^b X_m(x) X_k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq k \\ \beta_m^2 & \text{при } m = k \end{cases}$$

$$\int_0^a Y_n(y) Y_k(y) dy = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq k \\ \alpha_n^2 & \text{при } n = k \end{cases}$$

получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений [5]:

$$\ddot{\theta}_{mn}(t) + k_{mn}^4 \theta_{mn}(t) = \Phi_{mn}[t] \quad (3.2)$$

где

$$k_{mn}^4 = D[(i_m^4 + \lambda_n^4) \alpha_n^2 \beta_m^2 + 2c_{mn}] / \rho h \beta_m^2 \alpha_n^2$$

$$c_{mn} = \int_{\Omega} X_m'(x) Y_n'(y) X_m(x) Y_n(y) d\Omega$$

$$\Phi_{mn}[t] = - \frac{\varphi(t)}{\alpha_n^2 \beta_m^2} \int_{\Omega} (y+r) X_m(x) Y_n(y) d\Omega$$

i_m и λ_n определяются из следующих трансцендентных уравнений:

$$\operatorname{ch} i_m b \cos i_m b - 1 = 0$$

$$\operatorname{sh} \lambda_n a \sin \lambda_n a + 1 = 0$$

Общее решение уравнения (3.2) имеет вид

$$\theta_{mn}(t) = c_{mn}^1 \sin k_{mn}^2 t + c_{mn}^2 \cos k_{mn}^2 t + \frac{1}{k_{mn}^2} \int_{t_0}^t \Phi_{mn}[\tau] \sin k_{mn}^2 (t - \tau) d\tau \quad (3.3)$$

Постоянные c_{mn}^1 и c_{mn}^2 определяются из начальных условий (2.4) для ω , $\dot{\omega}$.

Следовательно, упругие колебания пластин ЛКА во время движения определяются выражением

$$w(t, x, y) = \sum_{m, n=1}^{\infty} \left[c_{mn}^1 \sin k_{mn}^1 t + c_{mn}^2 \cos k_{mn}^2 t + \frac{1}{k_{mn}^2} \int_{t_0}^t \Phi_{mn}[\tau] \sin k_{mn}^2 (t - \tau) d\tau \right] X_m(x) Y_n(y) \quad (3.4)$$

В задаче кинематического управления ЛКА, когда задан закон изменения угла поворота ($\varphi = \varphi(t)$) основного тела как функции времени, после определения упругих смещений пластин, можно, подставляя (3.4) в (2.1) с помощью квадратур по x и y , определить тот управляющий момент сил $M(t)$, который необходим для реализации заданного (не колебательного) движения для упругой модели ЛКА [3, 4]. Это — прямая задача динамики. При таком подходе управлением является угловое ускорение основного тела ЛКА $\ddot{\varphi} = u(t)$, которое дает решение задачи. Ниже для определенности приближенно исследуется задача оптимального кинематического управления поворотом ЛКА на заданный угол с гашением упругих колебаний пластин в конце процесса управления.

4. *Задача оптимального управления ЛКА.* Требуется за заданное время T привести ЛКА из начального состояния (2.4) в заданное конечное состояние с гашением упругих колебаний в конце процесса управления:

$$\varphi(T) = \varphi^T, \quad \dot{\varphi}(T) = \omega^T, \quad w(T, x, y) = \dot{w}(T, x, y) = 0 \quad (4.1)$$

и минимизировать функционал $\Phi[u]$, характеризующий качество управления. Для определенности в качестве критерия оптимальности возьмем квадратичский функционал

$$\Phi[u] = \int_{t_0}^T [u(t)]^2 dt \rightarrow \min_{u \in U}, \quad u(t) = \ddot{\varphi}(t) \quad (4.2)$$

После решения краевой задачи (2.2) — (2.4) задачу оптимального управления (4.1), (4.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_{mn}(t) + k_{mn}^4 \theta_{mn}(t) &= -a_{mn} u(t) \\ \varphi(t) &= \varphi^0 + \omega^0 t + \int_{t_0}^t u(t - \tau) d\tau, \quad \omega(t) = \omega^0 + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \\ \varphi(t_0) &= \varphi^0, \quad \dot{\varphi}(t_0) = \omega^0, \quad \varphi(T) = \varphi^T, \quad \dot{\varphi}(T) = \omega^T \\ \theta_{mn}(T) &= \dot{\theta}_{mn}(T) = 0, \quad \Phi[u] \rightarrow \min \\ a_{mn} &= \frac{1}{\alpha_n^2 \beta_m^2} \iint_{\Omega} (y+r) X_m(x) Y_n(y) d\Omega \end{aligned} \quad (4.3)$$

Решение задачи оптимального управления движением в конечно-модовом приближении: $n=1, 2, \dots, N$; $m=1, 2, \dots, M$ ЛКА с гашением упругих колебаний пластины существует, если среди k_{ij} нет двух одинаковых, что далее и предполагается [6].

Задачи оптимального управления (4.1)–(4.3) приводятся к решению следующей проблемы моментов [7]:

$$\int_0^T u(t) dt = c^1, \quad \int_0^T u(t)(T-t) dt = c^2$$

$$\int_0^T u(t) \sin k_{mn}^2 (T-t) dt = c_{mn}^3, \quad \int_0^T u(t) \cos k_{mn}^2 (T-t) dt = c_{mn}^4$$

$$\Phi[u] \rightarrow \min (t_0 = 0) \quad (4.4)$$

где

$$c^1 = \omega^T - \omega^0, \quad c^2 = \varphi^T - \varphi^0 - \omega^0 T$$

$$c_{mn}^3 = (-c_{mn}^1 \sin k_{mn}^2 T - c_{mn}^2 \cos k_{mn}^2 T) / D_{mn}$$

$$c_{mn}^4 = (-c_{mn}^1 \cos k_{mn}^2 T + c_{mn}^2 \sin k_{mn}^2 T) / D_{mn} k_{mn}^2$$

$$D_{mn} = -k_{mn}^2 a_{mn}$$

$$m = 1, 2, \dots, M; \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Применяя принцип максимума к счетной системе (4.4), решение ищем в виде [4]

$$u(t) = A_{\varphi} \frac{t}{T} + B_{\varphi} + \sum_{m,n=1}^{\infty} (A_{mn} \sin k_{mn}^2 t + B_{mn} \cos k_{mn}^2 t) \quad (4.5)$$

$u(t)$ строится разложениями (или последовательными приближениями) по степеням малого параметра $1/T \sim \sqrt{\varepsilon} (T_0 \sim 1)$. Нулевое приближение $u^0(t)$ с абсолютной погрешностью $O(\varepsilon^{3/2})$ определяет оптимальный поворот абсолютной жесткой модели ЛКА и имеет вид

$$u^0(t) = A_{\varphi}^{(0)} \frac{t}{T} + B_{\varphi}^{(0)}, \quad A_{mn}^{(0)} = B_{mn}^{(0)} = 0 \quad (4.6)$$

где

$$A_{\varphi}^{(0)} = -\frac{12}{T^2} \left(c^2 - \frac{1}{2} c^1 T \right), \quad B_{\varphi}^{(0)} = \frac{6}{T^2} \left(c^1 - \frac{1}{3} c^1 T \right)$$

$$(u^0(t) \sim \varepsilon, \quad u(t) - u^0(t) \sim \varepsilon^{3/2})$$

В следующем приближении A_{φ} и B_{φ} с абсолютной погрешностью $O(\varepsilon^2)$ определяются согласно (4.4), после подстановки (4.6):

$$A_{\varphi}^{(1)} = A_{\varphi}^{(0)} + \frac{12}{T^2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \left\{ A_{mn}^{(1)} \left[c_{mn}^3 - \frac{1}{2k_{mn}^2} (1 - \cos k_{mn}^2 T) \right] + \right.$$

$$\left. + B_{mn}^{(1)} \left(c_{mn}^4 - \frac{1}{2k_{mn}^2} \sin k_{mn}^2 T \right) \right\}$$

$$B_{\varphi}^{(1)} = B_{\varphi}^{(0)} + \frac{6}{T^2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \left\{ A_{mn}^{(1)} \left[\frac{(1 - \cos k_{mn}^2 T)}{3k_{mn}^2} T + c_{mn}^s \right] + \right. \\ \left. + B_{mn}^{(0)} \left(\frac{T \sin k_{mn}^2 T}{3k_{mn}^2} + c_{mn}^s \right) \right\} \quad (4.7)$$

где

$$c_{mn}^{s,c} = \int_0^T (T-t) \frac{\sin(k_{mn}^2 t)}{\cos(k_{mn}^2 t)} dt \\ A_{mn}^{(1)} = \frac{2}{T} \left(\frac{c_{mn}^3}{D_{mn}} - \int_0^T u^0(t) \sin k_{mn}^2 t dt \right) \\ B_{mn}^{(1)} = -\frac{2}{T} \left(\frac{c_{mn}^4}{D_{mn}} - \int_0^T u^0(t) \cos k_{mn}^2 t dt \right)$$

Аналогично строятся последующие приближения A_{φ} , B_{φ} и A_{mn} , B_{mn} . Доказательство сходимости рядов и справедливости оценок можно получить стандартным образом [8]. Более точные вычисления неоправданы, так как система (2.1)–(2.3) является приближенной: в ней отброшены члены $O(\epsilon^2)$.

Физический смысл полученного результата заключается в том, что малые и плавные управляющие, воздействуя, вызывают малые упругие колебания, влияние которых на управление относительно мало $\sqrt{\epsilon}$. Нужно отметить также, что в связи с техническими требованиями к задаче управления и к физико-механическим характеристикам пластины, можно упростить исходную задачу, то есть ограничиться гашением главной или нескольких мод упругих колебаний пластин в конце процесса управления.

Требуемое значение управляющего момента сил $M(t)$ вычисляется квадратурой при помощи выражений (2.1):

$$M(t) = Ju^{(1)}(t) + 4D \int \int_r \left[\frac{\partial^3 w(t, x, 0)}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 u(t, x, 0)}{\partial y^2} \right] dx$$

5. *Колебательное движение ЛКА с учетом сопротивления среды.* Пусть во время движения ЛКА на систему действует сила сопротивления среды пропорционально скорости движения

$$\vec{F}(t, x, y) = -\beta \vec{v}(t, x, y)$$

где β — коэффициент пропорциональности, $\vec{v}(t, x, y)$ — скорость движения точек срединной плоскости пластин.

Диссипативная функция Рэлея и обобщенные силы сопротивления имеют следующий вид:

$$R = \frac{\beta}{2} [(y+r)^2 \dot{\varphi}^2 \dot{w}^2 - 2(y+r) \dot{\varphi} \dot{w}]$$

$$Q_1 = -\beta [(y+r)^2 \dot{\varphi} + (y+r) \dot{w}]$$

$$Q_2 = -\beta [\dot{w} + (y+r) \dot{\varphi}]$$

В рассматриваемом случае интегро-дифференциальное уравнение движения ЛКА и уравнение упругих колебаний пластин являются

$$J \ddot{\varphi} + 4\rho h \int_{\Omega} \{ (y+r) \{ (y+r) \ddot{\varphi} + \ddot{w}(t, x, y) + \beta [(y+r) \dot{\varphi} + \dot{w}(t, x, y)] \} \} d\Omega = M(t) \quad (5.1)$$

$$\ddot{u}(t, x, y) + \beta \dot{w}(t, x, y) + \frac{D}{\rho h} \Delta^2 w(t, x, y) = -(y+r)(\ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi}) \quad (5.2)$$

с граничными и начальными условиями (2.3), (2.4).

Краевая задача (5.2), (2.3) решаются по методике, изложенной в п. 3.

Для коэффициентов $\theta_{mn}(t)$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{\theta}_{mn}(t) + 2N_{mn} \theta_{mn}(t) - k_{mn}^4 \theta_{mn}(t) = \Phi_{mn}^1 |t| \quad (5.3)$$

где

$$\Phi_{mn}^1 |t| = -\frac{\varphi + \beta \dot{\varphi}}{\alpha^2 \beta^2} \int_{\Omega} (y+r) X_m(x) Y_n(y) d\Omega, \quad \text{а } 2N_{mn} = \beta / \alpha_n^2 \beta_m^2$$

Решение уравнения (5.3) при заданных $\Phi_{mn}^1 |t|$ и при $N_{mn} < k_{mn}$ (малое сопротивление) имеет вид

$$\begin{aligned} \theta_{mn}(t) = \exp(-N_{mn}t) & \left[\theta_{mn}(t_0) \cos \bar{k}_{mn}^2 t + \frac{N_{mn} \theta_{mn}(t_0) + \dot{\theta}_{mn}(t_0)}{\bar{k}_{mn}^2} \times \right. \\ & \left. \times \sin \bar{k}_{mn}^2 t \right] + \frac{1}{\bar{k}_{mn}^2} \int_{t_0}^t \Phi_{mn}^1 |\tau| \exp[-N_{mn}(t-\tau)] \sin \bar{k}_{mn}^2 (t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $\bar{k}_{mn} = (k_{mn}^2 - N_{mn}^2)^{1/2}$ — круговая частота колебаний, $T^* = \max 2\pi / (k_{mn}^2 - N_{mn}^2)^{1/2}$ — максимальный период затухающих колебаний (максимум берется по m и n).

При больших силах сопротивления, то есть при $N_{mn} \geq k_{mn}$ решение уравнения (5.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \theta_{mn}^*(t) = \exp(-N_{mn}t) & (c_{mn}^1 \operatorname{ch} t \sqrt{N_{mn}^2 - k_{mn}^2} + c_{mn}^2 \operatorname{sh} t \sqrt{N_{mn}^2 - k_{mn}^2} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{N_{mn}^2 - k_{mn}^2}} \int_{t_0}^t \Phi_{mn}^1 |\tau| \exp(-N_{mn}(t-\tau)) \operatorname{sh} \sqrt{N_{mn}^2 - k_{mn}^2} (t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\theta_{mn}^{**}(t) = \exp(-N_{mn}t)(c_{mn}^1 + tc_{mn}^2) + \int_{t_0}^t \Phi_{mn}^1[\tau] \exp(-N_{mn}(t-\tau))(t-\tau) d\tau$$

(N_{mn} = k_{mn}) (5.6)

где c_{mn}^1 и c_{mn}^2 определяются из начальных условий.

После определения поведения пластин во время вращения ЛКА в сопротивляющейся среде при заданном законе изменения угла поворота $\varphi(t)$ и коэффициенте сопротивления β можно, подставляя (3.1), (5.4)—(5.6) в (5.1), с помощью квадратур по x и y , определить тот управляющий момент $M(t)$, который необходим для реализации заданного движения для упругой модели ЛКА. Однако задача об оптимальном управлении ЛКА в сопротивляющейся среде подлежит дальнейшему исследованию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаков И. М. Теория колебаний.—М.: Наука, 1968. 559 с.
2. Дегтярев Г. Л., Сиразетдинов Т. К. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами.—М.: Машиностроение, 1986. 204 с.
3. Черноусько Ф. Л. Динамика систем с упругими элементами большой жесткости.—Изв. АН СССР, МТТ, 1983, № 4, с. 101—113.
4. Акуленко Л. Д., Гукасян А. А. Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора.—МТТ, 1983, № 5, с. 33—47.
5. Гукасян А. А., Саркисян С. В. О колебательном движении прямоугольной пластинки.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1990, № 4, с. 13—23.
6. Черноусько Ф. Л., Акуренко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями.—М.: Наука, 1980. 382 с.
7. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами.—М.: Наука, 1975. 568 с.
8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1977. 742 с.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
16.03.1992