ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГИХ БЕСКОНЕЧНЫХ ТЕЛ, ГРАНИЦЫ КОТОРЫХ УСИЛЕНЫ СКЛЕЕННЫМИ С НИМИ УПРУГОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ НАКЛАДКОЙ

САРКИСЯН В. С., КЕРОПЯН А. В.

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Ա. Վ. ՔԵՐՈՓՅԱՆ

ԱՆՎԵՐՋ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ, ՈՐՈՆՑ ԵԶՐԵՐԸ ՍՈՍՆՁՄԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ԵՆ ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԵՌ ԱՆՎԵՐՋ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԴԻՐՈՎ

Դիտարկված են կոնտակտային խնդիրներ իզոտրոպ կիսահարթության, անիզոտրոպ կիսահարթության և շերտի համար, երբ նրանց եզրերը ուժեղացված են միևնույն, տարբեր համասեռությամբ մեկ վերջավոր և երկու միատեսակ կիսաանվերջ կտորներից կազմված անվերջ առաձգական վերադիրով։ Վերադիրի և հիմքերի միջև կոնտակտային փոխազդեցությունը իրականացված է սոսնձման միջոցով, ընդ որում հաշվի առնված սոսնձանյութի ֆիզիկամեխանիկական բնութագրերը։

Դիտարկվող բոլոր խնդիրները բերված են իրական առանցքի վրա ֆունկցիոնալ հավասարումների լուծման, որոնք իրենց հերթին հանգեցված են վերջավոր տիրույթում գործող անհայտ շոշափող լարումների նկատմամբ Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծման։

V. S. SARKISIAN, A. V. KEROPIAN

ON THE SOLUTION OF THE PROBLEMS OF ELASTIC INFINITE BODIES, WHICH BOUNDARY IS REINFORCED WITH A GLUED STEP-HOMOGENEOUS INFINITE STRINGER

Рассматриваются задачи для анизотропной полуплоскости, изотропной полуплоскости и полосы, грани которых усилены через слой клея (с другими физико-механическими характеристиками) кусочно-однородной бесконечной накладкой, состоящей из двух полубесконечных кусков и одного конечного куска с различными модулями упругости.

Контактные задачи для анизотропной полуплоскости с упругими накладками впервые рассмотрены в [1]. Эта и остальные работы по этой тематике с теми же авторами подробно изложены в книгах [2, 3].

В работе [4] рассмотрена задача для изотропной полубесконечной пластины, усиленной через слой клея полубесконечным стрингером.

С учетом физико-механических характеристик материала клея, в работах [5, 6] рассматривались задачи для изотропной полуплоскости и полосы с бесконечной кусочно-однородной накладкой, состоящей из двух полубесконечных кусков с различными модулями упругости, а в [7]—двумя полубесконечными накладками.

В настоящей работе рассматриваются задачи о контактном взаимодействии кусочно-однородной бесконечной накладки с бесконечными телами, в виде упругой анизотропной полуплоскости, изотропной полуплоскости и полосы, когда контакт между ними осуществляется через тонкий слой клея с другими упругими и геометрическими характеристиками. Рассматривается случай, когда кусочно-однородная накладка состоит из двух полубесконечных кусков и одного конечного куска с различными модулями упругости. Полуплоскости и полоса деформируются при помощи сил, приложенных к накладке. Полагая, что накладка находится в одноосном напряженном состоянии, а слой клея—в условиях чистого сдвига, задачи при помощи обобщенного интегрального преобразования Фурье сведены к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода, решаемого методом последовательных приближений.

В §§ 1, 2 приводится решение задачи для анизотропной полуплоскости (для изотропной полуплоскости результаты приводятся параллельно), а в § 3 кратко изложено решение для изотропной бесконечной полосы.

§ 1. *Постановка задачи и вывод основного разрешающего уравнения.* Пусть анизотропная полуплоскость, имеющая одну плоскость упругой симметрии, усилена на своей границе $y=0$ кусочно-однородной накладкой малой толщины h, модуль упругости которой при $|x|>a$ равен E_1, а при $|x|<a - E_2$. Здесь, контакт между полуплоскостью и накладкой осуществляется через тонкий слой клея (модуль упругости E_k, коэффициент Пуассона ν_k и толщина h_k). Предполагая, что накладка под действием горизонтальных сил находится в одноосном напряженном состоянии, а слой клея—в условиях чистого сдвига [4, 8], задача заключается в определении тангенциальных контактных напряжений, когда в точке накладки $x=0$ приложена горизонтальная сила P.

Согласно вышепринятому, уравнение равновесия накладки в обобщенных функциях будет иметь вид [9, 10]:

$$\frac{dU^{(1)}}{dx}=\frac{\tau_1(x)}{E_1 h}+\frac{\tau_0(x)}{E_2 h}+\frac{P\delta(x)}{E_2 h}-u_a'[\delta(x-a)+\delta(x+a)] \qquad (1.1)$$

$$-\infty<x<\infty$$

где

$$U^{(1)}(x)=\theta(-x-a)\,\frac{du^{(1)}}{dx}+[\theta(x+a)-\theta(x-a)]\,\frac{du^{(1)}}{dx}+\theta(x-a)\,\frac{du^{(1)}}{dx}$$

$$\tau_0(x)=[\theta(x+a)-\theta(x-a)]\tau(x), \quad \tau_1(x)=[\theta(x-a)+\theta(-x-a)]\tau(x)$$

$$\tau(x)=\tau_1(x)+\tau_0(x), \quad u_a'=\left.\frac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=a-0}-\left.\frac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=a+0}$$

$u'(x)$—горизонтальные перемещения точек накладки, $\tau(x)$—интенсивность тангенциальных контактных напряжений, $\delta(x)$—функция Дирака, $\Theta(x)$—функция Хевисайда, u_a'—пока неизвестная постоянная.

Применив к (1.1) обобщенное преобразование Фурье, получим:

$$-i\sigma\bar{U}^{(1)}(\sigma)=\frac{\bar{\tau}_1(\sigma)}{E_1h}+\frac{\bar{\tau}_0(\sigma)}{E_2h}-\frac{P}{E_2h}-2u_a'\cos a\sigma,\quad -\infty<\sigma<\infty \qquad (1.2)$$

где

$$\bar{U}^{(1)}(\sigma)=F[U^{(1)}(x)],\quad \bar{\tau}_i(\sigma)=F[\tau_i(x)]\quad (i=0,\ 1)$$

F—оператор преобразования Фурье.

Теперь, полагая, что каждый дифференциальный элемент слоя клея находится в условиях чистого сдвига [4], будем иметь:

$$u^{(1)}(x)-u^{(2)}(x,\ 0)=k\tau(x),\quad -\infty<x<\infty \qquad (1.3)$$

где

$$k=h_k/G_k,\quad G_k=E_k/2(1+\nu_k)$$

$u^{(2)}(x,0)$—горизонтальные перемещения граничных точек деформируемого основания.

С другой стороны, известно [2, 3, 11], что деформация упругой анизотропной полуплоскости, когда на ее границе действуют тангенциальные напряжения интенсивности, $\tau(x)$ определяется формулой:

$$\varepsilon_x^{(2)}\Big|_{y=0}=\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx}=\frac{A_2^{(2)}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau(s)}{s-x}\,ds,\quad -\infty<x<\infty \qquad (1.4)$$

где

$$A_2^{(2)}=A_2=-\frac{1}{2i}\beta_{11}[\mu_1+\mu_2-\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2] \qquad (1.5)$$

μ_1, μ_2 и их сопряженные $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ являются корнями уравнения

$$\beta_{11}\xi^4-2\beta_{16}\xi^3+(2\beta_{12}+\beta_{66})\xi^2-2\beta_{26}\xi+\beta_{22}=0 \qquad (1.6)$$

а β_{ij}—упругие коэффициенты материала анизотропной полуплоскости.

В (1.4) интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

В случае, когда анизотропное тело является ортотропным, коэффициенты $\beta_{16}=\beta_{26}=0$ и уравнение (1.6) станет биквадратным.

Для изотропной полуплоскости в (1.4) вместо $A_2^{(2)}$ следует подставить

$$A_2^{(2)}=2(1-\nu^2)/E$$

где E—модуль упругости полуплоскости, ν—коэффициент Пуассона.

Теперь, применив к (1.4) интегральное преобразование Фурье, в силу (1.2), (1.3) после несложных выкладок получим следующее функциональное уравнение на действительной оси:

$$(\sigma^2+2\alpha|\sigma|+\lambda_1^2)\bar{\tau}_1(\sigma)+(\sigma^2+2\alpha|\sigma|+\lambda_2^2)\bar{\tau}_0(\sigma)=P\lambda_2^2+\frac{2u_2'}{k}\cos a\sigma, \quad -\infty<\sigma<\infty \tag{1.7}$$

где

$$\alpha=-\frac{\beta_{11}}{4ik}[\mu_1+\mu_2-\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2], \quad \lambda_j^2=\frac{1}{E_jkh} \quad (j=1,\ 2) \tag{1.8}$$

Для изотропной полуплоскости в (1.7) α принимает значение $\alpha=(1-\nu^2)/Ek$. Таким образом, задача сведена к решению функционального уравнения (1.7).

§2. *Решения уравнения (1.7).* Для этой цели уравнение (1.7) приведем к интегральному уравнению. Представим его в следующем виде:

$$\bar{\tau}_1(\sigma)=-\bar{\tau}_0(\sigma)+\frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\bar{\tau}_0(\sigma)}{\sigma^2+2\alpha|\sigma|+\lambda_1^2}+\frac{P\lambda_2^2+\frac{2u_a'}{k}\cos a\sigma}{\sigma^2+2\alpha|\sigma|+\lambda_1^2}$$

которое, после обратного преобразования Фурье будет иметь вид:

$$\tau(x)=(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\int_{-a}^{a}K(|x-s|)\tau_0(s)ds+g(x), \quad -\infty<x<\infty \tag{2.1}$$

где

$$K(|x|)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{K}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma, \quad g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{g}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

$$\bar{K}(\sigma)=\frac{1}{\sigma^2+2\alpha|\sigma|+\lambda_1^2}, \quad \bar{g}(\sigma)=\frac{P\lambda_1^2+\frac{2u_a'}{k}\cos a\sigma}{\sigma^2+2\alpha|\sigma|+\lambda_1^2}$$

Заметим, что $\bar{K}(\sigma)$ можно представить и таким образом:

$$\bar{K}(\sigma)=\frac{1}{(b_2-b_1)}\left(\frac{1}{|\sigma|+b_1}-\frac{1}{|\sigma|+b_2}\right) \tag{2.2}$$

$$b_1=\frac{\lambda_1^2}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\lambda_1^2}}, \quad b_2=\frac{\lambda_1^2}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\lambda_1^2}}$$

С другой стороны, поскольку при $|x|<a$ $\tau(x)=\tau_0(x)$, из (2.1) получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\tau_0(x)+(\lambda_2^2-\lambda_1^2)\int_{-a}^{a}K(|x-s|)\tau_0(s)ds=g(x) \quad |x|<a \tag{2.3}$$

Отметим, что $g(x)$ можно представить и так:

$$g(x)=P\lambda_2^2K(|x|)+\frac{u_a}{k}[K(|x-a|)+K(|x+a|)] \tag{2.4}$$

На основании (2.2) заметим, что $K(|x|)$ можно представить и в таком виде:

$$K(|x|)=\frac{1}{\pi(b_2-b_1)}\ln\left|\frac{b_2}{b_1}\right|+R(x) \tag{2.5}$$

$$R(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(b_1x)^{2n}}{\pi(2n)!}\left(\ln\frac{1}{|b_1x|}+1+\ldots+\frac{1}{2n}-C\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{|b_1x|^{2n-1}}{2(2n-1)!}\right]-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(b_2x)^{2n}}{\pi(2n)!}\left(\ln\frac{1}{|b_2x|}+1+\ldots+\frac{1}{2n}-C\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{|b_2x|^{2n-1}}{2(2n-1)!}\right]$$

C—постоянная Эйлера.

Из (2.5) следует, что $K(|x|)$—непрерывная функция, а ее значение в точке $x=0$ конечно. Следовательно, имея в виду (2.4), легко заметить, что $\tau(x)$ в точках $x=0$, $x=\pm a$ принимает конечные значения. Заметим, что при отсутствии слоя клея $\tau(x)$ в точках $x=0$, $x=\pm a$ имеет логарифмическую особенность [9, 10].

На основании

$$\sup_{|s|<a}\int_{-a}^{a}|K(|x-s|)|dx=M<\infty$$

интегральное уравнение (2.3) при $|\lambda_1^2-\lambda_2^2|<M^{-1}$ в пространстве суммируемых функций $L_1(-a,a)$ можно решать методом последовательных приближений. Заметим, что решение уравнения (2.3) можно получить и сведением его к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений [12—15].

Таким образом, определяя вышеуказанным способом $\tau(x)$ на участке $|x|<a$, ее значения при $|x|>a$ будут определяться из (2.1), причем значение $\tau(x)$ в точке $x=a$ будет иметь вид:

$$\tau(a)=(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\int_{-a}^{a}K(|a-s|)\tau_0(s)ds+P\lambda_2^2K(a)+\frac{u_a'}{k}[K(0)+K(2a)]$$

а постоянная u_a' будет определяться из условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tau(s)ds=P \tag{2.6}$$

Далее, поскольку для $\bar{\tau}(\sigma)$ при $\sigma\to 0$ имеет место разложение

$$\bar{\tau}(\sigma)=a_0+a_1\sigma+a_2\sigma^2+a_3|\sigma|+0(\sigma|\sigma|)$$

где a_0, a_1, a_2, ...—некоторые постоянные, то отсюда на основе метода Лайтхилла [16], можно заключить, что $\tau(x)=F^{-1}[\bar{\tau}(\sigma)]$ при $|x|\to\infty$ имеет порядок $0\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

§ 3. *Решение задачи для упругой изотропной полосы.* Рассмотрим теперь аналогичную задачу для бесконечной полосы жестко защемленной нижней грани $y=-H$ (плоская деформация, модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν, толщина H). При изложении будем придерживаться обозначений, принятых в § 1.

Известно [3, 6, 14], что деформация граничных точек изотропной бесконечной полосы, когда на ее свободной границе действуют тангенциальные напряжения интенсивности, $\tau(x)$ определяются формулой:

$$\varepsilon_x^{(2)}\Big|_{y=0}=\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_n'(|x-s|)\tau(s)ds, \qquad (3.1)$$

$$-\infty<x<\infty$$

где

$$K_n'(x)=\frac{dK_n(x)}{dx}, \quad K_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{K}_n(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

$$\varkappa=(\lambda+\mu)/2\mu$$

$$\bar{K}_n(\sigma)=\frac{(2\varkappa+1)[(\varkappa+1)\mathrm{sh}2H|\sigma|+2\varkappa H|\sigma|]}{2\mu|\sigma|[2\varkappa(\varkappa+1)\mathrm{ch}2H|\sigma|+\varkappa^2(4H^2\sigma^2+1)+(\varkappa+1)^2]}$$

λ, μ—упругие постоянные Ламе материала полосы.

Здесь, не останавливаясь на подробностях, лишь отметим, что в силу (1.2), (1.3) с учетом (3.1), как и в §2, решение задачи также сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\tau_0(x)+(\lambda_2^2-\lambda_1^2)\int\limits_{-a}^{a}K_{\lambda_1}(|x-s|)\tau_0(s)ds=f(x), \quad |x|<a \qquad (3.2)$$

где

$$K_{\lambda_1}(|x|)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{K}_{\lambda_1}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma, \quad \bar{K}_{\lambda_1}(\sigma)=\frac{1}{\sigma^2+2|\sigma|\Pi(\sigma)+\lambda_1^2} \qquad (3.3)$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma, \qquad \bar{f}(\sigma)=\frac{1}{\sigma^2+2|\sigma|\Pi(\sigma)+\lambda_1^2}$$

$$\Pi(\sigma)=\frac{(2\varkappa+1)[(\varkappa+1)\mathrm{sh}2H|\sigma|+2\varkappa H|\sigma|]}{4\mu K[2\varkappa(\varkappa+1)\mathrm{ch}2H|\sigma|+\varkappa^2(4H^2\sigma^2+1)+(\varkappa+1)^2]}$$

В (3.3) $f(x)$ можно представить и в такой форме

$$f(x)=P\lambda_2^2K_{\lambda_1}(|x|)+\frac{u_a'}{k}[K_{\lambda_1}(|x-a|)+K_{\lambda_1}(|x+a|)] \qquad (3.4)$$

С другой стороны, поскольку имеет место $\bar{K}_{\lambda_1}(\sigma)=\sigma^{-2}+0(\sigma^{-2}|\sigma|^{-1})$ при $|\sigma|\to\infty$, то отсюда следует, что $K_{\lambda_1}(|x|)=$ $=F^{-1}[\bar{K}_{\lambda_1}(\sigma)]$—непрерывная функция и имеет такое поведение, как $K(|x|)$ в §2. Следовательно, имея ввиду (3.4), не трудно видеть, что $\tau(x)$ в точках $x=0$, $x=\pm a$ принимает конечные значения.

Далее, как и в §2, установим, что интегральное уравнение (3.2) при $N|\lambda_1^2-\lambda_2^2|<1$, где

$$N=\sup_{|s|<a}\int_{-a}^{a}|K_{\lambda_1}(x-s)|dx$$

в пространстве суммируемых функций $L_1(-a,a)$ можно решать методом последовательных приближений.

В заключение отметим, что остальные неизвестные определяются таким же образом, как и в §2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Саркисян В. С., Овсепян Л. О.** Контактная задача для анизотропной полуплоскости с упругими креплениями.—ДАН Арм ССР, 1971, т. 52, №5, с. 273—280
2. **Саркисян В. С.** Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела.—Ереван: изд. ЕГУ, 1976. 534 с.
3. **Саркисян В. С.** Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками.—Ереван: изд. ЕГУ, 1983. 259 с.
4. **Benthem J. P.** On the diffusion of a load from a semi—infinit stringer bonded to a sheet. Contr. Th. Airer. Struct., 1972, p. 117—134.
5. **Григорян Э. Х.** Контактная задача для упругой полуплоскости, на границе которой приклеена бесконечная кусочно-однородная накладка.—изд. АН РА. Механика 1990, т. 43, №4, с. 24—34.
6. **Керопян А. В.** Контактная задача для упругой полосы, граница которой усилена склеенной с ней упругой разнородной бесконечной накладкой.—Материалы Всесоюзного научного семинара. «Актуальные проблемы неоднородной механики». Ереван, 1991, с. 343—348.
7. **Григорян Э. Х., Керопян А. В., Саркисян В. С.** Контактная задача для упругой полуплоскости, граница которой усилена склеенными с ней полубесконечными накладками.—Изв. АН СССР, МТТ, 1992, № 3, с. 180—184.
8. **Melan E.** Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen.—Ingr. Archiv, 1932. Bd., 3, Heft 2, s. 123—129.
9. **Григорян Э. Х.** Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости.—«Ученые записки» ЕГУ, естеств. науки, 1979, №3, с. 29—34.
10. **Керопян А. В., Саркисян В. С.** Передача нагрузки от кусочно-однородного бесконечного включения к упругой полосе.—«Ученые записки ЕГУ, естеств. науки, 1980, № 3, с. 50—55.
11. **Галин Л. А.** Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.—М.: Наука, 1980, 304 с.
12. **Коваленко Е. В.** Об эффективном методе решения контактных задач для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием.—Изв. АН Арм ССР, Механика, 1979, т. 32, №2, с. 76—82.
13. **Александров В. М., Мхитарян С. М.** Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.—М.: Наука, 1983. 487 с.
14. **Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.** Неклассические смешанные задачи теории упругости.—М.: Наука, 1974. 457 с.
15. **Григолюк Э. И., Толкачев В. М.** Контактные задачи теории пластин и оболочек.—М.: Машиностроение, 1980. 416 с.
16. **Lightill M. J.** An introduction to Fourier analysis and generalized functions.—Cambridge Univ., Press, 1959.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 9.08.1993