ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48. № 1, 1995 Механика

КВАЗИАДИАБАТИЧЕСКИЙ РЕЖИМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

ОГАНЯН Г. Г.

Գ. Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

ԳԱԶԱՀԵՂՈՒԿ ԽԱՌՆՈՒՐԴՈՒՄ ԱԼԻՔԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ՔՎԱԶԻԱԴԻԱԲԱՏ ՌԵԺԻՄԸ

Դուրս է բերված Բուսինեսկի տիպի գծային հավասարումը, որի ֆակտորիզացիայից հետո ստացված է էվոլյուցիոն հավասարում: Ստացված են դիսիպատիվ գործակիցների ջերմային բաղադրիչների ակնհայտ կախվածությունը խառնուրդի ջերմաֆիզիկական հատկություններից:

G. G. OHANIAN

THE QUASIADIABATICALL REGIME OF WAVE PROPAGATION IN GAS-BUBBLES MIXTURE

Исследуется влияние межфазного теплообмена на режим распространения волны при термодинамическом поведении газа в пузырьке, отличающемся, хотя и не намного, от адиабатического. Выведено линейное уравнение типа Буссинеска, факторизация которого приводит к полному его совпадению с линейной частью нелинейного эволюционного уравнения, полученного ранее автором. Тем самым, обосновывается корректность применения метода коротких волн к исследованию волновых процессов в газожидкостной смеси. Получены явные виды зависимостей тепловых составляющих коэффициента диссипации от теплофизических параметров смеси.

В рамках механики сплошной среды модель газожидкостной смеси, наиболее полно описывающей различного рода межфазные взаимодействия и механизмы диссипации, предложена в [1, 2]. Затухание колебаний газового пузырька за счет эффектов вязкости и теплопроводности исследовано в [3], а за счет межфазного теплообмена—в [4, 5]. Результаты экспериментов и численных исследований, приведенные соответственно в [6, 7] и [8, 9], впервые свидетельствовали, что в ряде случаев главным механизмом диссипации может явиться межфазный теплообмен между пузырьками и жидкостью. В [10] различаются промежуточные квазиизотермический и квазиадиабатический режимы распространения слабых волн, описываемыми нелинейными эволюционными уравнениями, полученными методом [11] коротких волн. В настоящей работе числовые данные, следуемые из выведенных формул, хорошо согласуются с результатами известных [12] экспериментов по выявлению зависимости фазовой скорости волны от ее частоты.

1. Исходные уравнения. Рассмотрим бесстолкновительную монодисперсную газожидкостную смесь, в которой отсутствуют процессы дробления, слипания и образования новых пузырьков. Систему одномерных уравнений, описывающую односкоростное течение рассматриваемой смеси с учетом эффекта вязкости, сжимаемости жидкости и межфазного теплообмена, возьмем в виде [1]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x} \tag{1.1}$$

$$\rho\frac{du}{dt}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1\beta\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right] \tag{1.2}$$

$$P_2-P=(1-\varphi_1)\rho_1R\frac{d^2R}{dt^2}+(1-\varphi_2)\frac{3}{2}\rho_1\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{4}{R}\mu\frac{dR}{dt} \tag{1.3}$$

$$\frac{\rho_2\beta}{\rho_1(1-\beta)}=\text{const},\ \rho_2R^3=\text{const},\ P_2=c_{v2}(\gamma-1)\rho_2T_2 \tag{1.4}$$

$$\rho=\rho_1(1-\beta)+\rho_2\beta,\quad P=P_1(1-\beta)+P_2\beta \tag{1.5}$$

$$\frac{dP_2}{dt}+\frac{3\gamma P_2}{R}\frac{dR}{dt}+\frac{3(\gamma-1)k_2\mathrm{Nu}}{2R_2^2}(T_2-T_0)=0 \tag{1.6}$$

$$\rho_1T_0\frac{ds_1}{dt}=\frac{4}{3}\frac{1}{1-\beta}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{12\beta}{R^2}\mu\left(\frac{dR}{dt}\right)^2,\quad T_1=T_0 \tag{1.7}$$

$$\varphi_1=(1{,}1\beta^{1/3}-\beta)/(1-\beta),\quad \varphi_2=(1{,}5\beta^{1/3}-1{,}3\beta)/(1-\beta)$$

Здесь индексы 1 и 2 отнесены соответственно к параметрам жидкой и газовой фаз; параметры, отнесенные ко всей смеси в целом, индексов не имеют; ϱ—плотность, P—давление, R—радиус пузырька, T—температура, β—объемное газосодержание, γ—показатель адиабаты газа, c_{v2}—удельная теплоемкость при постоянном объеме, k_2 и μ—коэффициенты теплопроводности и вязкости, Nu—число Нуссельта, поправочные коэффициенты φ_1 и φ_2 учитывают неодиночность пузырька в смеси. В принимаемой модели смеси полагается, что отсутствуют внешние источники тепла и, поскольку масса жидкой фазы и величины ее теплоемкостей подавляюще превосходят те же характеристики газовой фазы, температура несущей жидкости принимается постоянной ($T_1=T_0=\text{const}$).

Предположим, что при возмущении смеси величины избыточных параметров течения малы ($i=1,2$).

$$\begin{gathered}u=\varepsilon a_0u',\ P=P_0(1+\varepsilon P'),\ P_i=P_0(1+\varepsilon P_i'),\ \rho=\rho_0(1+\varepsilon\rho')\\ \rho_i=\rho_{i0}(1+\varepsilon\rho_i'),\ \beta=\beta_0(1+\varepsilon\beta'),\ R=R_0(1+\varepsilon R')\\ T_2=T_0(1+\varepsilon T'),\quad s_1=s_{10}(1+\varepsilon s_1')\end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь индекс 0 отнесен к невозмущенному состоянию смеси, являющемуся состоянием покоя, ε—безразмерный малый параметр, a—скорость звука в смеси. Линеаризация уравнения (1.7) показывает, что в рассматриваемом приближении $s_1'=0$. Поэтому, разлагая функцию состояния $P_1=P_1(\rho_1, s_1)$ в ряд Тейлора в окрестности состояния локального термодинамического равновесия жидкой фазы и ограничиваясь линейными членами, будем иметь

$$P_1'=\frac{\rho_{10}a_{10}^2}{P_0}\rho_1', \quad a_{10}^2=\left(\frac{\partial P_1}{\partial \rho_1}\right)_0$$

Комбинируя последнюю формулу с линейными соотношениями, получаемыми, согласно (1.8), из алгебраических соотношений (1.4) и (1.5), получим

$$P'=(1-\beta_0)P_1'+\beta_0 P_2', \quad \rho'=(1-\beta_0)\rho_1'+\beta_0\rho_2', \quad \rho_2'=-3R'$$
$$P_2'=T'-3R', \quad \rho'=\frac{P_0}{\rho_{10}a_{10}^2}(P'-\beta_0 T')-3\beta_0\left(1-\frac{P_0}{\rho_{10}a_{10}^2}\right)R' \tag{1.9}$$

Линеаризуя уравнения (1.1) и (1.2), придем к системе, из которой путем последовательного исключения возмущения скорости u', а затем и избыточной плотности ρ' посредством последнего соотношения из (1.9) выводится уравнение

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}-\frac{\rho_{10}a_{10}^2}{\rho_0}\frac{\partial^2 P'}{\partial x^2}+3\beta_0\left(1-\frac{\rho_{10}a_{10}^2}{P_0}\right)\left(\frac{\partial^2 R'}{\partial t^2}-\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0}\frac{\partial^3 R'}{\partial t\partial x^2}\right)-$$
$$-\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0}\frac{\partial^3 P'}{\partial t\partial x^2}=\beta_0\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2}-\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0}\frac{\partial^3 T'}{\partial t\partial x^2}\right) \tag{1.10}$$

Линеаризация уравнения Рэлея-Лэмба (1.3) и его последующее комбинирование с третьим соотношением из (1.9) дает

$$R'=\frac{1}{3}(T'-P')-\frac{(1-\varphi_{10})\rho_{10}R_0^2}{3P_0}\frac{\partial^2 R'}{\partial t^2}-\frac{4}{3}\frac{\mu}{P_0}\frac{\partial R'}{\partial t} \tag{1.11}$$

Если же линеаризовать уравнение (1.6) и затем использовать четвертое соотношение из (1.9), то будем иметь

$$\frac{\partial T'}{\partial t}+3(\gamma-1)\frac{\partial R'}{\partial t}+\frac{3\gamma\lambda_2 \mathrm{Nu}}{2R_0^2}T'=0, \quad \lambda_2=\frac{k_2}{c_{p2}\rho_{20}} \tag{1.12}$$

Здесь λ_2—коэффициент температуропроводности, c_{p2}—удельная теплоемкость газа при постоянном давлении.

2. *Квазиадиабатический режим.* Далее будет исследоваться волновой режим, в котором термодинамическое поведение газа в пузырьках, хотя и ненамного, но отличается от адиабатического. В работах [1, 4, 5, 9] для удобства исследований введены в рассмотрение безразмерное число Пекле и показано, что в исследуемом режиме числа Пекле и Нуссельта велики, при этом имеет место важная оценка

$$\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\sim\varepsilon, \quad \mathrm{Nu}=\mathrm{Pe}\,\frac{\sqrt{\mathrm{Pe}}-2}{\mathrm{Pe}-6\sqrt{\mathrm{Pe}}+12} \tag{2.1}$$

Приведенная оценка характеризует именно квазиадиабатический режим, Pe—число Пекле, определяемое формулой

$$\mathrm{Pe}=\frac{2R_0^2}{\lambda_2}\omega_{ar}, \quad \omega_{ar}=\frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_{10}}}$$

Здесь ω_{ar}—адиабатическая резонансная частота Миннаерта. Система уравнений (1.10)—(1.12) является замкнутой и полностью описывает различные режимы распространений волн малых, но конечных амплитуд. Она отличается от системы, исследованной ранее другими авторами, наличием в уравнениях слагаемых, ответственных за описание эффекта межфазного теплообмена. Решение системы будем искать в виде бегущих волн, характеризуемыми волновым числом k и частотой ω

$$P=P_*\exp[i(kx-\omega t)], \quad R=R_*\exp[i(kx-\omega t)], \quad T=T_*\exp[i(kx-\omega t)]$$

Здесь и далее штрихи над возмущениями параметров течения опускаются.

Условие существования ненулевых решений для системы однородных уравнений относительно амплитуд P_*, R_*, T_* и использование характерной оценки (2.1) позволяет получить дисперсионное уравнение

$$-\frac{3\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\omega_{ar}\frac{a_{fo}^2}{a_{eo}^2}(\omega^2-a_{eo}^2k^2)+i\omega(\omega^2-a_{fo}^2k^2)-$$
$$-\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0}\omega^2k^2+\left[\left(\frac{4}{3}\frac{\mu}{\gamma P_0}\frac{\rho_0a_{fo}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}+\frac{3\gamma\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\frac{\omega_{ar}}{\omega_{ar}^2}\frac{\rho_0a_{fo}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\right)\omega^2-\right.$$
$$\left.-\frac{1-\varphi_{10}}{\omega_{ar}^2}\frac{\rho_0a_{fo}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}i\omega^3\right]\left(\omega^2-\frac{\rho_{10}a_{10}^2}{\rho_0}k^2\right)=0 \qquad (2.2)$$

Здесь a_{eo} и a_{fo}—значения адиабатической и изотермической скоростей звука в смеси в состоянии покоя, определяемые формулами [2, 7]

$$\frac{1}{a_{fo}^2}=\frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{10}a_{10}^2}+\frac{\beta_0\rho_0}{\gamma P_0}, \quad \frac{1}{a_{eo}^2}=\frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{10}a_{10}^2}+\frac{\beta_0\rho_0}{P_0}$$

При выводе уравнения (2.2) пренебрежено, как обычно, взаимным воздействием друг на друга эффектов вязкости, дисперсии и межфазного теплообмена. В отсутствие теплообмена ($\mathrm{Pe}\to\infty$) и вязкости дисперсионному уравнению (2.2) соответствует дифференциальное уравнение, называемое двухволновым [7], которое описывает чисто адиабатический волновой режим. Поскольку величине ω соответствует оператор $(i\partial/\partial t)$, а k—оператор $(-i\partial/\partial x)$, постольку из (2.2) можно восстановить линейное уравнение, описывающее поведение избыточного давления

$$\varkappa^*\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-a_{eo}^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-a_{fo}^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)+\alpha_f\frac{\partial^4 P}{\partial t^4}-$$

$$-\delta_f\frac{\partial^4 P}{\partial t^2\partial x^2}+\frac{1}{\omega_{ar}^{\cdot 2}}\frac{\rho_0 a_{fo}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-\frac{\rho_{10}a_{10}^2}{\rho_0}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)=0 \qquad (2.3)$$

$$\alpha_f=\alpha_\mu+\alpha_T,\quad \alpha_\mu=\frac{4}{3}\frac{\mu}{\gamma P_0}\frac{\rho_0 a_{fo}^2}{\rho_{10}a_{10}^2},\quad \alpha_T=\frac{3\gamma\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\frac{\omega_{ar}}{\omega_{ar}^{\cdot 2}}\frac{\rho_0 a_{fo}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}$$

$$\delta_f=\delta_\mu+\delta_T,\quad \delta_\mu=\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0}\left(1+\frac{\rho_0 a_{fo}^2}{\gamma P_0}\right),\quad \delta_T=\frac{3\gamma\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\frac{a_{fo}^2}{\omega_{ar}^{\cdot 2}}\omega_{ar}$$

$$\varkappa^*=\frac{3\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\omega_{ar}\frac{a_{fo}^2}{a_{eo}^2}=\frac{3\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\omega_{ar}\left|1-(\gamma-1)\frac{\beta_0\rho_0 a_{fo}^2}{\gamma P_0}\right|$$

$$\frac{1}{\omega_{ar}^{\cdot 2}}=\frac{1-\varphi_{10}}{\omega_{ar}^2}$$

Если пренебречь эффектами дисперсии, диссипации и сжимаемости, то (2.3) переходит в волновое уравнение с характеристической скоростью a_{fo}, описывающей перемещение волнового профиля, в котором производные по t и x связаны равенствами

$$\frac{\partial}{\partial t}=\pm a_{fo}\frac{\partial}{\partial x} \qquad (2.4)$$

Здесь верхний и нижний знаки соответствуют волнам, распространяющимся, соответственно, вдоль положительной и отрицательной оси x. Примем, что в исследуемом волновом режиме равенства (2.4) выполняются приближенно. Использование взятой с нижним знаком связи (2.4) в диссипативных слагаемых, ответственных за описание эффектов теплообмена и вязкости, позволяет провести однократное интегрирование уравнения (2.3) и записать его в виде

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-a_{fo}^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{1}{\omega_{ar}^{\cdot 2}}\frac{\rho_0 a_{fo}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-\frac{\rho_{10}a_{10}^2}{\rho_0}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)-$$

$$-(\delta_f-\alpha_f a_{fo}^2)\frac{\partial^3 P}{\partial t\partial x^2}+\varkappa_f\frac{\partial P}{\partial t}=0 \qquad (2.5)$$

$$\varkappa_f=\varkappa^*\left(1-\frac{a_{eo}^2}{a_{fo}^2}\right)=\frac{3(\gamma-1)\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\omega_{ar}\left[1-\frac{(1-\beta_0)\rho_0 a_{fo}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\right]$$

Если теперь факторизовать посредством связи (2.4) уравнение (2.5), то есть выделить из него уравнение, описывающее распространение волны вдоль, например, отрицательного направления оси x, то получим

$$\frac{\partial P}{\partial t}-a_{fo}\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{1}{2}(\delta_\mu+\delta_T-\alpha_\mu a_{fo}^2-\alpha_T a_{fo}^2)\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+ \qquad (2.5а)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{a_{fo}^3}{\omega_{ar}^{*2}}\left(1-\frac{\rho_0 a_{fo}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\right)\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}=0$$

Необходимо подчеркнуть, что пренебрежение в уравнении (2.2) тепловой составляющей третьего слагаемого в сравнении с составляющими первого слагаемого приводит к ограничению

$$\omega < \gamma^{-1/2}\omega_{ar}^* = \omega_{ir}^* \equiv \omega_{ir}(1-\varphi_{10})^{-1/2}$$

на величину частот волн, реализуемых в смеси. Здесь ω_{ir} — изотермическая резонансная частота Миннаерта. В этом случае такому дисперсионному уравнению будет соответствовать дифференциальное уравнение (2.5a) с $\delta_T = \alpha_T = 0$, которое полностью совпадает с линейной частью нелинейного эволюционного уравнения, выведенного в [10] методом коротких волн [11] и записанного в размерных переменных. Тем самым, доказана обоснованность применения указанного метода к исследованию задач волновой динамики газожидкостной смеси. Таким образом, приходим к выводу, что уравнение коротких волн пригодно для описания длинноволнового движения с частотами, меньшими приведенной изотермической резонансной частоты Миннаерта ω_{ir}^*.

При частотах $\omega > \omega_{ir}^*$ в уравнении (2.2) первое слагаемое пренебрежимо мало в сравнении с тепловыми составляющими третьего слагаемого. Тогда в уравнении (2.5а) формально можно полагать $\varkappa_f = 0$ и тем самым, получить линейный вариант уравнения Бюргерса-Кортевега—де Вриза.

Наконец, если $\omega \sim \omega_{ir}^*$, то необходимо пользоваться полным уравнением (2.3) и эволюционным уравнением (2.5а).

Отметим, что при адиабатическом режиме вследствие отсутствия теплообмена ($\mathrm{Pe} \to \infty$, $\varkappa^* = 0$) вышеприведенных ограничений на частоту нет.

Подчеркнем также, что использование равенства (2.4) для упрощения диссипативных слагаемых уравнения (2.3) правомерно лишь в случае, когда влияние диссипации на эволюцию волны мало, означающее, что на расстояниях порядка длины волны и в течении времени порядка ее периода профиль волны должен деформироваться мало и ее амплитуда должна затухать слабо.

Перейдем к исследованию зависимости фазовой скорости волны от задаваемой частоты. С этой целью перепишем дисперсионное уравнение (2.2) в виде

$$a_{fo}^2\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{\varkappa_2 - \alpha z^2 - iz(1-bz^2)}{\varkappa_1 - \hat{\delta} z^2 - iz(1-z^2)} = (f+ig)^2 \qquad (2.6)$$

$$\varkappa_1 = \frac{\varkappa^*}{\omega_{ar}^*}\frac{a_{eo}^2}{a_{fo}^2} = \frac{3\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\sqrt{1-\varphi_{10}}, \quad \varkappa_2 = \varkappa_1\frac{a_{fo}^2}{a_{eo}^2}, \qquad b = \frac{\rho_0 a_{fo}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}$$

$$\alpha = \alpha_f\omega_{ar}^*, \quad \hat{\delta} = \frac{1}{a_{fo}^2}\hat{\delta}_f\omega_{ar}^*, \quad z = \frac{\omega}{\omega_{ar}^*}$$

Чтобы иметь количественные представления о порядках величин коэффициентов диссипации δ, α, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, в табл. 1 приведены некоторые числовые данные по этим коэффициентам, вычисленные для смеси вода-воздух. Видно, что с увеличением радиуса пузырька происходит убывание величины $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, характеризующих теплообмен. Этот факт объясняется тем, что для достаточно крупных пузырьков (в водо-воздушной смеси $R_0 > 3 \cdot 10^{-3}$м) время тепловой релаксации начинает намного превосходить период пульсации пузырька и от того тепло начинает передаваться в пузырек или отдаваться им в течении бесконечно большого промежутка времени в сравнении с периодом пульсации. Именно потому влияние межфазного теплообмена в общем механизме диссипации начинает убывать и режим колебания пузырька становится практически адиабатическим.

Таблица 1

$P_0 = 0{,}1$МПа; $\beta_0 = 2 \cdot 10^{-4}$; $a_{eo} = 640$М/С $a_{fo} = 731$М/С

R_0, м	δ	α	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$
$5{,}5 \cdot 10^{-5}$	0,7555	0,2340	0,5369	0,7001
$1{,}1 \cdot 10^{-4}$	0,4894	0,1516	0,3477	0,4537
$3 \cdot 10^{-4}$	0,2599	0,0806	0,1914	0,2498
$5 \cdot 10^{-4}$	0,2048	0,0614	0,1542	0,2012
$7 \cdot 10^{-4}$	0,1822	0,0529	0,1216	0,1587

Дисперсионное соотношение (2.6) является комплексным и потому отношение k/ω также будет комплексным. Будем считать частоту ω действительной величиной, а волновое число k—комплексной: $k = k_1 + ik_2$. Тогда искомое решение принимает вид

$$P = P_* \exp(-k_2 x) \exp[i(k_1 x - \omega t)], \quad k_2 > 0$$

и фазовая скорость c_{ph}, являющаяся скоростью перемещения фазы волны, определится как

$$c_{ph} = \frac{\mathrm{Re}(\omega)}{\mathrm{Re}(k)} = \frac{\omega}{k_1}, \quad \frac{a_{fo}}{c_{ph}} = f$$

Здесь функция f должна определиться из уравнения (2.6), откуда после отделения действительной и мнимой частей получим

$$\frac{a_{fo}^2}{c_{ph}^2} = \frac{1}{2} \frac{(\varkappa_1 - \delta z^2)(\varkappa_2 - \alpha z^2) + z^2(1-z^2)(1-bz^2)}{(\varkappa_1 - \delta z^2)^2 + z^2(1-z^2)^2} \Bigg\{ 1 \pm \pm \sqrt{1 + \left[\frac{z(1-z^2)(\varkappa_2 - \alpha z^2) - z(1-bz^2)(\varkappa_1 - \delta z^2)}{(\varkappa_1 - \delta z^2)(\varkappa_2 - \alpha z^2) + z^2(1-z^2)(1-bz^2)} \right]^2} \Bigg\} \tag{2.7}$$

Варьируя эффектами диссипации, будем иметь различные выражения для фазовой скорости. В отсутствие всех видов диссипации ($\varkappa_1=\varkappa_2=\alpha=\delta=0$) имеем

$$c_{ph}^2=a_{fo}^2\frac{1-z^2}{1-bz^2} \tag{2.8}$$

Отсюда видно, что при $z\to 1$ ($\omega\to\omega_{ar}^*$) происходит вырождение бегущей волны в стоячую, поскольку $c_{ph}\to 0$. При $z\to\infty$ ($\omega\to\infty$) будем иметь $c_{ph}\to a_{10}\sqrt{\frac{\rho_{10}}{\rho_0}}$. Если же $\omega\to\omega_{cr}$, где критическое значение частоты равно

$$\omega_{cr}=\frac{a_{10}}{a_{fo}}\sqrt{\frac{\rho_{10}}{\rho_0}}\,\omega_{ar}^*$$

то получим $c_{ph}\to\infty$. Последний факт свидетельствует, что значение $z_{cr}=(a_{10}/a_{fo})\sqrt{\rho_{10}/\rho_0}$ является особым для формулы (2.8). Интервал частот $\omega_{ar}^*<\omega<\omega_{cr}$ является диапазоном непрозрачности для волны.

В отсутствие эффектов вязкости ($\alpha=\delta=0$) формула (2.7) упрощается и принимает вид

$$\frac{a_{fo}^2}{c_{ph}^2}=\frac{1}{2}\,\frac{\varkappa_1\varkappa_2+z^2(1-z^2)(1-bz^2)}{\varkappa_1^2+z^2(1-z^2)^2}\left\{1\pm\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{1+\left[\frac{\varkappa_2 z(1-z^2)-\varkappa_1 z(1-bz^2)}{\varkappa_1\varkappa_2+z^2(1-z^2)(1-bz^2)}\right]^2}\right\}$$

Полученная формула подчеркивает важность учета межфазного теплообмена, приводящего к устранению особенности и позволяющего получить непрерывную зависимость фазовой скорости c_{ph} от частоты ω. Видно также, что указанный эффект не позволяет выродиться бегущей волне в стоячую, так как $c_{ph}\neq 0$. Происходит также устранение диапазона непрозрачности, поскольку c_{ph} во всем диапазоне реализуемых частот является уже действительной величиной.

Аналогичные выводы можно сделать и в случае отсутствия теплообмена ($\varkappa_1=0$) при анализе варианта формулы (2.7), соответствующего чисто адиабатическому режиму. Нетрудно убедиться, что тогда при $z\to 0$ будем иметь значение $c_{ph}\to a_{fo}$, которое следует также из формулы (2.8). Таким образом, при низкочастотных звуковых сигналах эффект вязкости не оказывает сколь-нибудь существенного влияния на величину фазовой скорости волны.

С другой стороны, необходимо отметить тот важный факт, что при $z\to 0$ из формул (2.7) и (2.9) следует $c_{ph}\to a_{eo}$, то есть именно изотермическая скорость звука в смеси представляет собой скорость распространения предельно низкочастотного звукового сигнала. Таким образом, межфазный теплообмен оказывает существенное влияние на величину фазовой скорости волны.

Наконец, выясним вопрос о мере погрешности, вносимым равенством (2.4) при его использовании в диссипативных слагаемых точного уравнения (2.3). Приближенному дифференциальному уравнению (2.5) соответствует дисперсионное уравнение

$$a_{f0}^2 \frac{k^2}{\omega^2} = \frac{z(1-bz^2)+i(\varkappa_2-\varkappa_1)}{z(1-z^2)-iz^2(\delta-\alpha)} \tag{2.9}$$

Полученное уравнение, в отличие от (2.6), является приближенным и потому следует ожидать, что оно не охватывает весь спектр реализуемых частот. Действительно, анализ выделенной из (2.9) формулы частотной зависимости фазовой скорости показывает, что при $z \to 0$ будем иметь $c_{ph} \to 0$, в то время, как в отсутствие эффектов диссипации $c_{ph} \to a_{f0}$. Таким образом, при распространении сигнала приближение (2.9) непригодно в расчете фазовой скорости при очень малых значениях частот, а уравнение (2.5) не может описать поведение сверхдлинных волн давления.

В заключение проведем сравнение результатов излагаемой теории с известными [12] экспериментальными данными по частотной зависимости фазовой скорости. Эксперименты проводились в водо-воздушной смеси с пузырьками, измеренные размеры большинства которых имели диаметры 0,011 см и для которых резонансная частота $f_{ar}=\omega_{ar}/2\pi$ равна приблизительно 60 кгц. Значения газосодержаний β_0 равнялись $(20\pm0{,}5)\cdot10^{-4}$ Согласно работе автора [5], режим распространения звуковых сигналов в такой смеси является типично квазиадиабатическим и потому использование изложенной теории в объединении результатов экспериментов вполне обосновано и корректно. В табл. 2 приведены некоторые числовые данные по величине фазовой скорости, рассчитанные по формуле (2.7) и снятые с экспериментальной кривой, приведенной в [2, 12]. Согласование теоретических (c_{ph}) и экспериментальных ($c_{ph}^э$) значений является хорошим.

Таблица 2

$P_0=0{,}1$ МПа; $\delta=0{,}755$; $\alpha=0{,}234$; $\varkappa_1=0{,}537$; $\varkappa_2=0{,}700$

$R_0=5{,}5\cdot10^{-5}$; $\beta_0=2\cdot10^{-4}$, $a_{e0}=640$ м/с, $a_{f0}=731$ м/с

z	$f=\frac{\omega}{2\pi}$, кгц	c_{ph}, $\frac{м}{с}$	$c_{ph}^э$, $\frac{м}{с}$	z	$f=\frac{\omega}{2\pi}$	c_{ph}	$c_{ph}^э$
0	0	640	--	2,051	126	2501	2350
0,244	15	636	600	2,238	138	2325	2300
0,488	30	605	650	2,438	150	2035	2100
0,731	45	494	750	2,682	165	1894	1950
1	61	740	850	2,926	180	1834	1800
1,222	75	2585	1450	3,169	195	1749	1750
1,467	90	3377	1750	3,901	240	1641	1650
1,711	105	3236	2200	4,889	300	1560	—
1,955	120	2694	2250	5,607	345	1550	—

Автор благодарит Гумерова Н. А. за дискуссию о корректности использования метода коротких волн в исследованиях по волновой динамике газожидкостных сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. Ч. 1.—М.: Наука, 1987. 464 с.
2. **Wijngaarden L. Van.** One dimensional flow of liguids containing small gas bubbles// Ann. Rev. Fluid Mech. 1972. V. 4. P. 369—396. Рус. пер.// Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с. 68—103.
3. **Devin Ch.** Survey of thermal, radiation and viscous damphing of pulsation air bubbles in Water // J. Acoust. Soc. Amer. 1959, V. 31, № 12, P. 1654—1667.
4. **Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С.** Теплообмен газового пузырька с жидкостью // ИЗВ. АН СССР. МЖГ, 1974, № 5, с. 94—100.
5. **Оганян Г. Г.** О свободных малых колебаниях газового пузырька в несжимаемой жидкости // Изв. АН Армении, Механика, 1991, т. 44, № 1, с. 41—47.
6. **Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.** Экспериментальное исследование распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа // Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1977, с. 32—44.
7. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.** Распространение волн в газо- и парожидкостных средах.—Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1983. 238 с.
8. **Нигматулин Р. И., Ивандаев А. И., Нигматулин Б. И., Милашенко В. И.** Нестационарные волновые процессы в газо- и парожидкостных смесях // Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1977, с. 80—90.
9. **Губайдулин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И.** Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры // ПМТФ, 1978, № 2, с. 78—86.
10. **Оганян Г. Г.** Об уравнениях нелинейной акустики газожидкостных сред // Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1988, т. 41, № 3, с. 25—36.
11. **Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А.** Теория коротких волн//ПМТФ, 1960, № 1, с. 63—74.
12. **Fox F. E., Curley S. R., Larson G. B.** Phase velocity and absorbtion measurements in Water containing air bubbles //J. Acoust. Soc. Amer., 1955, V. 27, № 7, P. 534—539.
13. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Гидродинамика.—М.: Наука, 1986. 736 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.01.1993