

К ЗАДАЧЕ О ПОВЕРХНОСТНЫХ УПРУГИХ ВОЛНАХ В  
ТОЛСТОЙ ПЛИТЕ

БЕЛУБЕКЯН В. М.

Վ. Մ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

ՀԱՍՏ ՍԱԼԻ ԵԶՐՈՎ ԱՌԱԶԳԱԿԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ուսումնասիրված են հաստ սալի եզրով տարածվող մակերևութային ալիքները, սալի եզրին և դիմային մակերևութներին մի քանի հնարավոր եզրային պայմանների դեպքում: Ցույց է տրված այդ ալիքների համար տարածման անվերջ թվով մոդերի գոյությունը, որոշված են փուլային արագությունները ալիքի երկարությունից և սալի հաստությունից կախված:

V. M. BELUBEKJAN

ON THE ELASTIC SURFACE WAVES IN A THICK PLATE.

Изучены поверхностные волны, бегущие вдоль кромки толстой плиты (упругого слоя), для нескольких возможных случаев граничных условий на кромке и на лицевых поверхностях плиты. Показано существование бесконечного числа мод для волн, локализованных вдоль кромки плиты. Определены фазовые скорости указанных волн в зависимости от длины волны и толщины плиты.

Рассматривается упругая плита, которая в прямоугольной декартовой системе координат занимает область:  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq y < \infty$ ,  $-h \leq z \leq h$ . В дальнейшем для краткости поверхность  $y=0$  будем называть кромкой, а поверхности  $z = \pm h$  —лицевыми поверхностями плиты. На лицевых поверхностях плиты заданы условия Навье или условия скользящего контакта, а на кромке плиты заданы условия частично антискользящего контакта (то есть нормальные напряжения, касательные напряжения в одном из направлений и перемещения в поперечном направлении равны нулю). Ставится задача выяснить, возможно ли распространение в плите упругих волн, затухающих при удалении от кромки. Используется метод гармонических волн, так как рассматриваемая задача, хотя и является существенно трехмерной, тем не менее близка к классической задаче Рэлея, которая исследует распространение поверхностной волны вдоль границы полупространства в рамках плоской деформации. Аналогично изучается задача распространения волны Рэлея вдоль кромки полубесконечной тонкой пластин-

ки на основе задачи обобщенного плоского напряженного состояния [1]. Трехмерную задачу о распространении поверхностной волны вдоль кромки плиты впервые рассмотрел Зильберглейт А. С. [2]. В [2] подробно изучены случаи, когда кромка плиты свободна, а на лицевых поверхностях заданы условия Навье или условия скользящего контакта. Причем во втором из этих случаев наряду с существенно трехмерной волной существует и волна Рэлея (волна плоской деформации).

В дальнейшем мы используем следующие обозначения:

$\lambda, \mu$ —постоянные Ламе,  $\rho$ —плотность материала,  $h$ —толщина плиты  
 $c_t^2 = \mu/\rho$ ,  $c_l$ —скорость распространения объемной поперечной волны

$c_L^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ ,  $c_L$ —скорость распространения объемной продольной волны

$\vec{u}$ —вектор упругих перемещений

$\omega$ —частота,  $k$ —волновое число,  $n$ —номер волны

$$\lambda_n = n\pi/h, \quad \beta = c_t^2/c_L^2, \quad a_n = \lambda_n/k, \quad \eta = \omega^2/k^2 c_t^2, \quad v_{1n}^2 = 1 + a_n^2 - \beta\eta, \quad v_{2n}^2 = 1 + a_n^2 - \eta$$

1. Уравнения, описывающие распространение упругих волн в плите, берутся в виде

$$c_t^2 \Delta \vec{u} + (c_L^2 - c_t^2) \text{grad div } \vec{u} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (1)$$

Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям на лицевых поверхностях плиты, граничным условиям на кромке плиты  $y=0$  и условию затухания:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \vec{u} = 0 \quad (2)$$

Используя представление

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \psi \quad (3)$$

решение уравнения (1) сводится к решению следующих уравнений [1, 2]:

$$c_L^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad c_t^2 \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad \text{div } \psi = 0 \quad (4)$$

В случае, когда на лицевых поверхностях плиты принимаются условия скользящего контакта

$$u_3 = 0, \quad \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{23} = 0 \quad \text{при } z = \pm h \quad (5)$$

решения уравнений (4) в виде симметричных по  $z$  гармонических волн представляются следующим образом:

$$\varphi = \exp i(\omega t - kx) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y) \cos \lambda_n z$$

$$\psi_1 = \exp i(\omega t - kx) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{1n}(y) \sin \lambda_n z \quad (6)$$

$$\psi_2 = \exp i(\omega t - kx) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n}(y) \sin \lambda_n z$$

$$\psi_3 = \exp i(\omega t - kx) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{3n}(y) \cos \lambda_n z$$

Случай антисимметричных волн исследуется аналогично и приводится к тому же самому дисперсионному соотношению.

В случае, когда на лицевых поверхностях заданы условия Навье:

$$u_1 = 0, \quad u_3 = 0, \quad \sigma_{33} = 0, \quad \text{при } z = \pm h \quad (7)$$

решения уравнений (4) в виде антисимметричных по  $z$  гармонических волн представляются следующим образом:

$$\varphi = \exp i(\omega t - kx) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y) \sin \lambda_n z$$

$$\psi_1 = \exp i(\omega t - kx) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{1n}(y) \cos \lambda_n z$$

$$\psi_2 = \exp i(\omega t - kx) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n}(y) \cos \lambda_n z$$

$$\psi_3 = \exp i(\omega t - kx) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{3n}(y) \sin \lambda_n z \quad (8)$$

Случай симметричных волн исследуется аналогично и приводится к тому же самому дисперсионному соотношению.

Во всех рассмотренных случаях для искоемых функций  $\varphi_n$ ,  $\psi_{in}$  из (4) получаем следующие уравнения:

$$\varphi_n'' - k^2 v_{1n}^2 \varphi_n = 0, \quad \psi_{in}'' - k^2 v_{2n}^2 \psi_{in} = 0 \quad (9)$$

и дополнительное условие:

$$-ik\psi_{1n} + \psi_{2n}' \pm \lambda_n \psi_{3n} = 0 \quad (10)$$

Здесь и в (4) знак «+» соответствует случаю (6), а знак «-» — случаю (8). Функции  $\varphi_n$ ,  $\psi_{in}$  должны удовлетворять также некоторым условиям на кромке плиты и условию затухания

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \varphi_n = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \psi_{in} = 0 \quad (11)$$

Из (9) следует, что условие затухания имеет вид:

$$0 < \eta < 1 + a_n^2 \quad (12)$$

и решения, удовлетворяющие условию затухания, запишутся следующим образом:

$$\varphi_n = A_n \exp(-k'v_{1n}y), \quad \psi_{in} = B_{in} \exp(-k'v_{2n}y) \quad (k' > 0) \quad (13)$$

Согласно (10) постоянные  $B_{in}$  должны удовлетворять уравнению

$$iB_{1n} + v_{2n}B_{2n} \pm a_n B_{3n} = 0 \quad (14)$$

*Граничные условия на кромке плиты.* Случай, когда кромка плиты свободна, подробно исследован в [2]. Представляет интерес исследование вопроса о существовании поверхностных волн при других случаях задания граничных условий на кромке плиты. Можно показать, что аналогично классической задаче Рэлея, при условиях закрепления ( $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ ), скользящего контакта ( $u_2 = \sigma_{21} = \sigma_{23} = 0$ ) и условиях Навье ( $u_1 = u_3 = \sigma_{22} = 0$ ) поверхностной волны не существует. Следует отметить, что в случае граничных условий Навье существует предельная волна [3], то есть объемная волна, распространяющаяся вдоль оси  $x$  и не зависящая от координаты  $y$ . Известно, что такая волна может при малых изменениях в условиях превратиться в поверхностную волну (неустойчивость предельной волны). Однако рассматриваемая пространственная задача кроме указанных, часто используемых граничных условий, допускает постановку и других корректных в математическом смысле условий. Например, можно решать задачу в случае, когда  $u_2 = u_3 = \sigma_{21} = 0$  при  $y=0$  («частично скользящий контакт»). Очевидно, что если условия скользящего контакта не допускают поверхностной волны, то ее не будет и при частично скользящем контакте.

*Граничные условия*

$$u_2 = 0, \quad \sigma_{21} = 0, \quad \sigma_{22} = 0 \quad \text{при } y=0 \quad (15)$$

являются промежуточными между условиями свободной кромки и условиями Навье. В этом случае результат задачи не очевиден. С учетом (3), граничные условия (15) приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \lambda \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2\mu \left[ \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z} \right] = 0 \\ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим сначала случай скользящего контакта на лицевых поверхностях. Подставляя решения (6) и (13) в (16) и учитывая соотношение (4), получим следующую систему однородных уравнений относительно произвольных постоянных  $A_n$  и  $B_{in}$ :

$$\begin{aligned} (2 + 2a_n^2 - \eta)A_n - 2v_{2n}(iB_{3n} + a_n B_{1n}) = 0 \\ 2iv_{1n}A_n + (2 + a_n^2 - \eta)B_{3n} - a_n(iB_{1n} - v_{2n}B_{2n}) = 0 \\ -a_n A_n - iB_{2n} + v_{2n}B_{1n} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$iB_{1n} + \nu_{2n}B_{2n} + a_n B_{3n} = 0$$

Можно показать, что и для всех оставшихся случаев (антисимметричные волны при условиях скользящего контакта на лицевых поверхностях; симметричные и антисимметричные волны при условиях Навье на лицевых поверхностях) уравнения для  $A_n$ ,  $B_{1n}$  также сводятся к уравнениям (17). Таким образом, во всех этих случаях поверхностная волна существует, если детерминант системы (17) равен нулю. Это условие приводит к следующему дисперсионному соотношению:

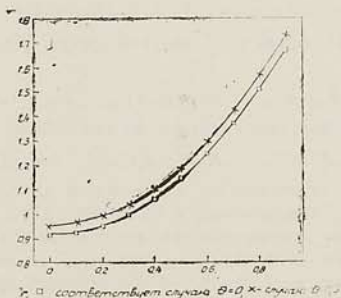
$$R_n(\eta) \equiv (2 - \eta)^2 + a_n^2(4 - \eta) - 4\nu_{1n}\nu_{2n} = 0 \quad (18)$$

В отличие от дисперсионного уравнения задачи со свободной кромкой [2], уравнение (18) не приводится к уравнению Рэлея. Замечая, что  $\eta = 0$  является корнем уравнения (18) и исключая указанный корень [4], получим новую форму записи уравнения (18):

$$R_{1n}(\eta) \equiv \eta - a_n^2 - 4(1 - \theta)\nu_{2n}(\nu_{1n} + \nu_{2n})^{-1} = 0 \quad (19)$$

Не трудно проверить, что функция  $R_{1n}(\eta)$  обладает следующими свойствами:

$$R_{1n}(0) < 0, \quad R_{1n}(1 + a_n^2) > 0, \quad R'_{1n}(\eta) > 0 \quad (20)$$



Фиг. 1.

что и доказывает, что при  $0 < \eta < 1 + a_n^2$  для каждого  $a_n$  уравнение (20) имеет единственный корень. На фиг. 1 приведены графики зависимости  $\eta$  от  $a_n^2$  для двух предельных значений  $\theta$ . Таким образом, граничные условия (15) допускают существование волны, локализованной вдоль кромки полубесконечной плиты. Рассмотрим волну с номером  $n=0$ . В случае скользящего контакта на лицевых поверхностях получим в точности волну Рэлея ( $w=0$  всюду). В случае условий Навье на лицевых поверхностях получим тривиальное решение

$$u = v = w = 0 \text{ при } n=0.$$

Рассмотрим граничные условия вида

$$u_1=0, \quad \sigma_{22}=0, \quad \sigma_{32}=0 \quad \text{при } y=0 \quad (21)$$

Следует отметить, что для задачи плоской деформации  $\sigma_{23}=0$  всюду и условия (21) соответствуют условиям Навье, для которых поверхностная волна не существует. Система уравнений, определяющих постоянные  $A_n, B_{1n}$ , соответствующие условиям (21) для обоих случаев граничных условий на лицевых поверхностях плиты, записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} (2+2a_n^2-\eta)A_n-2\nu_{2n}(iB_{3n}+a_nB_{1n}) &= 0 \\ 2a_n\nu_{1n}A_n-(1+2a_n^2-\eta)B_{1n}+i(\nu_{2n}B_{2n}-a_nB_{3n}) &= 0 \\ iA_n+\nu_{2n}B_{3n}+a_nB_{2n} &= 0 \\ iB_{1n}+\nu_{2n}B_{2n}+a_nB_{3n} &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Можно показать, что и для всех оставшихся случаев симметричные волны при условиях скользящего контакта на лицевых поверхностях, симметричные и антисимметричные волны при условиях Навье на лицевых поверхностях уравнения для  $A_n, B_{1n}$  также сводятся к уравнениям (22). Дисперсионное уравнение типа Рэлея, соответствующее системе (22), после некоторых преобразований приводится к виду:

$$R_n(\eta) \equiv \eta(\eta-1) + 4a_n^2\nu_{2n}(\nu_{2n}-\nu_{1n}) = 0 \quad (23)$$

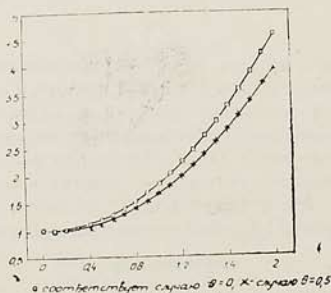
Исключая в (23) корень  $\eta=0$ , получим другую форму дисперсионного уравнения:

$$R_{1n}(\eta) \equiv \eta-1-4a_n^2(1-\theta)\nu_{2n}(\nu_{1n}+\nu_{2n})^{-1} = 0 \quad (24)$$

Функция  $R_{1n}(\eta)$  обладает следующими свойствами:

$$R_{1n}(0) < 0, \quad R_{1n}(1+a_n^2) > 0, \quad R'_{1n}(\eta) > 0 \quad (25)$$

откуда следует существование для каждого  $a_n$  единственного корня уравнения (24), следовательно, и уравнения (23) в интервале  $0 < \eta < 1+a_n^2$ . На фиг. 2 приведены графики зависимости  $\eta$  от  $a_n$  для двух предельных значений  $\theta$ . При  $n=0$  уравнение не имеет корня в этом интервале. Корень  $\eta=1$  при  $a_n=0$  соответствует предельной волне.



Фиг. 2.

В [2] показано, что в случае свободной кромки плиты возникает два типа поверхностных волн: волны, являющиеся обобщением волны Рэлея, и волны, порожденные неустойчивостью предельной объемной сдвиговой волны. Очевидно, что в случае, когда на кромке плиты заданы условия (15), поверхностная волна является обобщением волны Рэлея. В пределе при  $h \rightarrow \infty$  она переходит в волну Рэлея. В случае (21), напротив, существует только волна, порожденная неустойчивостью предельной объемной сдвиговой волны. В отличие от [2] эта волна дисперсионная.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Achenbach J. D. Wave Propagation in Elastic Solids—Amsterdam, North-Holl. Publ. Co., 1976
2. Зильбергейт А. С. О поверхностных упругих волнах в толстой плите.—Акустический журнал, 1980, т. 26, вып. 3, с. 416—421.
3. Балакирев М. К., Глазиский И. А. Волны в пьезокристаллах.—Новосибирск: Наука, 1982. 239 с.
4. Белубекян М. В. Об условии существования волны Стоуна при скользящем контакте.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1990, т. 43, № 4, с. 52—56.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
17.08.1990