ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 1, 1995 Механика

ИЗМЕНЕНИЕ ДАЛЬНОСТИ ПОЛЕТА ПРИ МАЛЫХ ОТКЛОНЕНИЯХ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

БАРСЕГЯН В. Р.

Վ. Ռ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

ԹՌԻՉՔԻ ՀԵՌԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՓՈՔՐ ՇԵՂՈՒՄՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Աշխատանքում դիտարկվում է նյուտոնյան ձգողական դաշտում շարժման էլիպտական հետագծեր, երբ սկզբնական ուղեծիրը էլիպտական է և հաշվի է առնվում ուղեծրային արագությունը։ Հետազոտված է պասիվ տեղամասի թռիչքի հեռավորության փոփոխությունը շարժման սկզբնական պարամետրերի փոքր շեղումների դեպքում, երբ մթնոլորտային ազդեցությունը բացակայում է։

V. R. BARSEGIAN

DISTANCE CHANGE OF FLIGHT IN THE CASE OF SMALL PERTURBATIONS OF INITIAL PARAMETERS

Во многих задачах баллистики возникает необходимость оценки отклонений конечных параметров движения при небольших отклонениях начальных параметров движения. Класс таких задач исследован в работах [1—3] и др.

В работе рассматриваются эллиптические траектории движения в ньютоновском гравитационном поле, когда исходная орбита является эллиптическим и учитывается орбитальная скорость. В предположении отсутствия влияния атмосферы исследовано изменение дальности полета пассивного участка при малых отклонениях начальных параметров движения

1. Описание объекта исследования и постановка задачи

Пусть управляемый объект находится на эллиптической орбите в ньютоновском гравитационном поле. Движение объекта будем рассматривать в полярной системе координат, полюс которой находится в центре притягивающего тела, а полярная ось совпадает с линией апсид рассматриваемой орбиты. В начальный момент времени параметры, характеризующие положение объекта, связаны соотношением

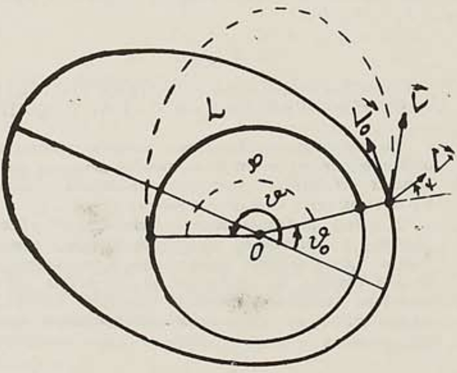
$$r_0 = \frac{p_0}{1+e_0\cos\vartheta_0} \tag{1.1}$$

где r_0—величина радиус-вектора объекта, ϑ_0—полярный угол, e_0—эксцентриситет, p_0—параметр орбиты. Радиальная и трансверсальная составляющие орбитальной скорости в точке (r_0, ϑ_0) выражаются соответственно следующими формулами [1, 2]:

$$v_{0r}=\sqrt{\frac{\mu}{p_0}}\,e_0\sin\vartheta_0, \qquad v_{0\varphi}=\sqrt{\frac{\mu}{p_0}}\,(1+e_0\cos\vartheta_0) \tag{1.2}$$

где μ—гравитационный параметр.

Предполагается, что объект, находясь на орбите, может реализовать характеристическую скорость некоторой величины $V\in[0, V_{max}]$ соответствующим запасом топлива. Расходуя имеющийся запас топлива частично или полностью, рассматриваемый объект в состоянии изменить первоначальную орбиту в определенных пределах. Из каждой точки исходной орбиты выходит пучок управляемых траекторий, которые получаются приложением импульса V под разным углом. Обозначим через ψ угол наклона характеристической скорости к радиусу-вектору объекта, измеряемый от радиус-вектора в сторону скорости объекта (фиг. 1).



Фиг. 1

Уравнения, описывающие семейство орбит, выходящих из заданной точки, при заданной величине характеристической скорости в плоском случае в предположении, что исходная орбита эллиптическая, имеют вид [4]

$$\frac{r_0}{r}=\frac{\mu(1-\cos\varphi)}{r_0(v_{0\varphi}-V\sin\psi)^2}+\cos\varphi-\frac{v_{0r}+V\cos\psi}{v_{0\varphi}+V\sin\psi}\sin\varphi \tag{1.3}$$

где $\varphi=\vartheta-\vartheta_0$, а (r, ϑ)— полярные координаты текущей точки орбиты, (V и ψ —управляющие параметры).

Пусть в гравитационном поле в плоскости рассматриваемой исходной орбиты имеем круговую орбиту с радиусом R (т. е. окружность), где $R \in [r_{min}, r_{max}]$ (r_{min} и r_{max}, такие, что траектории выходящих из данной точки (r_0, ϑ_0) исходной орбиты будут пересекаться с данной круговой орбитой). Исходя из замкнутости орбит, нас будут интересовать точки (R, ϑ) первых пересечений.

Под дальностью полета L пассивного участка будем понимать длину дуги круговой орбиты с радиусом R, которая заключена между точкой первого пересечения новой орбиты с данной круговой орбитой и радиус-вектором начального положения объекта.

Из такого определения в частности следует дальность пассивного участка, измеряемого по поверхности притягивающего тела [1—3].

Требуется определить изменение дальности полета L в зависимости от малых изменений начальных параметров движения.

2. Решение задачи

В точке (r_0, ϑ_0), прикладывая характеристическую скорость V под определенным углом ψ, траектория выходящей из точки (r_0, ϑ_0) будет удовлетворять уравнению (1.3). Уравнению (1.3) будут также удовлетворять координаты точки пересечения (R, ϑ) с круговой орбитой, следовательно

$$\frac{r_0}{R} = \frac{\mu(1-\cos\varphi)}{r_0(v_{0\varphi}+V\sin\psi)^2} + \cos\varphi - \frac{v_{0r}+V\cos\psi}{v_{0\varphi}+V\sin\psi}\sin\varphi \qquad (2.1)$$

Дальность полета задается формулой

$$L = R\varphi \qquad (2.2)$$

При наличии малых отклонений начальных параметров от расчетных получим отклонения от расчетной дальности.

$$\delta L = L^* - L \qquad (2.3)$$

Но так как $R=\text{const}$, то из (2.2) и (2.3) видно, что задача сводится к определению изменений угла φ в зависимости от малых изменений величины радиус-вектора начального положения r_0 (или от полярного угла начального положения на исходной орбите, т. е. ϑ_0), характеристической скорости V и угла ψ.

В линейном приближении для изменений угла φ будем иметь

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_0}\delta\vartheta_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial V}\delta V + \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\delta\psi \qquad (2.4)$$

Очевидно, что нужно найти производные

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_0}, \ \frac{\partial\varphi}{\partial V}, \ \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}$$

Воспользуемся уравнением (2.1), которое в общем виде может быть записано таким образом:

$$F(\mu, R, \varphi, r_0, v_{0\varphi}, v_{0r}, V, \psi) = 0. \qquad (2.5)$$

Варьируя (2.5), будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}\delta\varphi+\frac{\partial F}{\partial r_0}\delta r_0+\frac{\partial F}{\partial v_{0\varphi}}\partial v_{0\varphi}+\frac{\partial F}{\partial v_{0r}}\delta v_{0r}+\frac{\partial F}{\partial V}\delta V+\frac{\partial F}{\partial \psi}\delta\psi=0 \quad (2.6)$$

Поскольку $r_0=f_1(\vartheta_0)$, $v_{0r}=f_2(\vartheta_0)$, $v_{0\varphi}=f_3(\vartheta_0)$, где

$$f_1=\frac{p_0}{1+e_0\cos\vartheta_0},\quad f_2=e_0\sqrt{\frac{\mu}{p_0}}\sin\vartheta_0,\quad f_3=\sqrt{\frac{\mu}{p_0}}(1+e_0\cos\vartheta_0) \quad (2.7)$$

то

$$\delta r_0=\frac{\partial f_1}{\partial\vartheta_0}\delta\vartheta_0,\quad \delta v_{0r}=\frac{\partial f_2}{\partial\vartheta_0}\delta\vartheta_0,\quad \delta v_{0\varphi}=\frac{\partial f_3}{\partial\vartheta_0}\delta\vartheta_0 \quad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в (2.6), получаем

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}\delta\varphi+\left(\frac{\partial F}{\partial r_0}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial\vartheta_0}+\frac{\partial F}{\partial v_{0\varphi}}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial\vartheta_0}+\frac{\partial F}{\partial v_{0r}}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial\vartheta_0}\right)\delta\vartheta_0+\frac{\partial F}{\partial V}\delta V+\frac{\partial F}{\partial\psi}\delta\psi=0$$

откуда

$$\delta\varphi=-\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial r_0}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial\vartheta_0}+\frac{\partial F}{\partial v_{0\varphi}}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial\vartheta_0}+\frac{\partial F}{\partial v_{0r}}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial\vartheta_0}\right)\delta\vartheta_0-$$
$$-\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}\delta v-\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial F}{\partial\psi}\delta\psi \quad (2.9)$$

Сравнивая правые части выражений (2.4) и (2.9), получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_0}=-\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial r_0}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial\vartheta_0}+\frac{\partial F}{\partial v_{0\varphi}}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial\vartheta_0}+\frac{\partial F}{\partial v_{0r}}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial\vartheta_0}\right) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial V}=-\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial F}{\partial V},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}=-\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial F}{\partial\psi} \quad (2.11)$$

Из формулы (2.1) находим

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi}=\frac{\mu\sin\varphi}{r_0(v_{0\varphi}+V\sin\psi)^2}-\sin\varphi-\frac{v_{0r}+V\cos\psi}{v_{0\varphi}+V\sin\psi}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial F}{\partial V}=-\frac{2\mu(1-\cos\varphi)\sin\psi}{r_0(v_{0\varphi}+V\sin\psi)^3}-\frac{v_{0\varphi}\cos\psi-v_{0r}\sin\psi}{(v_{0\varphi}+V\sin\psi)^2}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial F}{\partial\psi}=-\frac{2\mu V(1-\cos\varphi)\cos\psi}{r_0(v_{0\varphi}+V\sin\psi)^3}+\frac{V(V+v_{0\varphi}\sin\psi+v_{0r}\cos\psi)}{(v_{0\varphi}+V\sin\psi)^2}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial F}{\partial r_0}=-\frac{\mu(1-\cos\varphi)}{r_0^2(v_{0\varphi}+V\sin\psi)^2}-\frac{1}{R} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_{0\varphi}}=-\frac{2\mu(1-\cos\varphi)}{r_0(v_{0\varphi}+V\sin\psi)^3}+\frac{v_{0r}+V\cos\psi}{(v_{0\varphi}+V\sin\psi)^2}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_{0r}}=-\frac{\sin\varphi}{v_{0\varphi}+V\sin\psi}$$

Из формулы (2.7) будем иметь

$$\frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_0} = \frac{e_0 p_0 \sin\vartheta_0}{(1+e_0\cos\vartheta_0)^2} = \frac{r_0^2}{\sqrt{\mu p_0}} v_{0r}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_0} = e_0 \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} \cos\vartheta_0 = v_{0\varphi} - \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} \qquad (2.13)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \vartheta_0} = -e_0 \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} \sin\vartheta_0 = -v_{0r}$$

Подставляя в (2.10) из формул (2.12) выражения для частных производных функций F по r_0, $v_{0\varphi}$ и v_{0r}, а также формулы (2.13), получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_0} = \left\{ \left[v_{0r} \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} + \frac{2\mu\left(v_{0\varphi} - \sqrt{\frac{\mu}{p_0}}\right)}{r_0(v_{0\varphi} + V\sin\psi)} \right](1-\cos\varphi) - \left[v_{0r}(v_{0\varphi} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + V\sin\psi) - (v_{0r} + V\cos\psi)\left(v_{0\varphi} - \sqrt{\frac{\mu}{p_0}}\right)\right]\sin\varphi + \frac{r_0^2 v_{0r}}{R\sqrt{\mu p_0}}(v_{0\varphi} + V\sin\psi)^2 \right\} \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{\mu}{r_0} - (v_{0r} + V\sin\psi)^2 \right]\sin\varphi - (v_{0r} + V\cos\psi)(v_{0\varphi} + V\sin\psi)\cos\varphi \right\}^{-1} \qquad (2.14)$$

Из (2.11) и (2.12) имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial V} = \frac{\frac{2\mu(1-\cos\varphi)}{r_0(v_{0\varphi} + V\sin\psi)}\sin\psi + (v_{0\varphi}\cos\psi - v_{0r}\sin\psi)\sin\varphi}{\left[\frac{\mu}{r_0} - (v_{0\varphi} + V\sin\psi)^2\right]\sin\varphi - (v_{0r} + V\cos\psi)(v_{0\varphi} + V\sin\psi)\cos\varphi} \qquad (2.15)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = \frac{V\left[\frac{2\mu(1-\cos\varphi)}{r_0(v_{0\varphi} + V\sin\psi)}\cos\psi - (V + v_{0\varphi}\sin\psi + v_{0r}\cos\psi)\sin\varphi\right]}{\left[\frac{\mu}{r_0} - (v_{0r} + V\sin\psi)^2\right]\sin\varphi - (v_{0r} + V\cos\psi)(v_{0\varphi} + V\sin\psi)\cos\varphi} \qquad (2.16)$$

Таким образом, согласно формуле (2.2), производные дальности по начальным параметрам легко вычисляются через найденные выше производные угловой дальности, для этого необходимо полученные выражения для $\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_0}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial V}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \psi}$ из формул (2.14), (2.15) и (2.16) подставить соответственно в следующие формулы:

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta_0} = R \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_0}, \quad \frac{\partial L}{\partial V} = R \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial V}, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = R \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi}$$

Полученные выражения показывают структуру зависимости отклонений дальности от малых изменений начальных параметров движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Охоцимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г.* Основы механики космического полета.—М.: Наука, 1990.
2. *Аппазов Р. Ф., Сытин О. Г.* Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли.—М.: Наука, 1987.
3. *Погорелов Д. А.* Теория кеплеровых движений летательных аппаратов.—М.: Физматгиз, 1961.
4. *Барсегян В. Р.* Область достижимости управляемого движения в гравитационном поле. Л., 1988, (Рукопись Деп. в ВИНИТИ, 18 февраля 1988 г. № 1325—В881).

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию 26.10.1992