ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 5-6, 1994 Механика

К УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ ОРТОТОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Киракосян Р.М.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

Փոփոխական հաստության գլանային օրթոտրոպ սալերի ճշգրտված տեսության մասին

Առաջարկվում է փոփոխական հաստության գլանային օրթոտրոպ սալի ճշգրտված տեսության մի տարբերակ, որը հաշվի է առնում լայնական սահքի դեֆորմացիաների ազդեցությունը:

Kirakosian R.M.

On the Improved Theory Cylindrical Ortotropic Plates of Variable Thickness

Предлагается один вариант уточненной теории цилиндрически ортотропных пластин переменной толщины, учитывающий влияние деформаций поперечных сдвигов.

В настоящее время существуют много вариантов уточненной теории анизотропных пластин, учитывающих влияние деформаций поперечных сдвигов. Несмотря на разницу подходов и степени строгости, все эти варианты для прогибов, частот собственных колебаний и критических сил пластинки дают практически одинаковые значения. Поэтому, если необходимо определить только отмеченные величины, то можно применить любой вариант уточненной теории. Если же из соображений прочности современных анизотропных материалов нужно определить еще и поперечные касательные напряжения, которые уже становятся расчетными, то в обязательном порядке следует применить такую уточненную теорию, в которой эти напряжения на поверхностях пластинки удовлетворяют заданным условиям. Для анизотропных пластин переменной толщины известны два основных таких вариантов [1]. В одном из них уточненная теория пластинок постоянной толщины [2] просто распространяется на случай пластинки переменной толщины. Для поперечных касательных напряжений принимаются такие параболические законы распределения по толщине, которые удовлетворяют условиям на поверхностях пластинки. Эти законы содержат поверхностные значения основных напряжений. В силу этого дальнейшие процедуры приводят к таким выражениям обобщенного закона Гука, в которых фигурируют поверхностные значения частных производных основных напряжений. При решении конкретных задач рекомендуется исключить эти значения из дифференциальных уравнений равновесия сплошной среды, записанных на поверхностях пластинки. Оставляя в стороне вопросы корректности двукратного удовлетворения поверхностным условиям, отметим лишь то, что при таком подходе не удается написать систему разрешающих уравнений задачи в окончательном виде и что получение решений конкретных задач крайне затруднено.

Сущность второго варианта заключается в следующем. Считается, что по толщине пластинки тангенциальные перемещения меняются линейно, а поперечные касательные напряжения - такими параболическими законами, которые содержат две произвольные функции и обеспечивают удовлетворение условиям на поверхностях пластинки. Далее эти функции определяются так, чтобы принятые независимые друг от друга законы распределения перемещений и напряжений каким-то образом связывались бы между собой. С этой целью, например, приравнивают работы поперечных касательных напряжений и перерезывающих сил пластинки или производят минимизацию интегралов от квадрата разностей тангенциальных перемещений или касательных напряжений, соответствующих двум группам принятых законов распределения и т.д. В любом случае для произвольных функций получаются очень громоздкие выражения, что существенно осложняет решение конкретных задач.

В работе [3] на примере прямолинейной ортотропии предложен один вариант уточненной теории пластинок переменной толщины, в которой также поперечные касательные напряжения удовлетворяют заданным поверхностным условиям. Эта теория позволяет написать в окончательном виде разрешающие уравнения плоской задачи и задачи изгиба пластинки и отличается существенной простотой.

1. Рассмотрим круглую пластинку переменной толщины h, обладающую цилиндрической ортотропией. Пластинку отнесем к системе цилиндрических координат r, θ, z, направив ось z вертикально вниз. Пусть пластинка несет поперечную нагрузку, интенсивности которой на поверхностях $z=+h/2$ и $z=-h/2$, приведенные к единице площади срединной плоскости, составляют Z^+ и Z^-, соответственно. Условия крепления краев пластинки произвольны. По аналогии [3] будем исходить из следующих допущений:

а) нормальные к срединной плоскости пластинки перемещения не зависят от координаты z;

б) нормальным напряжением σ_z на площадках, параллельных срединной плоскости, можно пренебречь;

в) касательные напряжения τ_{rz} и $\tau_{\theta z}$ по толщине пластинки меняются по законам

$$\tau_{rz}=\varphi_1+z\varphi_2+z^2\varphi_3,\quad \tau_{\theta z}=\psi_1+z\psi_2+z^2\psi_3 \tag{1.1}$$

где φ_i и ψ_i - неизвестные функции координат r и θ. Нетрудно заметить, что для обеспечения непротиворечивости дифференциальных уравнений равновесия сплошной среды, необходимо в выражениях напряжений σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$, следовательно, и перемещений u_r, u_θ, сохранить лишь члены, линейные по поперечной координате z. Это приведет к согласованным распределениям напряжений по толщине пластинки - линейному распределению основных напряжений будет соответствовать параболическое распределение поперечных касательных напряжений. Как показывает анализ решений конкретных задач [7], такой подход без заметного ущерба в точности вносит существенное упрощение. В результате этого, удается из поверхностных условий пластинки исключить четыре функции φ_2, φ_3, ψ_2, ψ_3. Относительно остальных пяти функций u, v, w, φ_1, ψ_1 получается разрешающая система дифференциальных уравнений десятого порядка. Подобно случаю пластинок постоянной толщины [2], эта система распадается на две системы, одна из которых относится к плоской задаче, а другая - к задаче изгиба пластинки.

Общий порядок разрешающих систем уравнений плоской задачи и задачи изгиба предлагаемой уточненной теории, подобно случаю пластинок постоянной толщины [2], равен десяти. В соответствии с этим, на каждом крае пластинки следует ставить по пять условий - два для плоской задачи, три - для задачи изгиба.

Условия свободного и шарнирно опертого краев формулируются обычным образом [2]. Несколько иначе выглядят условия заделки, поскольку в рамках изложенной теории удается обеспечить равенство нулю радиального перемещения во всех точках контурного сечения пластинки. Условия заделанного края можно представить в виде

$$u=0, \quad v=0 \qquad \text{(условия плоской задачи)} \tag{1.2}$$

$$\left.\begin{aligned} & w=0, \ \frac{\partial w}{\partial r}-a_r\varphi_1=0 \\ & \frac{\partial w}{\partial \theta}-a_\theta r\psi_1=0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(условия задачи изгиба)} \tag{1.3}$$

Забегая вперед, отметим, что применение предложенной теории к пластинкам постоянной толщины, подобно случаю прямолинейной ортотропии [7], здесь также приводит к приемлемым результатам. Во всех рассмотренных задачах значения поперечных касательных напряжений точно, а прогиб пластинки - практически, совпадают с соответствующими результатами теории [2].

2. Рассмотрим круглую кольцевую пластинку с внутренним и внешним радиусами a и b, толщина которой в радиальном направлении меняется по линейному закону

$$h=h_0+h_1 r \tag{2.1}$$

Здесь h_0 и h_1 - заданные параметры. Пусть пластинка несет только равномерно распределенную поперечную нагрузку $Z_2 = q$. Граничные условия таковы, что пластинка испытывает осесимметричное деформирование. Так как плоская задача не отличается от соответствующей задачи классической теории пластинок, то в дальнейшем будем рассматривать только задачу изгиба. Отметим, что в силу осесимметричности, из пяти функций w, φ_1, φ_3, ψ_1, ψ_3, описывающих изгиб пластинки, последние две тождественно равны нулю. И, поскольку функция φ_3 выражается через w и φ_1, то решение задачи осесимметричного изгиба пластинки сводится к отысканию лишь двух функций.

Введем обозначения:

$$z = h_0\delta, \quad r = \rho b, \quad \frac{h_0}{b} = s, \quad \frac{h_1}{s} = \gamma, \quad \frac{a}{b} = k, \quad h = h_0 H$$

$$\sqrt{\frac{B_\theta}{B_r}} = m, \quad \frac{B_r}{\sigma_0} = n, \quad a_r\sigma_0 = l, \quad \frac{\sigma q}{n\sigma_0 s^3} = q^{\bullet}, \quad u_r = h_0\overline{u}$$

$$w = h_0\overline{w}, \quad \frac{d\overline{w}}{d\rho} = \alpha, \quad \varphi_1 = \sigma_0 t, \quad s\alpha - lt = y, \quad N_r = \overline{N}_r\sigma_0 h_0$$

$$M_r = \overline{M}_r\sigma_0 h_0^2, \quad M_\theta = \overline{M}_\theta\sigma_0 h_0^2$$

Здесь ρ - безразмерная радиальная координата, σ_0 - характерное напряжение материала пластинки. Величины $\overline{u}$, H, $\overline{N}_r$, $\overline{M}_r$, $\overline{M}_\theta$ определяются формулами:

$$\overline{u} = -\delta y, \quad H = 1 + \gamma\rho$$

$$\overline{N}_r = \frac{H}{12}\left[8t - n\gamma s^2 H\left(\frac{dy}{d\rho} + \nu_r m^2\frac{y}{\rho}\right)\right] \tag{2.3}$$

$$\overline{M}_r = -\frac{nsH^3}{12}\left(\frac{dy}{d\rho} + \nu_r m^2\frac{y}{\rho}\right), \quad \overline{M}_\theta = -\frac{nsm^2H^3}{12}\left(\nu_r\frac{dy}{d\rho} + \frac{y}{\rho}\right)$$

Имея в виду, что в рассмотренном случае

$$\overline{N}_r = -\frac{q^{\bullet}ns^2}{12\rho}\left(\rho^2 - k^2\right) \tag{2.4}$$

для функции t получим

$$t = \frac{ns^2\gamma H}{8}\left(\frac{dy}{d\rho} + \nu_r m^2\frac{y}{\rho}\right) - \frac{q^{\bullet}ns^2\left(\rho^2 - k^2\right)}{8H\rho} \tag{2.5}$$

Пользуясь осесимметричностью, можно понизить порядок разрешающих уравнений. Подставив выражения $\overline{M}_r$, $\overline{M}_\theta$ и $\overline{N}_r$ в четвертое уравнение равновесия дифференциального элемента пластинки [2] относительно функции y, получим следующее уравнение второго порядка:

$$(1+\gamma\rho)\rho^2\frac{d^2y}{d\rho^2}+(1+4\gamma\rho)\rho\frac{dy}{d\rho}-m^2\left[1+(1-3\nu_r)\gamma\rho\right]y=\frac{q^*\rho(\rho^2-k^2)}{(1+\gamma\rho)^2} \qquad (2.6)$$

3. Рассмотрим сплошную пластинку радиуса R. Положим

$$r=c\rho,\quad \frac{h_0}{c}=s \qquad (3.1)$$

где c - неизвестная постоянная размерности длины. Остальные же обозначения (2.2) оставим прежними. Обозначения (3.1) позволяют вместо краевой задачи решить задачу Коши, что можно реализовать численно, по методу [4], [5].

Поскольку для сплошной пластинки $k=0$, то вместо уравнения (2.6) будем иметь

$$(1+\gamma\rho)\rho^2\frac{d^2y}{d\rho^2}+(1+4\gamma\rho)\rho\frac{dy}{d\rho}-m^2\left[1+(1-3\nu_r)\gamma\rho\right]y=\frac{q^*\rho^3}{(1+\gamma\rho)^2} \qquad (3.2)$$

где

$$\gamma=\frac{h_1}{s}=\frac{h_1c}{h_0},\quad q^*=\frac{6qc^3}{B_rh_0^3} \qquad (3.3)$$

В малой окрестности центра пластинки $\rho\le\rho_0$, где $\gamma\rho<<1$, уравнение (3.2) можно приближенно заменить уравнением

$$\rho^2\frac{d^2y}{d\rho^2}+\rho\frac{dy}{d\rho}-m^2y=q^*\rho^3 \qquad (3.4)$$

что совпадает с соответствующим уравнением пластинки постоянной толщины. Общее решение (3.4) имеет вид [6] *)

$$y=\begin{cases}A_1\rho^m+A_2\rho^{-m}+\dfrac{q^*}{9-m^2}\rho^3, & \text{при } m\ne3\\[2mm] A_1\rho^3+A_2\rho^{-3}+\dfrac{q^*}{6}\rho^3\ln\rho, & \text{при } m=3\end{cases} \qquad (3.5)$$

где A_1 и A_2 - постоянные интегрирования.

В силу осесимметричности, в центре пластинки радиальные перемещения u_r, следовательно и функция y, равны нулю. Поэтому положим

---

*) В [6] случай $m=3$ не рассмотрен

$$A_2 = 0 \tag{3.6}$$

Пользуясь (2.2), (3.5) и (3.6), для асимптотического поведения изгибающих моментов в окрестности центра пластинки получим

$$\overline{M}_r = -\frac{ns}{12}\begin{cases} A_1 m\left(1+\nu_r m^2\right)\rho^{m-1}, & m<3 \\ \dfrac{q^*}{6}\left(3+\nu_r m^2\right)\rho^2 \ln\rho, & m=3 \\ \dfrac{q^*}{9-m^2}\left(3+\nu_r m^2\right)\rho^2, & m>3 \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\overline{M}_\theta = -\frac{nsm^2}{12}\begin{cases} A_1\left(1+\nu_r m\right)\rho^{m-1}, & m<3 \\ \dfrac{q^*}{6}\left(1+3\nu_r\right)\rho^2 \ln\rho, & m=3 \\ \dfrac{q^*}{9-m^2}\left(1+3\nu_r\right)\rho^2, & m>3 \end{cases} \tag{3.8}$$

Из этих выражений видно, что изгибающие моменты в центре пластинки при $m<1$ ($B_\theta < B_r$) имеют особенность, а при $m>1$ ($B_\theta > B_r$) превращаются в нуль. В случае же изотропной пластинки ($m=1$), как и следовало ожидать, эти моменты принимают одинаковое конечное значение

$$\overline{M}_r\Big|_{\rho=0} = \overline{M}_\theta\Big|_{\rho=0} = -\frac{ns}{12}A_1\left(1+\nu_r\right) \tag{3.9}$$

Положив

$$\frac{dy}{d\rho} = \text{v} \tag{3.10}$$

вместо (3.2) получим следующую систему двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dy}{d\rho} = \text{v}, \quad \frac{d\text{v}}{d\rho} = \frac{q^*\rho}{(1+\gamma\rho)^3} - \frac{1+4\gamma\rho}{\rho(1+\gamma\rho)}\text{v} + m^2\frac{\left[1+\left(1-3\nu_r\right)\gamma\rho\right]}{\rho^2(1+\gamma\rho)}y = F(\rho, y, \text{v}) \tag{3.11}$$

Задаваясь некоторыми значениями параметров $\gamma > 0$, $A_1 < 0$, $q^* > 0$ и переходя к конечным разностям, можно значения функций y и v в последующих друг другу сечениях $\rho_i = \rho_{i-1} + \Delta\rho$ $(i = 1,2,3,\ldots)$ вычислить по формулам

$$y_i = y_{i-1} + \mathrm{v}_{i-1}\,\Delta\rho, \quad \mathrm{v}_i = \mathrm{v}_{i-1} + F_{i-1}\Delta\rho, \quad (i = 1,2,3,\ldots) \tag{3.12}$$

Здесь $\Delta\rho$ - шаг интегрирования. Начальные значения функций y и v определяются из выражений (3.5) для достаточно малого ρ_0

$$y_0 = \begin{cases} A_1\rho_0^m, & m < 3 \\ \dfrac{q^*}{6}\rho_0^3 \ln\rho_0, & m = 3 \\ \dfrac{q^*}{9-m^2}\rho_0^3, & m > 3 \end{cases}, \quad \mathrm{v}_0 = \begin{cases} A_1 m\rho_0^{m-1}, & m < 3 \\ \dfrac{q^*}{2}\rho_0^2 \ln\rho_0, & m = 3 \\ \dfrac{3q^*}{9-m^2}\rho_0^2, & m > 3 \end{cases} \tag{3.13}$$

Численное интегрирование продолжается до тех пор, пока не удовлетворяется заданное краевое условие пластинки.Рассмотрим два варианта краевых условий.

1. Условие свободного или шарнирно опертого края

$$\rho\mathrm{v} + \nu_r m^2 y = 0 \quad (M_r = 0) \tag{3.14}$$

2. Условие защемленного края

$$y = 0 \tag{3.15}$$

Так как с удалением от центра защемленной по контуру пластинки изгибающий момент M_r убывает и, не доходя до края, в некотором сечении превращается в нуль, то сначала удовлетворяется условие шарнирного опирания. Поэтому в ходе решения задачи защемленной по контуру пластинки попутно получается и решение задачи при шарнирном опирании.

Допустим краевое условие удовлетворяется при $\rho = \rho_R$. Тогда, с помощью (3.1) имеем

$$c = \frac{R}{\rho_R} \tag{3.16}$$

При желании, можно путем варьирования одного из параметров γ, A_1, q^* добиться того, чтобы краевое условие удовлетворилось бы при $\rho_R = 1$. После определения ρ_R решение задачи фактически завершается, поскольку можно вычислить значение любой расчетной величины. В частности, безразмерный прогиб определится по формуле

$$\overline{w} = -\frac{1}{s}\int_{\rho}^{\rho_R} \alpha d\rho = -\frac{1}{s}\int_{\rho}^{\rho_R} (y + lt)\,d\rho \tag{3.17}$$

Нетрудно заметить, что формулы изгибающих моментов (2.3), разрешающее дифференциальное уравнение (3.2) и краевые условия пластинки (3.14) (3.15) с точностью до обозначений совпадают со своими классическими аналогами (вместо $d\overline{w}/d\rho$ в них фигурирует y). В силу этого, для осесимметричного изгиба пластинки значения изгибающих моментов в уточненной и классической постановках совпадают. Влияние же поперечных сдвигов сказывается лишь на деформации, а следовательно, и на прогиб пластинки. На основе этого, решение задачи осесимметричного изгиба пластинки по уточненной теории можно получить из соответствующего классического решения, положив

$$y = \frac{d\overline{w}^{\kappa\ \wedge}}{d\rho} \tag{3.18}$$

откуда

$$\frac{d\overline{w}}{d\rho} = \frac{1}{s}\left(\frac{d\overline{w}^{\kappa\ \wedge}}{d\rho} + lt\right) \tag{3.19}$$

Здесь $\overline{w}^{\kappa\ \wedge}$ безразмерный прогиб в классической постановке.

4. Проведем сравнение предложенной уточненной теории и теории [2]. Удобнее это сделать на примере сплошной пластинки постоянной толщины, изготовленной из трансверсально-изотропного материала. В нижеприведенной таблице представлены безразмерные значения некоторых величин защемленной и шарнирно опертой пластинок толщины h и радиуса R при действии равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности q. Через G и ν обозначены модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала в плоскости изотропии, через G'- модуль сдвига в поперечном направлении, а через D- цилиндрическая жесткость пластинки. В случае защемления приведены значения максимального прогиба и опорного момента, а в случае шарнирного опирания- только значения максимального прогиба пластинки. Для защемленной пластинки теория [2] приводит к множеству решений, зависящих от точек крепления $z = \pm z_0$ опорного сечения пластинки. Эти решения мало отличаются друг от друга. Причем поправка изгибающего момента или отсутствует, или является незначительной величиной нестабильного знака. Предложенная же теория приводит к единственному решению, поскольку из-за отсутствия кубических по поперечной координате членов удается удовлетворить условие заделки во всех точках опорного сечения пластинки. При этом, как уже отмечалось в предыдущем пункте, изгибающие моменты поправки не получают.

Данные таблицы показывают, что учет влияния поперечных сдвигов в рамках обеих теорий приводит к качественно одинаковому результату - к увеличению прогибов пластинки. Предложенная теория для прогиба дает или одинаковую поправку, или поправку, незначительно большую, чем теория [2]. Значения же напряжения τ_{rz} по обеим теориям совпадают.

ТАБЛИ!ЦА 1

<table>
<tr><td colspan="4">Случай защемления по контуру</td><td colspan="2">Случай шарнирного опирания по контуру</td></tr>
<tr><td colspan="3">По теории Амбарцумяна С.А.</td><td rowspan="2">по предл. теории</td><td rowspan="2">по теории А.С.А.</td><td rowspan="2">по предл. теории</td></tr>
<tr><td>$z_0 = \frac{h}{2}$</td><td>$z_0 = \sqrt{\frac{3}{20}}h$</td><td>$z_0 = 0$</td></tr>
<tr><td>$W_{max} = \frac{qR^4}{64D}\left[1+\frac{8}{3(1-\nu)}\frac{G}{G'}\frac{h^2}{R^2}\right]$
$M_{on} = -\frac{qR^2}{8}\left[1+\frac{2(1+\nu)}{15(1-\nu)}\frac{G}{G'}\frac{h^2}{R^2}\right]$</td><td>$W_{max} = \frac{qR^4}{64D}\left[1+\frac{16}{5(1-\nu)}\frac{G}{G'}\frac{h^2}{R^2}\right]$
$M_{on} = -\frac{qR^2}{8}$</td><td>$W_{max} = \frac{qR^4}{64D}\left[1+\frac{4}{1-\nu}\frac{G}{G'}\frac{h^2}{R^2}\right]$
$M_{on} = -\frac{qR^2}{8}\left[1-\frac{1+\nu}{5(1-\nu)}\frac{G}{G'}\frac{h^2}{R^2}\right]$</td><td>$W_{max} = \frac{qR^4}{64D}\left[1+\frac{4}{1-\nu}\frac{G}{G'}\frac{h^2}{R^2}\right]$
$M_{on} = -\frac{qR^2}{8}$</td><td>$W_{max} = \frac{qR^4}{64D}\frac{5+\nu}{1+\nu}\left[1+\frac{16(1+\nu)}{5(1-\nu)(5+\nu)}\frac{G}{G'}\frac{h^2}{R^2}\right]$</td><td>$W_{max} = \frac{qR^4}{64D}\frac{5+\nu}{1+\nu}\left[1+\frac{4(1+\nu)}{(1-\nu)(5+\nu)}\frac{G}{G'}\frac{h^2}{R^2}\right]$</td></tr>
</table>

Отметим, что идентичные заключения для цилиндрического изгиба полосы постоянной толщины содержатся в работе [7].

Литература

1. *Григоренко Я. М., Василенко А.Т.* Теория оболочек переменной жесткости.- Киев: Наукова думка, 1981. 544 с.
2. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин.- М.: Наука, 1987. 360 с.
3. *Киракосян Р.М.* Об одной уточненной теории анизотропных пластич переменной толщины. - ИАН РА, Механика, 1991, т. 44, №3.
4. *Ильюшин А.А.* Пластичность. - М. - Л., Гостехиздат, 1948.
5. *Киракосян Р.М.* Об одной задаче круглой пластинки наименьшего объема за пределами упругости материала.- ИАН Арм.ССР, Механика, 1977, т. 30, №1.
6. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. - М.-Л.: Гостехиздат, 1947.

7. *Аревшатян Н.Г., Киракосян Р.М.* К цилиндрическому изгибу ортотропной полосы переменной толщины с учетом поперечных сдвигов. - ИАН РА, Механика, 1993, т. № 1-2, с. 32-40.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
9.04.1993