

Օ ՄԱԼՈՆԱՊՐՅՈՒՆՆՈՒԹՅԱՆ ԿՆՈՒՄՆՈՒԹՅԱՆ
ՍՈՍՏԱՎՈՅ ԿԼԻՆԱ

Сафарян Н. Б

Մաֆարյան Ն. Բ.

Նախընթացած թաղաղորշալ սեպի թեղաթափման մասին

Առանձնացված է թաղաղորշալ մարմնի միացման մակերևույթի անկյունային կերի շրջա-
կայքում լարումների վարքը հարթ լարվածային վիճակի դեպքում, երբ արտաքին եզրերից մեկը
ազատ է լարումներից, իսկ մյուս եզրում տեղափոխությունները հավասար են զրոյի:

N.B. Safarian

Low-stress Level of Plane-stressed Composed Wedge

В случае плоского напряженного состояния при помощи местного решения исследуется поведе-
ние поля напряжений в окрестности края поверхности соединения составного тела, когда один край
внешней поверхности свободен от напряжений, а на другом краю перемещения равны нулю.

Рассматривается напряженное состояние на крае контактной линии сос-
тавного клиновидного тела со степенным законом упрочнения материалов в
условиях плоского напряженного состояния. Фундаментальное исследование
в этой области для линейно-упругих составных тел приведено в монографии
[1]. В статьях [2-3] обсуждаются вопросы малонапряженности составных тел
со степенным упрочнением материалов.

В теории линейной упругости плоское напряженное состояние и плоская
деформация описываются одинаковыми математическими уравнениями, ме-
няются только некоторые физические параметры. В теории пластичности
плоское напряженное состояние и плоская деформация существенно отлича-
ются.

В настоящей работе, в случае плоского напряженного состояния, при по-
мощи местного решения исследуется поведение поля напряжений в окрест-
ности края поверхности соединения составного тела, когда один край внеш-
ней поверхности свободен от напряжений, а на другом крае перемещения
равны нулю. Аналогичная задача в случае плоской деформации рассмотрена
в работе [4].

В полярной системе координат угловая точка выбрана за начало системы
координат; ось $\theta = 0$ направлена по контактной поверхности, а ось z -

вдоль продольной оси тела. В каждой области поперечного сечения имеем уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} = 0 \quad (1)$$

Закон упрочнения

$$\sigma_0 = k \varepsilon_0^m \quad (2)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 + 3\tau_{r\theta}^2}; \quad \varepsilon_0 = 2\sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2 + \gamma_{r\theta}^2}$$

- соответственно, интенсивности касательных напряжений и деформации сдвига, m - показатель упрочнения. Принимается, что степени упрочнения m обоих материалов одинаковы, а модули деформации k различны.

Соотношения между компонентами деформаций, перемещений и напряжений будут

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} K \sigma_0^{1/m-1} (\sigma_r - \sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{2} K \sigma_0^{1/m-1} (\sigma_\theta - \sigma_r) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\sigma = 1/3(\sigma_r + \sigma_\theta)$ - среднее напряжение, $K = 1/k^{1/m}$ и, кроме того, принято условие несжимаемости $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0$.

В каждой из клиновидных областей $-\beta \leq \theta \leq 0$ и $0 \leq \theta \leq \alpha$, соответственно, компоненты напряжений и перемещений представим через неизвестные функции $f_1(\theta)$, $\psi_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$, $\psi_2(\theta)$ в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ri} &= 2k_i r^{-\lambda m} \left[\psi_i' + (3-2\lambda) f_i \right] \chi_i \\ \sigma_{\theta i} &= 2k_i r^{-\lambda m} \left[2\psi_i' + (3-\lambda) f_i \right] \chi_i \\ \tau_{r\theta i} &= k_i r^{-\lambda m} \left(f_i' - \lambda \psi_i \right) \chi_i \end{aligned}$$

$$\chi_i = \left[4(1-\lambda)^2 f_i^2 + 4(1-\lambda) f_i (\psi_i' + f_i) + 4(\psi_i' + f_i)^2 + (f_i' - \lambda \psi_i')^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} \quad (4)$$

$$u_i = r^{1-\lambda} f_i(\theta), \quad v_i = r^{1-\lambda} \psi_i(\theta), \quad i=1,2$$

Здесь функции $f_i(\theta)$ и $\psi_i(\theta)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left[(f_i' - \lambda \psi_i') \chi_i \right]' - 2 \left[(1 + \lambda m) \psi_i' + \lambda(1 + m(3 - 2\lambda)) f_i \right] \chi_i = 0 \quad (5)$$

$$\left[(2\psi_i' + (3 - \lambda) f_i) \chi_i \right]' + \left(1 - \frac{1}{2} \lambda m \right) (f_i' - \lambda \psi_i') \chi_i = 0$$

Граничные условия рассматриваемой задачи будут

$$\begin{aligned} f_1(\theta) = 0, \quad \psi_1(\theta) = 0 & \quad \text{при } \theta = -\beta \\ 2\psi_2(\theta) + (3 - \lambda) f_2(\theta) = 0; \quad f_2'(\theta) - \lambda \psi_2'(\theta) = 0 & \quad \text{при } \theta = \alpha \end{aligned} \quad (6)$$

На контактной поверхности имеем

$$\begin{aligned} [2\psi_1'(\theta) + (3 - \lambda) f_1(\theta)] \chi_1(\theta) = \gamma [2\psi_2'(\theta) + (3 - \lambda) f_2(\theta)] \chi_2(\theta) \\ (f_2'(\theta) - \lambda \psi_2'(\theta)) \chi_2(\theta) = \gamma (f_1'(\theta) - \lambda \psi_1'(\theta)) \quad \text{при } \theta = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$f_1(\theta) = f_2(\theta), \quad \psi_1(\theta) = \psi_2(\theta); \quad \gamma = \frac{k_1}{k_2}$$

Система дифференциальных уравнений (5) с условиями (6) - (7) является

задачей на собственные значения для определения $f_i(\theta)$, $\psi_i(\theta)$ и λ . Придавая различные числовые значения λ из (5) - (7), численными способами определим соотношения между параметрами α , β , γ , m . При условии $\lambda < 0$ в пространстве этих параметров будем иметь область малонапряженности. Принимая $\lambda = \lambda_* > 0$, находим гиперповерхности одинаковых степеней концентрации напряжений

$$F(\alpha, \beta, \gamma, m, \lambda_*) = 0$$

В случае $\lambda = 0$, то есть при конечных напряжениях, решение системы (1)

(3) представится в виде

$$\begin{aligned} \sigma_n = 2k_i (\psi_i' + 3f_i) \chi_i, \quad \sigma_{\theta i} = 2k_i (2\psi_i' + 3f_i) \chi_i \\ \tau_{r\theta i} = k_i f_i' \chi_i, \quad \chi_i = \left[f_i'^2 + 4(f_i^2 + 3f_i \psi_i' + \psi_i'^2) \right]^{\frac{m-1}{2}} \quad (8) \\ u_i(r, \theta) = r f_i(\theta), \quad v_i(r, \theta) = r \psi_i(\theta) \end{aligned}$$

Приведенные выражения компонентов напряжений и перемещений (8) будут решениями системы уравнений (1)-(3), если $f_i(\theta)$ и $\psi_i(\theta)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (f_i' \chi_i)' - 2\psi_i' \chi_i &= 0 \\ \left[(2\psi_i' + 3f_i) \chi_i \right]' + f_i' \chi_i &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

При смешанных граничных условиях, то есть когда одна из поверхностей, образующих ребро, свободна от напряжений, а другое ребро жестко закреплено, имеем

$$\begin{aligned} f_i(-\beta) = 0, \quad \psi_i(-\beta) = 0 \\ 2\psi_2'(\alpha) + 3f_2(\alpha) = 0, \quad f_2'(\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

На контактной поверхности имеем

$$\begin{aligned} (2\psi_2'(\theta) + 3f_2(\theta))\chi_2(\theta) = \gamma(2\psi_1'(\theta) + 3f_1(\theta))\chi_1(\theta) \\ f_1(\theta) = f_2(\theta), \quad \psi_1(\theta) = \psi_2(\theta) \quad \text{при } \theta = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Система дифференциальных уравнений (9) с граничными условиями (10) (11) определяет гиперповерхность $F(\alpha, \beta, \gamma, m, 0) = 0$ конечных напряжений, отделяющую зону малонапряженности от зоны сильной концентрации.

Для построения этой поверхности удобно свести систему дифференциальных уравнений (9)-(11) к системе из четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \psi_i' &= \frac{1}{2}(F_i - 3f_i), \quad f_i' = \tau_i, \quad F_i' = \Phi_i \\ \tau_i' &= \frac{I_i(F_i - 3f_i) + (1-m)\tau_i(F_i\Phi_i + 3f_i\tau_i)}{I_i + (m-1)\tau_i^2} \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (12)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} I_i &= \tau_i^2 + F_i^2 + 3f_i^2 \\ \Phi_i &= \left\{ (1-m)F_i\tau_i [3(m-1)f_i\tau_i^2 - I_i(F_i - 3f_i)] + \right. \\ &+ [I_i\tau_i + 3(m-1)f_iF_i\tau_i][I_i + (m-1)\tau_i^2] \left. \right\} / \left\{ (1-m)^2 F_i^2 \tau_i^2 - \right. \\ &\left. - [I_i + (m-1)F_i^2][I_i + (m-1)\tau_i^2] \right\}, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Граничные условия для системы (12) будут

$$f_1(\theta) = 0, \quad \psi_1(\theta) = 0 \quad \text{при } \theta = -\beta \quad (13)$$

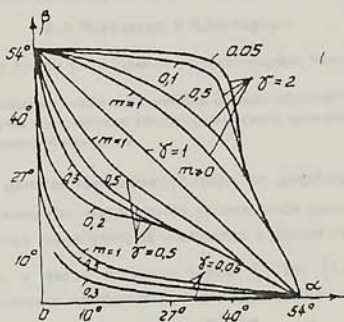
$$F_2(\theta) = 0, \quad \tau_2(\theta) = 0 \quad \text{при } \theta = \alpha$$

На контактной поверхности имеем

$$F_2(\theta)\chi_2(\theta) = \gamma F_1(\theta)\chi_1(\theta), \quad \tau_2(\theta)\chi_2(\theta) = \gamma \tau_1(\theta)\chi_1(\theta), \quad (14)$$

$$f_1(\theta) = f_2(\theta), \quad \psi_1(\theta) = \psi_2(\theta) \quad \text{при } \theta = 0$$

Рассмотрим сначала случай $\gamma > 1$, то есть когда более жесткий материал закреплен. На фиг. 1 показаны ближайшие к началу координат кривые, для которых степень упрочнения m , определяемая системой (12)-(14), велика. При $\gamma \rightarrow 1$, для произвольной степени упрочнения m , эти кривые вырождаются в прямую $\alpha + \beta = 54^\circ$, что соответствует величине угла, разграничивающего области конечных и бесконечных напряжений в вершине однородного клина с углом $\alpha + \beta$. Причем, область конечных напряжений в этом случае соответствует углам $0 < \alpha + \beta \leq 54^\circ$.



фиг. 1

Для $\gamma < 1$, то есть когда более жесткий материал имеет свободную от напряжений поверхность, граничные кривые, определяемые уравнениями (12)-(14), показаны на фиг. 1 при разных значениях степени упрочнения m . При значениях $\gamma = \gamma_0 < 1$ эти кривые более и более приближаются к координатным осям с уменьшением степени упрочнения m .

Из характера изменения этих кривых заключаем, что при уменьшении степени упрочнения m зона малонапряженности увеличивается, если закреплен край клина из более сильного материала, и наоборот, зона уменьшается, если закреплен край клина из более слабого материала.

Автор благодарит А. Оганнисяна за помощь в проведении численных расчетов.

Л и т е р а т у р а

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. - Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1987. 380 с.
2. Забян М. А. Некоторые задачи концентрации напряжений в угловой точке контактной поверхности составного тела со степенным упрочнением. - Докл.АН АрмССР, 1982, т.74, № 1, с.18-25.
3. Забян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. - М.: Наука, 1992. 712 с.
4. Аксентян О.К. Лущик О.Н. Об условиях ограниченности напряжений у ребра вставного клина. - МТТ, 1978, № 5, с.102-108.

Поступила в редакцию

8.04. 1993

