

О ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ МАЛОНАПРЯЖЕННОГО
НЕОДНОРОДНО-СОСТАВНОГО КЛИНА

Акопян А.Г.

Ա. Գ. Հակոբյան

Թերարված անհամասեռ-բաղադրյալ սեպի հարթ դեֆորմացիայի մասին

Դիտարկվում է ասիմետրիկ օրենքով ամրապնդվող, բաղադրյալ, սեպաձև մարմնի կոնֆուրմացիայի մակերեսային եզրին թերարվածության վիճակի վրա նյութի անհամասեռության ազդեցությունը հարթ դեֆորմացիայի դեպքում:

Накобян А.Г.

On The Plane Deformation of Low-Stress Level Nonhomogeneous-Compound Wedge

Рассматривается влияние неоднородности материала на малонапряженное состояние на крае контактной поверхности составного клиновидного тела, со степенным законом упрочнения, с условиях плоской деформации. Принимаем, что одна грань клина свободна, а на другой задано условие гладкого контакта.

Решение аналогичной задачи для однородного составного клина изложено в монографии [1]. Вопросам концентрации напряжений в угловой точке составного, однородного линейно-упругого тела, при плоской деформации, посвящены работы [2,3]. Задачи малонапряженности неоднородно-составного клина со свободными гранями, при продольном сдвиге и плоской деформации, рассмотрены в работе [4].

1. Постановка задачи. Пусть два призматических тела, соединенные по боковым поверхностям полным прилипанием, находятся в состоянии плоской деформации. Механические характеристики обоих материалов считаются неоднородными. Одна из двух других боковых поверхностей свободна от нагрузок, а другая опирается на жесткий неподвижный штамп с плоской, абсолютно гладкой подошвой. В поперечном сечении этого тела, в окрестности угловой точки поверхности соединения, проведем полярную систему координат с центром в вершине клиновидного края поверхности.

В каждой клиновидной области имеем дифференциальные уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

соотношения между компонентами деформаций и перемещений

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ 2\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.2)$$

зависимости между компонентами напряжений и деформаций

$$\begin{aligned} \sigma_r - \sigma = 2 \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (\epsilon_r - \epsilon), \quad \sigma_\theta - \sigma = 2 \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (\epsilon_\theta - \epsilon) \\ \tau_{r\theta} = 2 \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \gamma_{r\theta}, \quad \sigma = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \tau_{r\theta}^2}, \quad \epsilon_0 = \sqrt{(\epsilon_r - \epsilon_\theta)^2 + 4\gamma_{r\theta}^2}$$

- интенсивности напряжений и деформаций, между которыми принимается зависимость

$$\sigma_0 = K \epsilon_0^m, \quad K = K(\theta), \quad 0 \leq m \leq 1 \quad (1.4)$$

где функция $K(\theta)$ характеризует неоднородные деформативные свойства материалов и определяется из экспериментов. Степени упрочнения m у обоих материалов принимаются одинаковыми, а функции $K(\theta)$ - различными.

В каждой области допускается условие несжимаемости материала $\epsilon = 0$, то есть

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (1.5)$$

Принимаем край $\theta = \alpha$ свободным, то есть $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$, а на крае $\theta = -\beta$ касательное напряжение и нормальное перемещение равны нулю $\tau_{r\theta} = v = 0$.

Величины в областях $0 \leq \theta \leq \alpha$, $-\beta \leq \theta \leq 0$ обозначим индексами $i = 1, 2$.

2. Случай $\lambda \neq 1$. Поле перемещений в каждой области, удовлетворяющее условию несжимаемости (1.5), в окрестности точки $r = 0$ представим в виде

$$u_i = r^\lambda f_i', \quad v_i = -(\lambda+1)r^\lambda f_i$$

где $f_i = f_i(\lambda, \theta)$ и λ - соответственно, искомая собственная функция и собственное значение задачи.

Компоненты напряжений представляются в виде

$$\sigma_{\theta i} = \sigma_{\theta i} + 4\lambda K_i r^{(\lambda-1)m} f_i' \chi_i, \quad \tau_{r\theta i} = K_i r^{(\lambda-1)m} [f_i'' + (1-\lambda^2)f_i] \chi_i$$

где

$$\chi_i = \left\{ \sqrt{[f_i'' + (1-\lambda^2)f_i]^2 + 4\lambda^2 f_i'^2} \right\}^{m-1}$$

Удовлетворив дифференциальным уравнениям равновесия (1.1), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \left\{ K_i [f_i'' + (1-\lambda^2)f_i] \chi_i \right\}' + K_i \left(1 - \frac{\eta^2}{\lambda^2} \right) [f_i'' + (1-\lambda^2)f_i] \chi_i + \\ + 4\eta (K_i f_i' \chi_i)' = 0, \quad \eta = \lambda[1 + (\lambda-1)m] \end{aligned} \quad (2.1)$$

и к выражению

$$\sigma_{\theta i} = -\frac{r^{(\lambda-1)m}}{(\lambda-1)m} \left\{ \left(K_i [f_i'' + (1-\lambda^2)f_i] \chi_i \right)' + 4\eta K_i f_i' \chi_i \right\}, \quad \lambda \neq 1$$

Граничные условия на внешних поверхностях клина

$$\left(K_i [f_i'' + (1-\lambda^2)f_i] \chi_i \right)' + 4\eta K_i f_i' \chi_i = 0, \quad f_i'' + (1-\lambda^2)f_i = 0 \quad \text{при } \theta = \alpha$$

$$f_2'' = f_2 = 0 \quad \text{при } \theta = -\beta \quad (2.2)$$

на контактной поверхности

$$\begin{aligned} \left\{ K_1 [f_1'' + (1-\lambda^2)f_1] \chi_1 \right\}' + 4\eta K_1 f_1' \chi_1 = \\ = \left\{ K_2 [f_2'' + (1-\lambda^2)f_2] \chi_2 \right\}' + 4\eta K_2 f_2' \chi_2 \\ [f_1'' + (1-\lambda^2)f_1] \chi_1 = \gamma [f_2'' + (1-\lambda^2)f_2] \chi_2, \quad \gamma = \frac{K_2(0)}{K_1(0)} \end{aligned}$$

$$f_1 = f_2, \quad f_1' = f_2' \quad \text{при } \theta = 0 \quad (2.3)$$

Система дифференциальных уравнений (2.1) с граничными условиями (2.2), (2.3) - трехточечная задача на собственные значения для определения $f_i(\lambda, \theta)$ и λ .

Полуобратным способом, придавая различные значения $\lambda = \lambda_0 < 1$ из (2.1)-(2.3) численным способом определяются, в конечном счете, соотношения между параметрами α, β, γ, m и параметрами неоднородности материалов для данной степени концентрации напряжений.

При условии $\lambda = \lambda_0 > 1$ в пространстве этих параметров определится область малонапряженности.

При подстановке $f_i' = f_i F_i$ снижается порядок уравнения (2.1) с граничными условиями (2.2), (2.3).

3. Случай $\lambda = 1$. В специальном исследовании нуждается случай конечных напряжений. Поле перемещений, удовлетворяющее условию несжимаемости (1.5), представим в виде

$$u_i = r f_i', \quad v_i = -2r f_i', \quad w_i = 0$$

где $f_i = f_i(\theta)$ - искомая функция θ .

Соответственно, компоненты напряжений можно записать в виде

$$\sigma_{\theta i} = \sigma_{\theta i} + 4K_i \psi_i \chi_i, \quad \tau_{\theta i} = K_i \psi_i \chi_i \quad (3.1)$$

где

$$\chi_i = \left(\sqrt{\psi_i'^2 + 4\psi_i^2} \right)^{m-1}, \quad \psi_i = f_i'(\theta)$$

Подставляя (3.1) в уравнения равновесия (1.1), приходим к выражениям

$$\sigma_{\theta 1} = 2 \int_{\theta}^{\alpha} K_1 \psi_1' \chi_1 d\theta, \quad \sigma_{\theta 2} = 2 \left(\int_0^{\alpha} K_1 \psi_1' \chi_1 d\theta + \int_{\theta}^0 K_2 \psi_2' \chi_2 d\theta \right)$$

где использованы условия отсутствия нормальных напряжений на свободном крае клина и их равенство на контактной поверхности $\theta = 0$.

Для функции $\psi_i(\theta)$ получается система дифференциальных уравнений

$$\left(K_i \psi_i' \chi_i \right)' + 4K_i \psi_i \chi_i = 0 \quad (3.2)$$

с граничными условиями

$$\psi_i'(\alpha) = \psi_2'(-\beta) = 0 \quad (3.3)$$

и с условиями на контактной поверхности

$$\psi_1' \chi_1 = \gamma \psi_2' \chi_2, \quad \psi_1 = \psi_2 \quad \text{при} \quad \theta = 0 \quad (3.4)$$

где $\gamma = K_2(0)/K_1(0)$.

После некоторых преобразований из (3.2) следует

$$(\psi_i'' + 4\psi_i) \frac{m\psi_i'^2 + 4\psi_i^2}{\psi_i + 4\psi_i^2} + \frac{K_i'}{K_i} \psi_i' = 0 \quad (3.5)$$

Откуда, вводя новую функцию $\varphi_i = \psi_i' / \psi_i$, получим систему уравнений первого порядка

$$\varphi_i' = -\frac{K_i'}{K_i} \frac{\varphi_i^2 + 4}{m\varphi_i^2 + 4} \varphi_i - \varphi_i^2 - 4 \quad (3.6)$$

с граничными условиями

$$\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(-\beta) = 0 \quad (3.7)$$

Условие контакта (3.4) примет вид

$$\varphi_1(0) \left[\sqrt{\varphi_1^2(0) + 4} \right]^{m-1} = \gamma \varphi_2(0) \left[\sqrt{\varphi_2^2(0) + 4} \right]^{m-1} \quad (3.8)$$

Таким образом, система уравнений (3.6) с краевыми условиями (3.7), (3.8) определяет гиперповерхность конечных напряжений с учетом неоднородности материалов и физической нелинейности.

Для случая экспоненциального закона неоднородности

$$K_i(\theta) = k_i \exp(2h\theta) \quad (3.9)$$

где k_i и h_i - заданные постоянные, построено численное решение краевой задачи (3.3)-(3.5), которая устанавливает зависимость $\beta = \beta(\alpha, n, \gamma, h)$. Здесь обозначено $n = 1/m$, $\gamma = k_2/k_1$. С точки зрения численного решения, уравнения (3.6)-(3.8) оказались неудобными из-за быстрого возрастания значений функций $\varphi_i(\theta)$, что приводило к переполнению порядка числа при выполнении арифметической операции ЭВМ. Для построения численного решения задачи (3.3)-(3.5), вводя новую функцию $g(\theta)$, сначала уравнения (3.5) приводим к каноническому виду

$$\begin{aligned} \psi_i' &= g_i \\ g_i' &= -2h \frac{4\psi_i^2 + g_i^2}{4\psi_i^2 + mg_i^2} - 4\psi_i \end{aligned} \quad (3.10)$$

с трехточечными краевыми условиями:

точке $\theta = \alpha$

$$g_1(\alpha) = 0 \quad (3.11)$$

точке $\theta = 0$

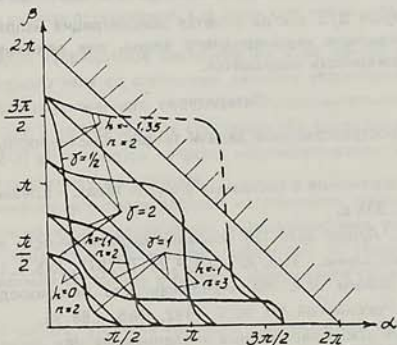
$$g_1(0) \left[\sqrt{4\psi_1^2(0) + g_1^2(0)} \right]^{m-1} = \gamma g_2(0) \left[\sqrt{4\psi_2^2(0) + g_2^2(0)} \right]^{m-1} \quad (3.12)$$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0)$$

в точке $\theta = -\beta$

$$g_2(-\beta) = 0 \quad (3.13)$$

Задавая произвольное значение $\psi_1(\alpha) = A$, систему уравнений (3.10) с условием (3.11) сведем к задаче Коши, которая решается методом Рунге-Кутты [5] в интервале $0 \leq \theta \leq \alpha$. Находя значения $\psi_1(0)$ и $g_1(0)$, из (3.12) определяем $\psi_2(0)$ и $g_2(0)$, которые, принимая как начальные условия, продолжаем численное интегрирование (3.10) до той точки $\theta_* = -\beta$, где впервые выполняется условие (3.13). Для различных значений параметра A эта точка $\theta_* = -\beta$ остается неизменной, что является следствием однородности уравнений (3.5).



фиг.1

Результаты численного решения приведены на фиг.1, откуда следует, что с изменением степени неоднородности h , зоны малонапряженности (ниже кривых) заметно изменяются, как для составного, так и для сплошного ($\gamma = 1$) неоднородного клина.

4. Линейно-упругий неоднородно-составной клин. Если составной клин изготовлен из линейно-упругих неоднородных материалов, принимая в уравнениях (3.6)-(3.8) $m = 1$ и экспоненциальный закон неоднородности (3.9), приходим к следующему трансцендентному уравнению предельных кривых малонапряженности:

$$\frac{\operatorname{tg}(\sqrt{4-h^2}\alpha)}{\sqrt{4-h^2}-h\operatorname{tg}(\sqrt{4-h^2}\alpha)} + \gamma \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{4-h^2}\beta)}{\sqrt{4-h^2}+h\operatorname{tg}(\sqrt{4-h^2}\beta)} = 0 \quad (4.1)$$

Здесь соблюдается условие $|h| < 2$.

Для однородного составного линейно-упругого клина, принимая $h = 0$, из (4.1) следует уравнение

$$\operatorname{tg} 2\alpha + \gamma \operatorname{tg} 2\beta = 0$$

Во время исследования случая $|h| \geq 2$ выяснилось, что гиперповерхности конечных напряжений в интервале $0 < \alpha + \beta \leq 2\pi$ не пересекаются с координатной плоскостью $\alpha\beta$ (эти уравнения не приводятся). Это означает, что при таких значениях параметра h составной линейно-упругий клин находится в состоянии малонапряженности.

В рассматриваемой задаче, если для сплошного однородного клина при растворе угла больше $\pi/2$ всегда имеется концентрация напряжений в вершине, то для сплошного неоднородного клина, как показывают графики (фиг.1), эта закономерность нарушается.

Литература

1. *Задоян М.А.* Пространственные задачи теории пластичности. - М.: Наука, 1992. 384 с.
2. *Чобанян К.С.* Напряжения в составных упругих телах. - Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1987. 338 с.
3. *Аксентян О.К., Лущик О.Н.* Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина. - Изв. АН СССР, МТТ, 1978, №5, с.102-108.
4. *Акопян А.Г., Задоян М.А.* Малонапряженность неоднородно-составных клиньев. - Изв. Российской АН, МТТ, 1992, №5, с.88-96.
5. *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1979. 312 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
1.04.1993