

ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЕБРИСТОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ
КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА НАИБОЛЬШЕЙ
НИЗШЕЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Белубекян Э. В., Погосян А. Г.

Բելոբեկյան Է. Վ., Պոգոսյան Ա. Գ.

Կոմպոզիցիոն նյութից պարրաստված, սեփական տարանունների ամենամեծ ստորին հաճախականություն ունեցող, կողավոր սալի նախագծումը

Դիտարկվում է կոմպոզիցիոն նյութից պարրաստված ուղղանկյուն սալ, որը երկու կողմերով ուժեղացված է կոշտության կողերով: Սալի հաստություն կշռի ղեարքում, որոշվում են նրա ֆիզիկական և երկրաչափական պարամետրերը, որոնք ապահովում են սեփական տարանունների ստորին հաճախականության մեծագույն արժեք:

E. V. Belubekian, A. G. Pogosian

The Making Designs of Plate from Composite Material with Ribs when its
First Natural Frequency is Maximal

Рассматривается прямоугольная пластинка, изготовленная из композиционного материала, усиленная по двум кромкам ребрами жесткости. При заданном весе конструкции определяются оптимальные физические и геометрические параметры пластинки, обеспечивающие наибольшее значение низшей частоты собственных колебаний.

Рассматривается прямоугольная пластинка размерами $a \times b \times h_2$, шарнирно опертая по краям $y = 0$, $y = b$ и усиленная ребрами жесткости размерами $\alpha h_1 \times h_1 \times b$ по свободным кромкам $x = \pm a/2$.

Предполагается, что пластинка изготовлена из монослоев ВКМ, уложенных поочередно под углами $\pm \varphi$ к оси x , а в ребрах монослои ориентированы вдоль оси y .

Ставится задача определения оптимального вектора $\bar{x} = \{\alpha, h_1, h_2, \varphi\}$, обеспечивающего наибольшее значение низшей частоты собственных колебаний ω пластинки при постоянном весе конструкции.

Уравнение собственных колебаний рассматриваемой ортотропной пластинки имеет вид :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

где: $D_{ik} = B_{ik} h_2^3 / 12$ - жесткости пластинки, B_{ik} - упругие характеристики материала в главных геометрических направлениях, определяемые через характеристики ВКМ по известным формулам поворота [1], ρ - плотность ВКМ.

Граничные условия задачи запишутся в виде:

- шарнирного опирания

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b \quad (2)$$

- симметрии (в случае симметричной формы колебаний)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (3)$$

- антисимметрии (в случае антисимметричной формы колебаний)

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (4)$$

- упругого опирания на ребро жесткости

$$C \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (5)$$

$$E_1 J \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

при $x = a/2$

где C - жесткость прямоугольного ребра на кручение [2]:

$$C = G_{23} \alpha h_1^4 \beta, \quad d = \alpha \sqrt{G_{23} / G_{13}}$$

$$\beta = d^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} d \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n\pi}{2d} \right] \quad (6)$$

$A = \alpha h_1^2$ - площадь поперечного сечения ребра; G_{13} , G_{23} - модули сдвига материала ребра в плоскостях xOz и yOz .

Решение уравнения (1) с удовлетворением условий (2), (3), (4) принимает в виде:

- для симметричной формы

$$w = (C_1 \operatorname{ch} \mu_1 \lambda_m x + C_2 \cos \mu_2 \lambda_m x) \sin \omega t \sin \lambda_m y \quad (7)$$

- для антисимметричной формы

$$w = (C_1 \operatorname{sh} \mu_1 \lambda_m x + C_2 \sin \mu_2 \lambda_m x) \sin \omega t \sin \lambda_m y \quad (8)$$

где

$$\mu_{1,2} = \sqrt{\frac{D_3^2 + D_{11} D_{22} (k_m^2 - 1) \pm D_3}{D_{11}}} \quad (9)$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{b}, \quad D_3 = D_{12} + 4D_{66}, \quad k_m^2 = \omega^2 \frac{\rho h_2}{\lambda_m^4 D_{22}}$$

Здесь принято $k_m > 1$, так как в случае наличия ребер ω будет больше частоты собственных колебаний пластинки со свободными кромками, где принимается $k_m = 1$.

Из условий (5) получается система однородных уравнений относительно коэффициентов C_1, C_2 . Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к следующему уравнению относительно коэффициента k_m :

- для симметричной формы колебаний

$$\begin{aligned} & \frac{B_{11}}{B_{22}} \mu_1 \mu_2 f_1 (\mu_1^2 + \mu_2^2) \operatorname{sh} \mu_1 \lambda_m x \sin \mu_2 \lambda_m x - \\ & - \frac{B_{11}}{B_{22}} f_2 (f_3 - k_m^2) (\mu_1^2 + \mu_2^2) \operatorname{ch} \mu_1 \lambda_m x \cos \mu_2 \lambda_m x + \\ & + \mu_1 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \mu_2^2 - f_4 - f_1 f_2 (f_3 - k_m^2) \right) \operatorname{sh} \mu_1 \lambda_m x \cos \mu_2 \lambda_m x + \\ & + \mu_2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \mu_1^2 + f_4 - f_1 f_2 (f_3 - k_m^2) \right) \operatorname{ch} \mu_1 \lambda_m x \sin \mu_2 \lambda_m x = 0 \end{aligned}$$

где

$$f_1 = 12\pi m \frac{G_{23} \beta h_1^4}{B_{12} b h_2^3}, \quad f_2 = \pi m \frac{\omega h_1^2}{h_2}$$

$$f_3 = \frac{E_1 h_1^2}{B_{22} h_2^2}, \quad f_4 = \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}}$$

- для антисимметричной формы уравнение относительно k_m получается из (10) заменой

$\text{sh} \mu_1 \lambda_m x$ на $\text{ch} \mu_1 \lambda_m x$, $\text{ch} \mu_1 \lambda_m x$ на $\text{sh} \mu_1 \lambda_m x$

$\sin \mu_2 \lambda_m x$ на $-\cos \mu_2 \lambda_m x$, $\cos \mu_2 \lambda_m x$ на $\sin \mu_2 \lambda_m x$

После определения k_m из (10), частоты собственных колебаний пластинки, согласно (9), определяются по формуле:

$$\omega_m = \lambda_m^2 k_m \sqrt{\frac{D_{22}}{\rho h_2}} \quad (11)$$

Оптимизационную задачу определения параметров α , h_1 , h_2 , φ конструкции заданного веса, обеспечивающих максимальное значение низшей частоты собственных колебаний, можно представить в виде задачи нелинейного программирования:

Найти

$$\omega = \max_{\bar{x}} \min_m \omega_m, \quad \bar{x} = \{\alpha, h_1, h_2, \varphi\} \quad (12)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} h_0 &\leq h_1 \leq 0,2b, & 0,2 &\leq \alpha \leq 5,0, \\ \delta &\leq h_2 \leq h_0, & 0^\circ &\leq \varphi \leq 90^\circ, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{ah_2 + 2\alpha h_1^2}{a + 2\alpha h_1} = h_0$$

Первые три ограничения обусловлены пределами применимости классической теории балок и пластин. Для δ принимается: $\delta = 0,01b$ при $a \geq b$; $\delta = 0,01a$ при $a \leq b$. Последнее ограничение обеспечивает постоянство объема (веса) конструкции, h_0 - толщина соответствующей гладкой пластинки заданного веса.

Задача (12), (13) решается методом деформируемого многогранника [3].

Численная реализация проведена для различных значений $\xi = (a + 2\alpha h_1) / b = 0,5; 1; 2$ при $\bar{h}_0 = h_0 / b = 0,015; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05$.

В качестве материала принят ВКМ со следующими приведенными характеристиками:

$$\bar{B}_{11}^0 = 1, \quad \bar{B}_{22}^0 = B_{22}^0 / B_{11}^0 = 0,0818, \quad \bar{B}_{12}^0 = B_{12}^0 / B_{11}^0 = 0,0196,$$

$$\bar{B}_{66}^0 = B_{66}^0 / B_{11}^0 = 0,04297, \quad G_{23} / G_{13} = 1,$$

$$\bar{E}_1 = E_1 / B_{11}^0 = 0,995, \quad \bar{G}_{23} = G_{23} / B_{11}^0 = 0,0497$$

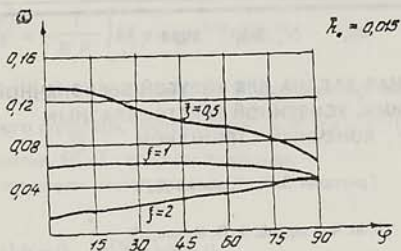
Полученные значения оптимальных параметров конструкции и соответствующих наибольших низших частот $\bar{\omega} = \omega / \sqrt{\rho b^2 / B_{11}^0}$ приведены в табл. 1.

Там же приведены наибольшие значения низших частот собственных колебаний $\bar{\omega}^0$ для сплошной пластинки заданного веса, которые получаются при $\varphi = 90^\circ$. Следует отметить, что оптимальные значения $\bar{\omega}$ при всех значениях \bar{h}_0 соответствуют симметричной форме колебаний при $m = 1$.

Таблица 1

ξ	\bar{h}_0	α	\bar{h}_1	\bar{h}_2	φ	$\bar{\omega}$	$\bar{\omega}^0$
0.5	0.015	0.541	0.0704	0.00503	0°	0.1303	0.0427
	0.02	0.505	0.0858	0.00621	0°	0.167	0.0569
	0.03	0.447	0.116	0.00838	0°	0.236	0.0854
	0.04	0.404	0.141	0.0102	0°	0.304	0.114
	0.05	0.370	0.167	0.0118	0°	0.367	0.142
1.0	0.015	3.168	0.038	0.00771	0°	0.0624	0.0427
	0.02	3.464	0.046	0.00784	0°	0.08695	0.0569
	0.03	4.071	0.056	0.00821	0°	0.135	0.0854
	0.04	2.108	0.0859	0.0138	0°	0.175	0.114
	0.05	2.267	0.0957	0.0146	0°	0.224	0.142
2.0	0.015	0.2	0.0422	0.0148	90°	0.0430	0.0427
	0.02	0.2	0.0472	0.0197	90°	0.0574	0.0569
	0.03	0.2	0.0572	0.0297	90°	0.0859	0.0854
	0.04	0.2	0.0672	0.0396	90°	0.114	0.114
	0.05	0.2	0.0908	0.0492	90°	0.143	0.142

Как следует из табл. 1, оптимальное ребрирование пластинки приводит к увеличению низшей частоты собственных колебаний почти в 1,5 раза (при $\xi = 1$).



фиг. 1

На фиг. 1 для $\bar{\eta}_0 = 0.015$ показан график зависимости наибольшего значения низшей частоты $\bar{\omega}$ от угла φ . Как видно из графика, угол укладки монослоев ВКМ существенно влияет на величину $\bar{\omega}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин.- М.: Наука, 1967. 534 с.
2. Лезницкий С. Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней.- М.: Наука, 1971. 240 с.
3. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.- М.: Мир, 1975. 532 с.

Государственный инженерный университет Армении Поступила в редакцию
Институт механики НАН Армении 30.03.1993