ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 5-6, 1994 Механика

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ТЕРМОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЖИДКОСТЬ

Саркисян А.В.

Ա. Վ. Սարգսյան

Ալիքների տարածումը հեղուկ պարունակող ջերմաառաձգական գլանային թաղանթում

Հեղուկ պարունակող ջերմաառաձգական գլանային թաղանթում ալիքների տարածման խնդրի լուծման համար դիտարկված են թաղանթ-հեղուկ, թաղանթ-ջերմաստիճան համակարգերը, որոնց համար ստացված են արտահայտություններ ալիքի տարածման արագության համար: Ընդհանրացված է Ժուկովսկու բանաձևը ջերմաստիճանային դաշտի դեպքում:

Sarkisian A. V.

The Waves Propagation in Thermoelastic Cylindrical Shell with the Fluids.

Для решения задачи распространения волн в термоупругой цилиндрической оболочке, наполненной идеальной жидкостью, рассмотрены системы оболочка-жидкость и оболочка-температура, для которых получены выражения скорости распространения волны. Обобщена формула Жуковского на случай температурного поля.

1. Рассматривается распространение осесимметричных волн бесконечно длинной изотропной цилиндрической оболочки (с радиусом R, плотностью ρ, толщиной h, модулем Юнга E), наполненной идеальной жидкостью с плотностью ρ_0. Предполагается, что колебания цилиндра сопровождаются выделением теплоты, что, в свою очередь, создает тепловые напряжения (тепловая связанная задача).

Пусть температурное поле в оболочке изменяется по следующему закону [1]:

$$T = \Theta_1 + z\Theta_2 \tag{1.1}$$

Уравнения движения оболочки имеют вид [2]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial T_1}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - \frac{T_2}{R} + T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{gathered} \tag{1.2}$$

где P - давление жидкости, T_1, T_2 - усилия, M_1 - изгибающий момент, T_0 - начальное усилие срединной поверхности оболочки, u, w - перемещения срединной поверхности.

Принимая во внимание (1.1), уравнения теплопроводности будут иметь следующий вид [3,4]:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Theta_1}{\partial t}-\chi\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial x^2}+\frac{2k^\bullet}{c_p\rho h}\Theta_1+\eta\chi\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial t}\right]=0\\&\frac{\partial\Theta_2}{\partial t}-\chi\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial x^2}+\left[\frac{12\chi}{h^2}+\frac{6k^\bullet}{c_p\rho h}\right]\Theta_2-\eta\chi\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}=0\end{aligned}\tag{1.3}$$

где χ - коэффициент температуропроводности, $k^\bullet$ - коэффициент теплообмена поверхности тела, c_p - удельная теплоемкость, $\eta=\dfrac{3\lambda+2\mu}{c_p\rho\chi}\alpha T$, α - коэффициент температурного расширения, λ, μ - коэффициенты Лямэ.

Двумерное уравнение движения жидкости и выражение для давления известно из [5]

$$\begin{aligned}&\Delta\varphi=0\\&P=\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.4}$$

где φ - функция потенциала, $\Delta[\ ]=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ - оператор Лапласа.

Граничное условие на внутренней поверхности цилиндра будет

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R}=-\frac{\partial w}{\partial t}\tag{1.5}$$

Решение уравнения (1.2)-(1.5) ищется в виде

$$\begin{aligned}&u=A\exp i(\omega t-kx)\\&w=B\exp i(\omega t-kx)\\&\Theta_1=C_1\exp i(\omega t-kx)\\&\Theta_2=C_2\exp i(\omega t-kx)\end{aligned}\tag{1.6}$$

где ω - частота, k - волновое число, A, B, C_1, C_2 - неизвестные постоянные.

Учитывая граничное условие (1.5) из (1.4) и (1.6), для давления получаем следующее выражение:

$$P = \rho_0 B\omega^2 \frac{I_0(kR)}{kI_1(kR)} \exp(\omega t - kx) \tag{1.7}$$

где $I_0(kR)$, $I_1(kR)$ - функции Бесселя [6].

Учитывая закон Дюамеля-Неймана [1], гипотезу Кирхгофа-Лява [2], а также выражение для давления (1.7), в уравнениях (1.2) усилия T_1 и T_2, изгибающий момент M_1 выражая через компоненты перемещений, получим систему

$$\begin{gathered}
\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha(1+\nu)\frac{\partial \Theta_1}{\partial x}\right] - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\
\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{Eh^3\alpha}{12(1-\nu)}\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial x^2} + \frac{Eh}{R(1-\nu^2)}\left[\frac{w}{R} + \right. \\
\left. + \nu\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\Theta_1(1+\nu)\right] - T_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho_0 B\omega^2 \frac{I_0(kR)}{kI_1(kR)} \exp i(\omega t - kx) = 0
\end{gathered} \tag{1.8}$$

где V - коэффициент Пуассона.

Таким образом, для решения данной задачи необходимо решить системы (1.3), (1.8). **Из-за громоздкости дисперсионного уравнения шестого порядка** относительно частоты оно не приводится, а его анализ можно провести только численно, поэтому здесь довольствуемся только частными случаями.

2. Рассмотрим систему оболочка-жидкость, предполагая отсутствие теплового эффекта. В этом случае получится биквадратное уравнение относительно отношения $\frac{v}{c}$, где $v = \frac{\omega}{k}$ - фазовая скорость распространения волны, $c^2 = \frac{E}{\rho}$.

Таблица 1

$\frac{1}{kR}$	$\left(\frac{v}{c}\right)_1$	$\left(\frac{v}{c}\right)_2$	$\left(\frac{v}{c}\right)_3$
1	0.2189	1.00180	0.2284
2	0.2192	1.00230	0.2299
3	0.2193	1.00243	0.2304
5	0.2194	1.00248	0.2305
10	0.2195	1.00250	0.2306

В табл. 1 для этого случая для данных значений $1/kR$ указаны соотношения $\left(\frac{v}{c}\right)_1$ и $\left(\frac{v}{c}\right)_2$. Для сравнения, для волн с малыми частотами $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\right)$ для соотношения $\frac{v}{c}$ будем иметь:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2=\frac{1/k^2R^2+h^2k^2/12\left(1-v^2\right)+T_0/Eh}{1+\frac{\rho_0}{\rho}\frac{I_0(kR)}{I_1(kR)}\frac{1}{kh}} \tag{2.1}$$

которому соответствует в табл. 1 отношение $\left(\frac{v}{c}\right)_3$.

3. Для выяснения влияния температур рассмотрим систему оболочка - температура, довольствуясь безмоментной постановкой задачи. В этом случае (при отсутствии жидкости), в предположении малости продольного инерционного члена, из (1.3) и (1.8) задача сводится к решению данной системы

$$\begin{gathered}\frac{\partial T_1}{\partial x}=0\\ \frac{T_2}{R}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0\\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial t}-\chi\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial x^2}+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\Theta_1+\eta\chi\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial t}\right]=0\end{gathered} \tag{3.1}$$

из которой получится кубическое дисперсионное уравнение

$$\begin{gathered}\left[1+\alpha\eta\chi(1+v)\right]\omega^3-i\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)\omega^2-\\ -\frac{E}{\rho R^2}(1+2\alpha\eta\chi)\omega+\frac{E}{\rho R^2}i\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)=0\end{gathered} \tag{3.2}$$

При отсутствии связанности задачи для частот имеем

$$\begin{gathered}\omega_{1,2}=\pm\frac{1}{R}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\\ \omega_3'=i\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)\Big/\left(1+\alpha\eta\chi(1+v)\right)\end{gathered} \tag{3.3}$$

Удобнее приближенные корни уравнения (3.2) искать в виде, учитывающей малость связанности (η). Тогда, если решение (3.2) представить в виде

$$\left(\omega-\frac{1}{R}\sqrt{\frac{E}{\rho}}+a_1\right)\left(\omega+\frac{1}{R}\sqrt{\frac{E}{\rho}}+a_2\right)\frac{\left(\omega-i\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)+a_3\right)}{1+\alpha\eta\chi(1+\nu)}=0 \quad (3.4)$$

где a_i - малые величины, характеризующие малость связанности, сравнивая (3.2) и (3.4), для a_i получим

$$\mathrm{Re}\,a_{1,2}=\frac{\pm\frac{1}{2}\frac{E}{\rho R^2}\alpha\eta\chi(1-\nu)(1+\alpha\eta\chi(1+\nu))}{\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)^2+\frac{E}{\rho R^2}(1+\alpha\eta\chi(1+\nu))^2} \quad (3.5)$$

a_3 - мнимое число, характеризующее процесс затухания.

Следовательно, для изгибной скорости распространения волны получим

$$v=\pm\frac{1}{kR}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left[1-\frac{\frac{1}{2}\frac{E}{\rho R^2}\alpha\eta\chi(1-\nu)(1+\alpha\eta\chi(1+\nu))}{\frac{E}{\rho R^2}(1+\alpha\eta\chi(1+\nu))^2+\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)^2}\right] \quad (3.6)$$

4. Известно выражение скорости пульсовой волны [7,8,9]. Обобщим его на случай наличия теплопередачи.

Предполагается, что есть только усилие T_2, которое в предположении $T_1=0$ дает

$$T_2=Eh\left(\frac{w}{R}-\alpha\Theta_1\right) \quad (4.1)$$

Уравнение теплопроводности в этом случае согласно (1.3) имеет вид

$$[1+\alpha\eta\chi(1+\nu)]\frac{\partial\Theta_1}{\partial t}-\chi\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial x^2}+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\Theta_1+\eta\frac{\chi}{R}(1-\nu)\frac{\partial w}{\partial t}=0 \quad (4.2)$$

Давление жидкости по одномерной модели определяется из [10]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=\frac{2\rho_0}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.3)$$

Из уравнений движения оболочки (1.8), из соотношения (4.3) и уравнения теплопроводности (4.2), решение задачи сводится к решению данной системы

$$
\begin{aligned}
&Eh\left[\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial x^2}\right]=2\rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\\
&\left[1+\alpha\eta\chi(1+\nu)\right]\frac{\partial\Theta_1}{\partial t}-\chi\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial x^2}+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\Theta_1+\frac{\eta\chi}{R}(1-\nu)\frac{\partial w}{\partial t}=0
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

В этом случае имеем следующее кубическое дисперсионное уравнение:

$$
\begin{aligned}
&\left[1+\alpha\eta\chi(1+\nu)\right]\omega^3-i\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)\omega^2-\frac{Ehk^2}{2\rho_0 R}(1-2\alpha\eta\chi\nu)\omega+\\
&+\frac{Ehk^2}{2\rho_0 R}i\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)=0
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

При отсутствии тепловыделения для частот имеем

$$
\begin{aligned}
&\omega_{1,2}=\pm k\sqrt{\frac{Eh}{2\rho_0 R}}\\
&\omega_3=i\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)\Big/\left[\alpha\eta\chi(1+\nu)+1\right]
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Для скорости распространения волны будем иметь

$$
c=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{Eh}{2\rho_0 R}}
\tag{4.7}
$$

(4.7) получена в [9] и носит название формулы Жуковского.

Обобщим эту формулу на случай температурного поля. Корни уравнения (4.5) также ищем в виде предыдущего пункта. Не останавливаясь на подробностях, приведем окончательное выражение для скорости распространения волн

$$
v=\pm\sqrt{\frac{Eh}{2\rho_0 R}}\left[1-\frac{Ehk^2}{4\rho_0 R}\frac{\alpha\eta\chi(1+3\nu)\left(1+\alpha\eta\chi(1+\nu)\right)}{\frac{Ehk^2}{2\rho_0 R}\left(1+\alpha\eta\chi(1+\nu)\right)^2+\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)^2}\right]
\tag{4.8}
$$

Как видно из приведенной формулы (4.8), скорость зависит от волнового числа, то есть в этом случае наблюдается дисперсия.

Формула (4.8) обобщает известную формулу Жуковского, принятую в биомеханике как скорость распространения пульсовой волны.

Литература

1. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. - М.: Физматгиз 1963.
2. *Новожилов В. В.* Теория тонких упругих оболочек.-Л.: Суд-промгиз, 1962.
3. *Болотин В. В.* Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла. - ПММ, 1960, т. 24 в. 2.
4. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. - М.: Мир, 1970.
5. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. I. - М.: Наука, 1973.
6. *Коренев Б. Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. - М.: Физматгиз, 1960.
7. *Каро, Педли, Шротер, Сид.* Механика кровообращения. - М.: Мир, 1981.
8. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. - М.: Мир, 1983.
9. *Рашевски Н.* Некоторые медицинские аспекты математической биологии. - М.: Мир, 1966.
10. *Амбарцумян С. А., Мовсисян Л. А.* К вопросу распространения пульсовой волны. -Механика полимеров. 1978, № 4.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
26. 11. 1993