ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, №- 5-6, 1994 Механика

РАЗВИТИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ СКОРОСТЕЙ В ПЛОСКОЙ ТРУБЕ С ДВИЖУЩЕЙСЯ СТЕНКОЙ

Мнацаканян Р.Ж.

Ռ. Ժ. Մնացականյան

Արագությունների կամայական պրոֆիլի զարգացումը շարժական պատով հարթ խողովակում

Ուսումնասիրվում է մածուցիկ հեղուկի շարժման զարգացումը շարժական պատով հարթ խողովակում, երբ խողովակի սկզբնական կտրվածքում հիմնական հոսքի արագությունների պրոֆիլն ունի կամայական տեսք: Գտնված են արագության, ճնշման և շփման ուժի փոփոխման օրենքները խողովակի սկզբնական և հաստատված հատվածներում, կախված խողովակի սկզբնական կտրվածքում արագությունների բաշխման պրոֆիլից և պատի արագությունից:

R.Zh. Mnatsakanyan

On the Development of the Arbitrary Profile of Velocities in the Flat Pipe with Moving Wall.

Рассматривается развитие течения вязкой жидкости в плоской трубе с подвижной стенкой на случай начального произвольного профиля продольных скоростей основного потока жидкости.

Полученные результаты показывают, что выбором скоростей подвижной стенки и начального профиля продольных скоростей можно изменить распределения скоростей, давлений и силы трения в начальном и в стабилизированном участках трубы.

1. За последние годы о развитии течения вязкой жидкости между параллельными (подвижными, пористыми) стенками опубликован ряд работ, в которых, в основном, рассмотрены случаи, когда поступающая в трубу жидкость имеет во входном сечении линейный профиль.

В настоящей работе рассматривается развитие течения вязкой жидкости в плоской трубе с подвижной стенкой на случай начального произвольного профиля и делается попытка найти законы распределения скоростей и давления для любого сечения трубы, а также силы трения в потоке жидкости и на стенках трубы.

Такого рода задачи рассматривались и в работах [1,2,3,4] и других.

Изучение таких задач представляет теоретический и практический интерес. При произвольном профиле скоростей скольжение поверхностей относительно обтекающего потока имеет место в различных технологических и химических процессах. Например, при непрерывной обработке листовых материалов в металлургии и т.д.

Для описания движения воспользуемся уравнениями [1]

$$U\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial p}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \tag{1.1}$$

В системе уравнений (1.1) v_x, v_y - соответствующие компоненты скорости по осям OX и OY, p - давление, ρ - плотность, ν - кинематический коэффициент вязкости, U - значение средней скорости по сечению в начале трубы.

Предположим, что поступающая в трубу жидкость имеет во входном сечении $x=0$ некоторый заранее заданный произвольный осесимметричный профиль скоростей $v_x(\xi)$, где $\xi=y/h$.

Допустим, что функция $v_x(\xi)$ может быть разложена в ряд Фурье и что это разложение имеет вид

$$v_x=U\psi(\xi) \tag{1.2}$$

$$\psi(\xi)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi\xi \tag{1.3}$$

где a_n - постоянные коэффициенты разложения. Что касается величины U, то она при любом выборе $\psi(\xi)$ в виде (1.3) будет равна средней по расходу скорости во входном сечении трубы.

Граничные условия для поставленной задачи будут иметь вид

при $\quad x=0 \quad v_x=U\psi(\xi),\quad p=p_{II}$

при $\quad y=h \quad x>0 \quad v_x=U_1,\quad v_y=0$ (1.4)

при $\quad y=-h \quad x>0 \quad v_x=0,\quad v_y=0$

где p_{II} - давление во входном сечении, $2h$ - ширина плоской трубы, U_1 - заданная скорость верхней стенки трубы.

Введем безразмерные переменные

$$z=\frac{x}{h},\quad u=\frac{v_x-U\psi(\xi)}{U},\quad v=\frac{v_y}{U},\quad P=\frac{p-p_{II}}{\rho U^2} \tag{1.5}$$

Тогда уравнения (1.1) и граничные условия (1.4) примут следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2\psi}{d\xi^2}$$
$$\frac{\partial P}{\partial \xi}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial \xi}=0 \tag{1.6}$$

при $z=0\quad u=0,\ P=0$

при $\xi=1\quad z>0\quad u=\dfrac{U_1-U\psi(1)}{U},\quad v=0$ (1.7)

при $\xi=-1\quad z>0\quad u=-\psi(-1),\quad v=0$

здесь $\mathrm{Re}=\dfrac{Uh}{v}$ (число Рейнольдса), $\psi(1)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(-1)^n$

2. Решение системы уравнений (1.6) при граничных условиях (1.7) найдем методом операционного исчисления.

Применив преобразование Лапласа к уравнениям (1.6) и к граничным условиям (1.7) получим

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2\overline{u}}{d\xi^2}-\lambda\overline{u}=\lambda\overline{P}+\frac{1}{\lambda\mathrm{Re}}\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^2\pi\cos n\pi\xi$$
$$\frac{d\overline{P}}{d\xi}=0,\quad \lambda\overline{u}+\frac{d\overline{v}}{d\xi}=0 \tag{2.1}$$

при $\xi=1\quad z>0\quad \overline{u}=\dfrac{U_1-U\psi(1)}{\lambda U},\quad \overline{v}=0$

при $\xi=-1\quad z>0\quad \overline{u}=-\dfrac{\psi(-1)}{\lambda},\quad \overline{v}=0$ (2.2)

здесь λ - параметр преобразования Лапласа. Решая уравнение (2.1) и учитывая граничные условия (2.2), для $\overline{u}$, $\overline{v}$ и $\overline{P}$ получим

$$\overline{u}=\frac{U_1}{2\lambda U}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda\mathrm{Re}}\,\xi}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda\mathrm{Re}}}+\left[\frac{U_1-2U\psi(1)}{2\lambda U}+\overline{P}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n(-1)^n\right]\frac{\mathrm{ch}\sqrt{\lambda\mathrm{Re}}\,\xi}{\mathrm{ch}\sqrt{\lambda\mathrm{Re}}}-$$
$$-\overline{P}-\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos n\pi\xi \tag{2.3}$$

$$\overline{P}=-\left[\frac{U_1-2U\psi(1)}{2\lambda U}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n(-1)^n\right]\frac{\mathrm{th}\,\beta}{\mathrm{th}\,\beta-\beta} \tag{2.4}$$

$$\overline{\mathrm{v}} = -\frac{U_1}{2U}\frac{\operatorname{ch}\beta\xi}{\beta\operatorname{sh}\beta} - \left[\frac{U_1 - 2U\psi(1)}{2\lambda U} + \overline{P} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(-1)^n\right]\frac{\lambda\operatorname{sh}\beta\xi}{\beta\operatorname{ch}\beta} + \tag{2.5}$$

$$+\lambda\overline{P}\xi + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n\pi}\sin\pi n\xi + \frac{U_1}{2U}\frac{1}{\beta\operatorname{th}\beta}$$

где $\beta = \sqrt{\lambda \mathrm{Re}}$, $B_n = \dfrac{a_n n^2\pi^2}{\lambda(\lambda\mathrm{Re} + n^2\pi^2)}$

Совершив обратные преобразования Лапласа и переходя к старым переменным, для v_x, v_y и p получим

$$\mathrm{v}_x = \frac{3U}{2}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) + \left(\frac{3y^2}{h^2} - 1\right)\frac{U_1}{4} + \frac{U_1}{2}\frac{y}{h} +$$

$$+\frac{U_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\pi ny/h}{n}\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right) + \tag{2.6}$$

$$+2U\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{U_1}{2U} - 1\right)\frac{1}{\mu_k^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(-1)^n}{\mu_k^2 - \pi^2 n^2}\right]\left(1 - \frac{\cos\mu_k y/h}{\cos\mu_k}\right)\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right),$$

$$\mathrm{v}_y = \frac{U_1}{\mathrm{Re}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[1 - (-1)^n\cos\pi ny/h\right]\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right) + \tag{2.7}$$

$$+\frac{2U}{\mathrm{Re}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{U_1}{2U} - 1\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(-1)^n\mu_k^2}{\mu_k^2 - \pi^2 n^2}\right]\left(\frac{y}{h} - \frac{\sin\mu_k y/h}{\sin\mu_k}\right)\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right)$$

$$\frac{p - p_H}{\rho U^2} = \left(\frac{U_1}{2U} - 1\right)\left[\frac{3}{\mathrm{Re}\,h}x + \frac{1}{5} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^2}\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right)\right] - \tag{2.8}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[3a_n(-1)^n\frac{1}{\pi^2 n^2} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_n(-1)^n}{\mu_k^2 - \pi^2 n^2}\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right)\right]$$

В формулах (2.6), (2.7) и (2.8) μ_k - простые корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = \mu$

Найдем значение силы трения

$$\tau = \frac{3\mu}{h^2}\left(\frac{U_1}{2} - U\right)y + \frac{\mu U_1}{2h} +$$

$$+\frac{\mu U_1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1 + \frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}^2}\right)(-1)^n\cos\pi ny/h - \frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}^2}\right]\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right) + \tag{2.9}$$

$$+\frac{2\mu U}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{U_1 - 2U}{2U} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(-1)^n\mu_k^2}{\mu_k^2 - \pi^2 n^2}\right]\left[\left(1 + \frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}^2}\right)\frac{\sin\mu_k y/h}{\sin\mu_k} - \frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}^2 h}y\right]\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right),$$

Значения силы трения на стенках будут

$$\tau^{h}=\frac{2\mu U_1}{h}-\frac{3\mu U}{h}+\frac{\mu U_1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right)+\frac{\mu(U_1-2U)}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right)-$$
$$-\frac{2\mu U}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_n(-1)^n\frac{\mu_k^2}{\mu_k^2-\pi^2 n^2}\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right) \tag{2.10}$$

$$\tau^{-h}=\frac{\mu U_1}{h}+\frac{3\mu U}{h}+\frac{\mu U_1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right)-\frac{\mu(U_1-2U)}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right)+$$
$$+\frac{2\mu U}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_n(-1)^n\frac{\mu_k^2}{\mu_k^2-\pi^2 n^2}\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right) \tag{2.11}$$

На бесконечном удалении от начала трубы, то есть для стабилизированного участка течения значения искомых величин будут

$$\mathrm{v}_{x\infty}=U+\left(\frac{U_1}{4}-\frac{U}{2}\right)\left(\frac{3y^2}{h^2}-1\right)+\frac{U_1}{2}\frac{y}{h} \tag{2.12}$$

$$\mathrm{v}_{y\infty}=0,\quad \frac{p_\infty-p_{II}}{\rho U^2}=\left(\frac{U_1}{2U}-1\right)\left(\frac{3}{\mathrm{Re}\,h}x+\frac{1}{5}\right)-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2 n^2}a_n(-1)^n \tag{2.13}$$

$$\tau_{x\infty}=\frac{3\mu}{h^2}\left(\frac{U_1}{2}-U\right)y+\frac{\mu U_1}{2h} \tag{2.14}$$

Сила трения на стенках для стабилизированного участка примет следующие значения:

$$\tau_{x\infty}^{h}=\frac{\mu}{h}(2U_1-3U),\quad \tau_{x\infty}^{-h}=\frac{\mu}{h}(3U-U_1) \tag{2.15}$$

При $U_1=0$ определим в заключение с помощью формулы (2.6) длину начального участка.

Подставляя в (2.6) $y=0$ и сохраняя в сумме одно лишь первое слагаемое, так как величины μ_k^2 растут очень быстро, для начального участка получим следующее приближенное выражение:

$$L=\frac{\mathrm{Re}\,h}{20.19}\ln\left[36.98+747.06\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(-1)^n}{20.19-\pi^2 n^2}\right] \tag{2.16}$$

В качестве характерного примера использования полученных выше формул рассмотрим случай, когда

$$\psi(y/h)=\frac{3}{2}\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)$$

В этом случае коэффициенты разложения Фурье будут

$$a_n=-\frac{6(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

Подставляя это значение в формулу (2.16), получим $L=0$, то есть если распределение скоростей потока в начальном сечении трубы имеет параболический вид, в сравнении с линейным профилем скоростей [1], по мере удаления от начального сечения сохраняет свой вид, сразу имея стабилизированный режим течения.

Если в (2.16) подставить $a_n=0$, то получим значение начального участка для линейного профиля [1], то есть

$$L\approx 0.18\,\mathrm{Re}\,h$$

3. Анализ полученных результатов:

а). Из формулы (2.12) видно, что при течении в трубе любой симметричный профиль продольных скоростей переходит в пределе в параболический, независимо от того, стенка трубы подвижная или нет.

б). Результаты работы [5] и настоящей работы (2.14), (2.15) показывают, что значение силы трения в потоке жидкости и на стенках трубы не зависят от начального профиля продольных скоростей жидкости и от того, принимается ли давление переменным в поперечном направлении трубы или нет.

в). Как показывают полученные формулы, выбором скоростей подвижной стенки и начального профиля продольных скоростей основного потока можно изменить распределения скоростей, давлений и силы трения в начальном и в стабилизированном участках и, в частности, на стенках трубы.

г). Если в формулу (2.6), (2.7) и (2.8) подставить $a_n=0$, $U_1=0$, то получим развитие линейного профиля скоростей [1], если $a_n\neq 0$, $U_1=0$. то получим результаты [4], а если $a_n=0$, $U_1\neq 0$, полученные результаты совпадают с результатами [6] при $U_2=0$.

Литература

1. *Тарг С.М.* Основные задачи теории ламинарных течений. - М.: Гостехиздат, 1951, с. 420.
2. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Гостехиздат, 1955, 519 с.
3. *Бабаджанян Г.А., Мнацаканян Р.Ж.* О развитии течения вязкой жидкости в плоской трубе с проницаемыми стенками. - Проблемы динамики взаимодействия деформируемых средств. Ереван, изд-во АН Арм.ССР, 1987, с. 42-47.

4. *Мнацаканян Р.Ж.* Развитие произвольного профиля скоростей между параллельными стенками. - Межвуз. сб. научн, тр., Механика, Ереван, изд. ЕГУ, 1987, вып. 6, с. 191-187.
5. *Бабаджанян Г.А., Мнацаканян Р.Ж.* Об одном точном решении уравнения Навье-Стокса. - Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1988, №5, т. 41, с. 47-52.
6. *Бабаджанян Г.А., Мнацаканян Р.Ж.* О развитии течения вязкой жидкости между параллельными движущимися плоскостями. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1987, т. 40, №3, с. 49-53

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
15.04.1993