ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 5-6, 1994 Механика

ОТРАЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ГАУССОВА ПУЧКА ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ МАГНИТОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Багдоев А.Г.

Բագդոև Ա. Գ.

Ոչ գծային գաուսյան փնջի անդրադարձումը մագնիսաառաձգական կիսատարածության ազատ մակերևույթից

Դիտարկվում է մագնիսաառաձգական կիսատարածությունում գաուսյան փնջի անդրադարձումը ազատ եզրից: Արտածված են կարճ ալիքների հավասարումները, որոնք նկարագրում են ընկնող և անդրադարձող ալիքները, ընդ որում էյկոնալով միջինացված մեծությունների էվոլյուցիոն հավասարումներն իրարից անկախ են: Ստացված են, գաուսյան փնջի տեսքով, լուծումները: Դիտարկված է նաև ռեզոնատորի խնդիրը, որում կան հանդիպակաց գաուսյան փնջեր:

A.G.Bagdoev

Reflection of Nonlinear Gaussian Beam from Free Surface of Magnetoelastic Halfspace

В работе рассматривается задача отражения гауссова пучка, генерируемого на некоторой глубине в магнитоупругом полупространстве от его свободной границы.

Выведены уравнения коротких волн, описывающие поля падающей и отраженной волн, причем указанные эволюционные уравнения для осредненных по эйконалам величин оказываются несвязными. Решение полученных уравнений ищется в виде ряда гармоник, получены уравнения для первой и второй гармоник и решение в виде узких гауссовых пучков. Рассмотрена также задача о резонаторе, в котором имеются падающие слева и справа гауссовы пучки.

1. Получение уравнения для двух пучков Пусть на некоторой глубине магнитоупругой среды, занимающей полупространство, имеется квазимонохроматическая волна в виде гауссова пучка. Обозначим через $x = l$ расстояние от волны до свободной поверхности, кооордината x отсчитывается от волны, координата y есть нормальная к x, отсчитываемая вдоль фронта невозмущенной начальной волны. Кроме падающей на свободную поверхность волны имеется также отраженная волна.

Покажем, что для типичной дифракционной [1] задачи, в которой имеются лишь первые и вторые гармоники и свободные члены не влияют на их уравнения, можно проводить суперпозицию волн. Для этого используем результаты работ [2,3,4], причем в отличие от [4] выбираем произвольное число уравнений и искомых функций, а также рассматриваем возможность наличия любого числа волн.

Кроме того, расматривается случай трех независимых переменных.

Уравнения движения среды можно описывать в виде системы уравнений с гиперболическим типом в левой части

$$a_i^{j\lambda}(u)\frac{\partial u^i}{\partial x^\lambda} + b^j(u) = a_{il}^{j\lambda}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^\lambda \partial x^l} + a_{ikl}^{j\lambda}\frac{\partial^3 u_i}{\partial x^\lambda \partial x^k \partial x^l} \qquad (1.1)$$

$(\lambda = 0,1,2,3;\ x^0 = t)$

где $u = \left(u^i\right)$- неизвестный вектор поля.

В правой части (1.1) стоят малые диссипация и дисперсия, не влияющие на уравнения в основном порядке, то есть соотношения характеристик.

Решение (1.1) ищется в виде лучевого ряда

$$u^i = \sum_{q=0}^{\infty} \omega^{-q} u_q^i\left(t, \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_N, y\right) \tag{1.2}$$

где $\omega^{-1} << 1$ есть параметр возмущений, $\xi_i = \omega\varphi_i$, $\xi_1 = t + \dfrac{x}{c_л}$, $\xi_2 = t - \dfrac{x}{c_л}$; $c_л$ - скорость волны линейной задачи, φ_i - фазовые функции, u_0 - невозмущенное решение, не зависящее от ξ_i. В работе [4] взято $N = 2$ и не учтена зависимость $u_q(y)$, хотя все выкладки остаются. Учитывая, что $\dfrac{\partial}{\partial x^\lambda} = \dfrac{\partial}{\partial x^\lambda} + \omega \dfrac{\partial \varphi^k}{\partial x^\lambda} \dfrac{\partial}{\partial \xi_k}$ и подставляя (1.2) в (1.1), получим в нулевом приближении уравнение характеристик

$$\left\{A(x, p)\right\}_{p=\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \left\{\det a_i^{j\lambda}\left(u_0\right) p_\lambda\right\}_{p_\lambda = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\lambda}} \tag{1.3}$$

Если мы обозначим собственные векторы системы (1.3) через $h_1, \ldots, h_N$, то решение (1.1) можно записать в первом и втором порядке в виде

$$u_1^i = \Gamma^m\left(t, \xi_m, y\right) h_m^i \tag{1.4}$$

$$u_2^i = \Sigma^m\left(t, \xi_m, y\right) h_m^i \tag{1.5}$$

где Γ^m и Σ^m - произвольные дифференцируемые функции, причем необходимо отметить, что Γ^m зависит от одного φ_m и по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Подставляя (1.4) и (1.5) в (1.1), умножая на $\overline{h}_j^m$, где $\overline{h}_j^m$ - собственные векторы транспонированной матрицы $A(x, p)$ и принимая, что $a_i^{j\lambda} \, \overline{h}_j^m \, h_m^i \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x^\lambda} = 0$ определяя по переменным $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_N$, можно в первом порядке получить в силу произвола в выборе компонент собственного вектора h_m^i, как и в [2], для нормальной к волне скорости частиц [1,5] $u = u_1 - u_2$, $u_{1,2} = \Gamma^{1,2}$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t \partial \tau_{1,2}} - \frac{1}{2} L\left(u_{1,2}\right) = -\frac{1}{c_л} \frac{\partial}{\partial \tau_{1,2}} \left(\Gamma u_{1,2} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}} - D \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^2} + E \frac{\partial^3 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^3} \right) \tag{1.6}$$

где $\xi_{1,2} = -\tau_{1,2} + \dfrac{l}{c_n}$

а поперечный оператор - $L = \dfrac{1}{\alpha_1}\dfrac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$

$\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_2)$ есть дисперсионное уравнение для первой волны, (α_1, α_2) - компоненты волнового вектора и поскольку ось x нормальна к начальной волне, можно считать $\alpha_2 \approx 0$, $\alpha_1 \approx \dfrac{1}{c_n}$, где c_n - нормальная скорость волны. Уравнения выписаны только для одной прямой (Γ^1) и отраженной (Γ^2) от свободной поверхности среды волны, Γ - коэффициент в разложении нормальной скорости волны по степеням малого возмущения нормальной скорости частицы $(u_i = \Gamma^i)$ к волне, причем в силу произвола $\overline{h}_j^m$, $u = u_1 - u_2$.

2. Уточнение коэффициентов уравнений коротких волн для магнитоупругой среды. Для одной волны коэффициенты уравнения коротких волн определены в [3,5] и равны для случая нормального к волне начального магнитного поля $H_y = 0$, $H_x = H_0$

$$c_n^2(2c_n^2 - a^2 - b^2 - a_1^2)\Gamma = \frac{3}{2}(c_n^2 - a^2)a_1^2 - \\ -\frac{1}{\rho_0}(c_n^2 - b^2 - a_1^2)\left(A + 3B + C + \frac{3}{2}\lambda_0 + 3\mu\right) \tag{2.1}$$

$K = \lambda_0 + \dfrac{3}{2}\mu$, A, B, C - нелинейные упругие модули, $D_1 = c_n^2(2c_n^2 - a^2 - b^2 - a_1^2)$

$$D_1 D = -\frac{c_n}{2}(c_n^2 - b^2 - a_1^2)\frac{\lambda^{(1)} + 2\lambda^{(0)}}{\rho_0} - a_1^2 c_n \frac{\lambda^{(0)}}{2\rho_0}\frac{c_n^2 - a^2}{c_n^2 - b^2},$$

$$D_1 E = \frac{c_n}{2}(c_n^2 - b^2 - a_1^2)\frac{\zeta^{(1)} + 2\zeta^{(0)}}{\rho_0} + a_1^2 c_n \frac{c_n^2 - a^2}{c_n^2 - b^2}\frac{\zeta^{(0)}}{2\rho_0},\ a_1^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^y + \sigma_{ij}^b + \sigma_{ij}^g$; σ_{ij}^y - нелинейный упругий тензор напряжений,

$$\sigma_{ij}^b = \lambda^{(1)}\delta_{ij}\,\mathrm{div}\,\overline{\mathrm{v}} + \lambda^{(1)}\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j}$$

$$\sigma_{ij}^g = \zeta^{(1)}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\overline{\mathrm{v}} + \zeta^{(1)}\frac{\partial^2 \mathrm{v}_i}{\partial x_j \partial t}$$

Коэффициент $\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}$ получится из уравнения $c_л^4 - c_л^2\left(a^2+b^2+a_1^2\right)+a^2\frac{H_л^2}{4\pi\rho_0}+$ $+b^2\left(a^2+a_1^2-\frac{H_л^2}{4\pi\rho_0}\right)$ в следующем виде:

$$\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}=\frac{c_л^2\mu_1^2-\bar{\omega}\nu}{c_л^3\mu_1^3}\left\{\left(a^2-b^2\right)a_1^2-c_л^2\left(a^2+b^2+a_1^2\right)\right\}+$$
$$+\frac{2c_л^2\left(a^2+a_1^2\right)b^2\mu_1^2-\bar{\omega}\nu\left(c_л^4-a^2b^2-b^2a_1^2\right)}{c_л^3\mu_1^3} \quad (2.2)$$

$$\bar{\omega}=c_л^4-c_л^2\left(a^2+b^2+a_1^2\right)+b^2\left(a^2+a_1^2\right) \quad (2.3)$$

$$\mu_1=2c_л^2-a^2-a_1^2 \quad (2.4)$$

$$\nu=6c_л^2-a^2-a_1^2-b^2 \quad (2.5)$$

Медленная волна [5] есть малая более высокого порядка.

В соотношениях (2.1)-(2.5) a, b - скорости продольных и поперечных волн, H_0 - невозмущенное магнитное поле. Поскольку $c_л$ входит в четной степени в коэффициенты (1.6), совпадение этих уравнений обеспечивается. Исключение составляет минус перед $\Gamma^2\Gamma$.

3. Получение уравнений для амплитуд и фаз квазимонохроматической стационарной волны. Решение уравнений (1.6) можно искать в виде волн модуляции $u_{1,2}=\Gamma^{1,2}$ [7]

$$u_{1,2}=\left\{U_{1,2}^{(0)}+U_{1,2}^{(1)}e^{i\alpha\tau_{1,2}-i\omega t-\nu_1\alpha^2 t}+\right.$$
$$\left.+U_{1,2}^{(2)}e^{2i\alpha\tau_{1,2}-2i\omega t-2\nu_1\alpha^2 t}+\text{к с}\right\} \quad (3.1)$$
$$\tau'_{1,2}=\mp\frac{x}{c_л},\quad \tau_{1,2}=\tau'_{1,2}-t+\frac{l}{c_л}$$

$u_{1,2}$ - компоненты нормальной к волне скорости частиц, где α - основная частота, ω - модуляционная частота, $U_{1,2}^{(0,1,2)}$ - амплитуда гармоник. В силу произвола выбора собственных компонент вектора можно полагать $h_1^1=1$, $h_2^1=-1$, $u=u_1-u_2$, что использовано при получении (1.6).

Подставляя (3.1) в (1.6) и приравнивая слагаемые при гармониках, можно получить дисперсионное соотношение из уравнения при первой гармонике в нулевом порядке

$$\omega = \xi\alpha^3, \quad \nu_1 = -D, \quad \xi = -\frac{E}{c_н}$$

и уравнения первой и второй гармоник

$$\frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial \tau_{1,2}'}\left(i\alpha + 2\nu_1\alpha^2 + 3i\omega\right) - \frac{1}{2\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{\partial^2 U_{1,2}^{(1)}}{\partial y^2} - \frac{1}{2\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{1}{y}\frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial y} =$$
$$= -\Gamma\left(i\alpha - \nu_1\alpha^2\right)^2 U_{1,2}^{(0)} U_{1,2}^{(1)} + \frac{\Gamma}{c_н}\alpha^2 U_{1,2}^{(2)} U_{1,2}^{(1)*} e^{-2\nu_1\alpha^2 t} \qquad (3.2)$$

$$U_{1,2}^{(2)} 4\left(-3\omega\alpha + i\nu_1\alpha^2\right) + 2\left(i\alpha + 30i\omega + 10\nu_1\alpha^2\right)\frac{\partial U_{1,2}^{(2)}}{\partial \tau_{1,2}'} -$$
$$-\frac{1}{2\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{\partial^2 U_{1,2}^{(2)}}{\partial y^2} - \frac{1}{\varepsilon\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{1}{y}\frac{U_{1,2}^{(2)}}{\partial y} = \frac{2\Gamma\alpha^2}{c_н} U_{1,2}^{(1)2} \qquad (3.3)$$

Уравнение нулевой гармоники $U_{1,2}^{(0)} \sim \nu_1\alpha U_{1,2}^{(1)2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial \tau_{1,2}'}$.

Следует рассмотреть случай при $\frac{\omega}{\alpha} << 1$, при условии, что в дифракционной задаче $\frac{\partial}{\partial y} \sim \alpha^{\frac{1}{2}}$:

а) $\omega \sim \frac{\partial}{\partial \tau_{1,2}'}$, $\nu_1\alpha << \frac{\alpha}{\omega}$ и в уравнении (3.2) слагаемое с $U_{1,2}^{(0)}$ можно отбросить. Тогда получатся уравнения для $U_{1,2}^{(1)}$, $U_{1,2}^{(2)}$;

б) $\omega >> \frac{\partial}{\partial \tau_{1,2}'}$. При этом в уравнении (3.3) можно отбросить производные $U_{1,2}^{(2)}$ и получить

$$U_{1,2}^{(2)} = -\frac{\Gamma\alpha^2 U_{1,2}^{(1)2}}{2\left(3\omega\alpha - i\nu_1\alpha^3\right)} \qquad (3.4)$$

Подставляя в (3.2), можно записать

$$\frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial \tau_{1,2}'}\left(i\alpha + 3i\omega + 2\nu_1\alpha^2\right) - \frac{1}{2\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{\partial^2 U_{1,2}^{(1)}}{\partial y^2} - \frac{1}{2\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{1}{y}\frac{U_{1,2}^{(1)}}{\partial y} =$$
$$= -\frac{\Gamma^2}{2c_н^2}\frac{\alpha^3}{3\omega - i\nu_1\alpha^2} U_{1,2}^{(1)2} U_{1,2}^{(1)*} e^{-2\nu_1\alpha^2 t} \qquad (3.5)$$

где $U_{1,2}^{(1)*}$ комплексно сопряжено с $U_{1,2}^{(1)}$. Следует отметить, что при получении (3.5) использовано условие $\omega\tau'_{1,2} >> 1$ и если считать $\nu_1\alpha^2 \sim \omega$, следует учитывать экспоненту в (3.4), что осложняет решение. Однако, поскольку ν_1 и ω входят в виде действительной и мнимой части и при $\nu_1\alpha^2 << \omega$, диссипация влияет на решение, что видно из дальнейшего.

Пусть невозмущенная волна представляет гауссовый пучок квазимонохроматической волны с заданным значением $c_н$ (быстрая волна)

$$u_1 = U_1^{(1)}(0)\exp\left(-i\alpha t - i\omega t - \nu_1\alpha^2 t\right) + \text{к с}, \quad U_1^{(1)}(0) = a_0 \exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2}\right)$$

Тогда можно искать решение (3.5) в виде гауссовова пучка падающей и отраженной волн $U_{1,2}^{(1)} = ae^{i\varphi}$

$$u_{1,2} = \frac{a_0 \exp\left(i\alpha\tau_{1,2} - i\omega t - \nu_1\alpha^2 t\right)}{f_{1,2}\left(\tau'_{1,2}\right)} \exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2 f_{1,2}^2\left(\tau'_{1,2}\right)} + i\varphi_{1,2}\left(\tau'_{1,2}y\right)\right) + \text{к с} \tag{3.6}$$

$$u = u_1 - u_2$$

Подставляя (3.6) в (3.5), можно в осесимметричной задаче получить для $f_{1,2}\left(\tau'_{1,2}\right)$ и $\varphi_{1,2}\left(\tau'_{1,2}, y\right)$ систему уравнений, которая имеет решение

$$\varphi_{1,2}\left(\tau'_{1,2}, y\right) = \sigma_{1,2}\left(\tau'_{1,2}\right) + \frac{y^2}{2R_{1,2}}$$

$$-\frac{d\sigma_{1,2}}{d\tau'_{1,2}} = \chi_1 \frac{K_2}{f_{1,2}^2} - \frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{2}{f_{1,2}^2 y_0^2} \tag{3.7}$$

$$-\frac{1}{f_{1,2}}\frac{df_{1,2}}{d\tau'_{1,2}} = \chi_2 \frac{K^2}{f_{1,2}^2} + \frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{1}{R_{1,2}}$$

$$\frac{df_{1,2}}{d\tau'_{1,2}} = \mp\sqrt{C' - \frac{\bar{\xi}}{f_{1,2}^2}} \tag{3.8}$$

где $\bar{\xi} = -\chi_1 \frac{4}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{a_0^2}{y_0^2} + \frac{4}{y_0^4}\left(\frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\right)^2 - \chi_2^2 a_0^4$

$$C' = \left(\frac{1}{R_0}\frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} + \chi_2 a_0^2\right)^2 + \bar{\xi}, \quad a_0 = K$$

где R_0 есть значение R_1 при $x = l$

$$\chi_1 = 3E\alpha^2\zeta, \quad \chi_2 = D\alpha\zeta, \quad \zeta = \frac{1}{2c_н\alpha}\frac{\Gamma^2\exp\left(-2\nu_1\alpha^2 t\right)}{9E^2\alpha^2 + D^2}$$

В силу симметрии можно полагать $f_2(x)=f_1(x)$, $f_1=f$ и (3.8) дает

$$\frac{df_2}{dx}=\frac{df_1}{dx},\quad \pm\frac{1}{f}\frac{df}{dx}=\chi_2\frac{K^2}{f^2}+\frac{1}{c_n\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{1}{R_{1,2}}$$

Тогда получится

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sqrt{C'-\frac{\bar{\xi}}{f^2}},\quad -\frac{l-x}{c_n}=\frac{\sqrt{C'f^2-\bar{\xi}}}{C'}-\frac{\sqrt{C'-\bar{\xi}}}{C'},$$

$$f^2=\frac{\bar{\xi}}{C'}+\left(\frac{\sqrt{C'-\bar{\xi}}}{\sqrt{C'}}-\sqrt{C'}\frac{l-x}{c_n}\right)^2$$

Из (3.7) получится

$$A'=\frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{2}{y_0^2}-\chi_1K^2,\quad c_n\frac{d\sigma_{1,2}}{dx}=\pm\frac{A'}{f^2}$$

Отсюда можно найти

$$\sigma_{1,2}=\pm\frac{A'}{\sqrt{\bar{\xi}}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{C'-\bar{\xi}}-C'\frac{l}{c^n}+C'\frac{x}{c_n}}{\sqrt{\bar{\xi}}}+\sigma_{01,2}$$

$$\sigma_{01}=-\frac{A'}{\sqrt{\bar{\xi}}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{C'-\bar{\xi}}-C'\frac{l}{c_n}}{\sqrt{\bar{\xi}}}$$

$$\sigma_{02}=-\sigma_{01}+\pi$$

Для немалых значений y_0 может образоваться каустика [5]. Решение $u=u_1-u_2$ имеет вид

$$u=e^{-\nu_1\alpha^2t}\frac{2K}{f}\cos\left(\sigma_1+\frac{1}{R_1}\frac{y^2}{2}+\frac{l-x}{c_n}\alpha-\alpha t-\omega t\right)-$$

$$-\exp\left(-\nu_1\alpha^2t\right)\frac{2K}{f}\cos\left(\sigma_2+\frac{1}{R_2}\frac{y^2}{2}+\frac{x+l}{c_n}\alpha-\alpha t-\omega t\right)$$

откуда получится

$$u=\exp\left(-\nu_1\alpha^2t-\frac{y^2}{y_0^2f^2}\right)\frac{4K}{f}\cos\left(\frac{1}{R_1}\frac{y^2}{2}+\frac{1}{R_2}\frac{y^2}{2}+\frac{l}{c_n}\alpha-\alpha t-\omega t\right)\times \tag{3.9}$$

$$\times\cos\left(\frac{1}{R_2}\frac{y^2}{2}-\frac{1}{R_1}\frac{y^2}{2}+\frac{x}{c_n}\alpha+\sigma_1\right)$$

$$\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}=-2\frac{\dfrac{df}{dx}}{f\dfrac{1}{\alpha\alpha_1}\dfrac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}}$$

$$\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}=-2\frac{\chi_2 K^2}{f^2}\frac{\alpha\alpha_1}{\dfrac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}}$$

При выборе $\sqrt{C'-\bar{\xi}}=C'\dfrac{l}{c_n}$ получится $\dfrac{df}{dx}=0$ на границе $x=0$ и условие $\sigma_x=0$ удовлетворится на всей поверхности.

Указанная задача представляет стоячую волну в интерферометре со свободной нижней поверхностью и заданным в начальном сечении гауссовым пучком.

Из условий на свободной поверхности $x=0$, $\sigma'_{xy}=0$, $\sigma'_x=\dfrac{H_0^2}{8\pi\rho_0}$, где $\sigma'_{i,k}$ есть компоненты тензора Максвелла

$$\sigma'_{ik}=\sigma_{ik}+\frac{H_iH_k}{4\pi\rho_0}-\frac{1}{2}\frac{H^2}{4\pi\rho_0}\delta_{ik},\ \sigma'_{xy}=\sigma_{xy}+\frac{H_0h_y}{4\pi\rho_0},\ \sigma'_x=\sigma_x+\frac{H_0^2}{8\pi\rho_0}$$

и уравнений индукции

$$\frac{\partial\bar{h}}{\partial t}=-\left(\overline{H}_0\nabla\right)\bar{\mathrm{v}}+\left(\bar{\mathrm{v}}\nabla\right)\overline{H}_0+\overline{H}_0\operatorname{div}\bar{\mathrm{v}},\ \overline{H}=\overline{H}_0+h$$

можно получить, отбрасывая малые члены [1,5] $h_x=0$, $h_y=0$, $\sigma_x=0$, $\dfrac{\partial u_x}{\partial x}\approx 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ при $x=0$.

Решение (3.9) для больших $\dfrac{\alpha l}{c_n}$ удовлетворяет условию $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ при учете узости по y возмущенной области.

Приведенный аппарат можно использовать и в задаче о встречных пучках в интерферометре [6].

В указанной проблеме следует считать функцию $f(x)$ гладкой и полагать $\dfrac{df}{dx}=0$ при $x=0$, откуда $l=\dfrac{c_n\sqrt{C'-\bar{\xi}}}{C'}$

Тогда получится $f^2=\dfrac{\bar{\xi}}{C'}+\dfrac{C'x^2}{c_n^2}$ и для фазы

$$\sigma_{1,2} = \pm \frac{A'}{f_0^2} \sqrt{\frac{\bar{\xi} c_n^2}{C'^2 \alpha^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C'\alpha^2}{\bar{\xi} c_n^2}} x + \sigma_{01,2}$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{A'}{c_n f_0^2} \sqrt{\frac{\bar{\xi} c_n^2}{C'^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C'^2\alpha^2}{\bar{\xi} c_n^2}} x + \Delta$$

где Δ находится из того, что при $x = l$ для резонатора суммарная фаза равняется нулю, откуда получается $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = -\frac{\alpha}{c_n} l$ при $x = l$. Следуя работе [6], где рассмотрена круговая поляризация, для звуковой волны, имеющей почти линейную поляризацию по оси x, можно записать аналогичные соотношения на зеркалах

$$|u_B|^2 = R|u_F|^2; \; (1-R)K_0^2 = u_F^2 + Ru_B^2 - 2\sqrt{R}u_F u_B$$

Первые соотношения означают равенство мощности отраженной волны $(u_B)^2$ значению мощности падающей волны (u_F^2), умноженной на квадрат коэффициента отражения, второе есть равенство скорости частиц u_F прямой волны скорости частиц прошедшей части начальной волны $K_0\sqrt{1-R}$ плюс скорости частиц отраженной части обратной волны [6]

$$u_F = K_0\sqrt{1-R} + u_B\sqrt{R}, \quad K_0 = |K_0|\cos\alpha\tau$$

Для коэффициента пропускания интерферометра принято полагать

$$P = \frac{|u_F|^2(1-R)}{|K_0|^2}$$

Поскольку $u_{1,2} = |u_{1,2}|\cos\Phi_{1,2}$, $\Phi_{1,2} = (-\omega t + \alpha\tau_{1,2} + \varphi_{1,2})$, можно, интегрируя по ωt от 0 до 2π, вышеописанное уравнение найти в виде

$$|u_F| = K \quad \text{и}$$

$$(1-R)|K_0|^2 = K^2(1-R)^2 + K^2 4R\sin^2\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}$$

Пропускная способность примет вид

$$P = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}}$$

Сюда нужно подставить значение $\frac{1}{2}(\Phi_1-\Phi_2)=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)-\frac{\alpha l}{c_n}$. Требуя, чтобы аргумент арктангенса в $\sigma_1-\sigma_2$ при $x=l$ равнялся 1, как и в [6], можно получить

$$C'=2\bar{\xi},\quad \frac{1}{R_0}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}+\chi_2 K^2=\sqrt{\bar{\xi}}$$

Для интерферометра имеет место условие [6]

$$f_0^4=\frac{1}{4}\frac{\left(2\left|R_0^{\bullet}\right|-2l\right)^2}{R_0^{\bullet 2}},\quad R_0^{\bullet}=R_0\frac{\alpha}{c_n}$$

Отсюда $1=\frac{\bar{\xi}}{C'}+\frac{l}{|R_0|}$. Окончательно получится $P=\frac{K^2(1-R)}{K_0^2}$,

$$P=\frac{1}{1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2(\delta-F)},\quad \delta=-\frac{2\alpha l}{c_n},\quad F=-\frac{\pi}{4}\frac{l+x'}{\sqrt{1+x'}},$$

$$x'=\frac{\chi_1 K^2}{\alpha\mu},\quad \mu=-\frac{c_n}{\alpha^2 y_0^2}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}$$

при $\chi_2=0$, $\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}<0$.

Полученные уравнения дают неявное значение x'. Можно отметить, что $R_{1,2}=\frac{c_n}{\alpha}R_{1,2}^{\bullet}$, где $R_{1,2}^{\bullet}$ - радиусы кривизны прямой и обратной волн и из (3.8), считая, что $f_1=f_2$, $\tau'_{1,2}=\pm\frac{x}{c_n}$, получить при $x=l$

$$\mp\frac{df(l)}{dx}=\frac{1}{c_n}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{1}{R_{1,2}^{\bullet}(0)}+\chi_2 K^2$$

что дает

$$-\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{1}{c_n}\frac{1}{R_2^{\bullet}(0)}-2\chi_2 K^2=\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{1}{c_n}\frac{1}{R_1^{\bullet}(0)}$$

При больших (K_0) левая часть уравнения P, являющаяся прямой линией, имеет несколько пересечений с функцией, даваемой правой частью, что приводит к возможным многим амплитудам, приводя к явлению [6] бистабильности.

Аналогичные рассмотрения применимы к вышерассмотренной задаче об отражении гауссова пучка от свободной поверхности.

Литература

1. *Bagdoev A.G., Petrosian L.G.* Nonlinear waves in mixture of magnetic fluid with gas bubbles. - Amse press, 1987, vol.7, №.4, pp.53-62.
2. *Канер В.В., Руденко О.В.* О распространении волн конечной амплитуды в акустических волноводах. - Вестник Московского университета. Сер. физич., астрономии. 1978, т.19, с.78.
3. *Hunter J.K., Keller J.B.* Weakly nonlinear high frequency waves. - Comm. Pure Appl. Math., 1983, 36, p.547-563.
4. *Carbonaro P.* High frequency waves in quasilinear inviscid gasdinamics. - ZAMP, vol.37, №.1.
5. *Багдоев А.Г.* Распространение волн в сплошных средах. - Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1981, 300 с.
6. *Marburger J.H., Felber F.S.* Theory of a lossless Fabry-Perot Interferometer. - Phys. Rev. A 1978, vol.17, №.1, p.336-342.
7. *Багдоев А.Г., Шекоян А.В.* Отражение квазимонохроматической нелинейной волны от свободной поверхности среды. - Изв. АН РА, Механика, 1991, т.44, №.1, с.28-36.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
26.02.1993