ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 3-4, 1994 Механика

УДК 532.516

НЕСИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ СМАЗКИ В СЛОЕ МЕЖДУ ДВУМЯ СООСНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Бондаренко В.С., Петросян Л.Г.

Բոնդարենկո Վ.Ս., Պետրոսյան Լ.Գ.

Երկու համառանցք գլանների միջև եղած շերտում քսուքի չկայունացած շարժման ոչ սիմետրիկ մոդելը

Խնդրի լուծման համար կիրառվում է ոչ սիմետրիկ լարման թենզորով կոնտինուումի տեսությունը: Ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ մասնիկների արագության և պտտման անկյունային արագության համար: Հաստատված է, որ քսուքի հոսքի ստացիոնար ռեժիմի հաստատման ժամանակը փոքրանում է Նավյե-Ստոքսի դասական արդյունքների համեմատությամբ: Միկրոկառուցվածքի հաշվառման ազդեցությունը լուսաբանված է գրաֆիկների վրա:

Bondarenko V.S., Petrosian L.G.

Asymmetrical Model for Non Steady Motion of Lubricant in Film Between Two Co-centric Cylinders

Использована теория континуума с несимметричным тензором напряжений к решению задачи неустановившегося движения смазки в слое между соосными цилиндрами. Получены аналитические выражения для скорости и угловой скорости вращения частиц. Установлено, что время разгона шипа, как и время установления стационарного режима течения смазки в слое между двумя соосными цилиндрами (шипом и подшипником) уменьшается (в зависимости от микроструктуры жидкости) по сравнению с результатами классической теории Навье-Стокса. Влияние учета микроструктуры проиллюстрировано на графиках.

Рассмотрим два соосных цилиндра, пространтсво между которыми залолнено вязкой несимметричной жидкостью. Пусть при этом внешный цилиндр неподвижен, а втуренний начинает вращаться под действием приложенной к нему в момент $t=0$ пары с постоянным моментом M. Найдем последующее движение внутреннего цилиндра, принимая во внимание трение его о смазочный слой.

Задача в такой постановке аналогична задаче Н.П.Петрова и будет соответствовать случаю шипа, не несущего поперечной нагрузки. Задача о несимметричной модели гидродинамической теории цилиндрического подшипника (задача Зоммерфельда) рассмотрена в [1]. С практической точки зрения достаточно будет ограничиться приближенным решением, полагая просвет между цилиндрами малым.

Задачу в такой постановке решил С.М.Тарг [2]. Вышеуказанное решение было основано на классической теории континуума. Однако, классическая точка зрения налагает сильные ограничения на пределы, в которых континуальное описание макроскопического поведения может успешно отражать тонкую структуру материала.

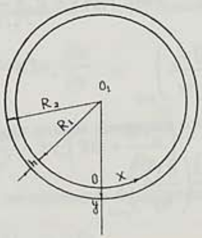
Накопившиеся факты свидетельствуют о том, что классическая теория континуума Навье-Стокса не может точно предсказать поведение некоторого класса жидкостей и особенно течений через тонкие капилляры и узкие зазоры, так как не содержит механизма для объяснения наблюдаемых новых физических явлений. Такая потеря точности возможна в случаях, когда характерный размер системы (разность радиусов коаксиальных цилиндров) сравним с характерной материальной длиной вещества, значение которой обусловлено средним размером молекул или зерен, содержащихся в среде [3].

Это обстоятельство (совместно с другими недостатками классической теории континуума) привело исследователей к разработке теории несимметричных жидкостей.

Все более очевидно, что разработанные в последнее время положения теории структурных жидкостей могут успешно описывать неньютоновские поведения реальных жидкостей [3]. В эту теорию введены два независимых кинематических векторных поля, одно из которых представляет поступательные движения частиц жидкости, а другое - вращательные движения частиц, характеризующие внутренние степени свободы, соответствующие им моментные напряжения [3-12]. Характерным отличием теории структурных сред с несимметричным тензором напряжений является присутствие масштабных параметров. Эти жидкости реагируют на микровращательные движения и спиновую инерцию, поэтому могут воспринимать распределенные поверхностные и массовые пары сил.

В настоящей работе применена теория континуума с несимметричным тензором напряжений к решению задачи неустановившегося движения смазки в слое между двумя соосными цилиндрами.

Обозначим радиусы внутреннего цилиндра (шипа) и внешнего цилиндра (подшипника) соответственно через R_1 и R_2, длина шипа H, а момент инерции вращающихся частей (шипа), относительно оси вращения J_1. Считая течение плоско-параллельным и отсчитывая криволинейную координату x вдоль дуги окружности радиуса R_1 , а координату y - вдоль внешней нормали к этой окружности, будем полагать величину $h = R_2 - R_1$ малой по сравнению с R_1 и пренебрегать кривизной координатных линий (фиг. 1).



Фиг. 1

Дифференциальные уравнения неустановившегося движения несиммет[р]ной жидкости в смазочном слое имеют вид [3,13]

$$\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial t}=(\nu+\nu_r)\frac{\partial^2 \mathbf{v}_x}{\partial y^2}+2\nu_r\frac{\partial\omega}{\partial y} \quad (1)$$

$$I\frac{\partial\omega}{\partial t}=(c_a+c_d)\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}-2\nu_r\left(2\omega+\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial y}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial y}=0 \qquad (\omega=\omega_z) \quad (3)$$

где $\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y$-проекции вектора скорости соответственно на оси x, y; ω - проекция на оси z вектора, характеризующего среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума; ν - кинематическа[я] ньютоновская вязкость; ν_r - кинематическая вращательная вязкость; c_a, c_d - коэффициенты моментной вязкости; I - скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы.

В уравнениях (1), (2) пренебрегали действием массовых сил и моментов и считали давление всюду постоянным, аналогично простого срезывающего течения Куэтта.

Дифференциальное уравнение вращательного движения шипа будет

$$J_1\frac{d\Omega}{\partial t}=M-M_{mp} \quad ,$$

где M_{mp} - момент сил трения.

Если принять во внимание, что [3]

$$M_{mp}=-2\pi R_1^2 H\tau_0=-2\pi R_1^2 H\rho(\nu+\nu_r)\left(\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial y}\right)_{y=0}=$$
$$=-\rho(\nu+\nu_r)R_1 S\left(\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial y}\right)_{y=0} \quad (4)$$

то уравнение вращательного движения можно привести к виду

$$\frac{du}{dt}=\frac{q}{m}+\frac{\rho(\nu+\nu_r)}{m}\left(\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial y}\right)_{y=0} \quad (5)$$

При этом в (5)

$$u=R_1\Omega\,, m=\frac{J_1}{SR_1^2},\quad q=\frac{M}{SR_1} \quad (6)$$

Здесь τ_0- напряжение силы вязкости на поверхности шипа, ρ - массовая плотность смазки, u - переменная скорость движения точки шипа при $y=0$.

Мы предполагаем, что жидкость прилипает к стенкам цилиндров при y=0 и y=h, тогда начальные и граничные условия для поступательной скорости и угловой скорости вращения частиц будут:

$$\text{при} \quad t=0 \quad v_x=0, \quad u=0, \quad \omega=0$$

$$\text{при} \quad y=0 \quad (t>0), \quad v_x=u, \quad \omega=0 \tag{7}$$

$$\text{при} \quad y=h \quad (t>0), \quad v_x=0, \quad \omega=0$$

Так как нестационарные гидродинамические задачи в рамках теории несимметричной модели жидкости даже в простейших постановках имеют своими решениями весьма громоздкие, сложные выражения, то мы приведем ниже приближенное решение задачи. Идея метода состоит в приближенном учете инерционных членов $\partial v_x/\partial t$ и $\partial\omega/\partial t$ в уравнении движения вязкой несимметричной жидкости [14]. Такой приближенный учет инерционных сил был сделан при решении задачи в случае классической ньютоновской жидкости [2]. Вместо полных уравнений (1) и (2) будем рассматривать уравнения, в которых ускорения заменены их средним по толщине слоя значениями и которые имеют следующий вид:

$$\varphi(t)=\frac{1}{h_0}\int_0^{h_0}\frac{\partial v_x}{\partial t}dy \tag{8}$$

$$\psi(t)=\frac{1}{h_0}\int_0^{h_0}\frac{\partial\omega}{\partial t}dy \tag{9}$$

При этом условимся в дальнейшем всюду вместо h писать h_0. Выражения (8) и (9) зависят от t.

При таком осреднении уравнения (1) и (2) примут следующий вид:

$$\varphi(t)=(\nu+\nu_r)\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+2\nu_r\frac{\partial\omega}{\partial y} \tag{10}$$

$$I\psi(t)=(c_a+c_d)\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}-2\nu_r\left(2\omega+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{11}$$

Граничными условиями по-прежнему будут условия (7), а именно:

$$\text{при} \quad y=0 \quad v_x=u(t), \quad \omega=0;$$

$$\text{при} \quad y=h \quad v_x=0, \quad \omega=0 \tag{12}$$

Разрешая (10) относительно $\partial \mathbf{v}_x/\partial y$, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial y}=\frac{1}{\nu+\nu_r}\varphi(t)y-2\frac{\nu_r}{\nu+\nu_r}\omega-C_1 \qquad (13)$$

Подстановка $\partial \mathbf{v}_x/\partial y$ в уравнение (11) дает

$$\frac{\partial^2\omega_x}{\partial y^2}-k^2\omega=\frac{2N^2}{c_a+c_d}\varphi(t)y+\frac{I}{c_a+c_d}\psi(t)-\frac{2\nu_r}{c_a+c_d}C_1 \quad , \qquad (14)$$

где

$$k=\left(\frac{4\nu}{\nu+\nu_r}\frac{\nu_r}{c_a+c_d}\right)^{1/2},\quad N=\left(\frac{\nu_r}{\nu+\nu_r}\right)^{1/2} \qquad (15)$$

Общее решение уравнения (14) есть

$$\omega=C_2\operatorname{ch}(ky)+C_3\operatorname{sh}(ky)-\frac{1}{2\nu}\varphi(t)y+\frac{\nu+\nu_r}{2\nu}C_1-\frac{I}{4N^2\nu}\psi(t) \qquad (16)$$

Подставляя (16) в (13) и интегрируя по y, получим

$$\mathbf{v}_x=\frac{1}{2\nu}\varphi(t)y^2-\frac{2N^2}{k}C_2\operatorname{sh}(ky)-\frac{2N^2}{k}C_3\operatorname{ch}(ky)+$$
$$+\frac{\nu-\nu_r}{\nu}C_1y+\frac{1}{2\nu}\psi(t)y+C_4 \qquad (17)$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 - функции от времени.

Используя граничные условия (12) из (16) и (17), определяем C_1, C_2, C_3 и C_4:

$$C_1(t)=-\frac{IA\psi(t)}{\nu}\left[\frac{1}{\lambda}\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\operatorname{sh}\lambda}+\frac{1}{2}\right]-\frac{Ah_0\varphi(t)}{\nu}\left[\frac{N^2}{\lambda}\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\operatorname{sh}\lambda}+\frac{1}{2}\right]-\frac{uA}{h_0} \qquad (18)$$

$$C_2(t)=\frac{I}{4N^2\nu}\psi(t)-\frac{\nu+\nu_r}{2\nu}C_1 \qquad (19)$$

$$C_3(t)=\frac{I}{4N^2\nu}\psi(t)\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\operatorname{sh}\lambda}+\frac{h_0\varphi(t)}{2\nu\operatorname{sh}\lambda}-\frac{\nu+\nu_r}{2\nu}\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\operatorname{sh}\lambda}C_1 \qquad (20)$$

$$C_4(t)=u+\frac{I}{2k\nu}\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\operatorname{sh}\lambda}\psi(t)+\frac{N^2}{k\nu}\frac{h_0\varphi(t)}{\operatorname{sh}\lambda}-\frac{\nu_r}{k\nu}\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\operatorname{sh}\lambda}C_1 \qquad (21)$$

где $A=\dfrac{1}{1-\dfrac{\nu_r}{\nu}+\dfrac{\nu_r}{\nu}\dfrac{\mathrm{sh}\lambda}{\lambda}-2N^2\dfrac{(1-\mathrm{ch}\lambda)^2}{\lambda\,\mathrm{sh}\lambda}}$, $\lambda=\left(\dfrac{4\nu}{\nu+\nu_r}\dfrac{\nu_r}{c_a+c_d}\right)^{1/2}h_0$ (22)

Подставляя эти значения v_x и ω в правые части дифференциального уравнения вращения шипа (5) и выражений (8) и (9), с учетом (18)-(21), придем к равенствам

$$\frac{du}{dt}=\frac{q}{m}-\frac{\rho(\nu+\nu_r)A}{mh_0}u-\frac{\rho(\nu+\nu_r)Ah_0}{2m\nu}\varphi(t)\left(2N^2\frac{1-\mathrm{ch}\lambda}{\lambda\,\mathrm{sh}\lambda}+1\right)-$$
$$-\frac{\rho(\nu+\nu_r)IA}{2m\nu}\left(2\frac{1-\mathrm{ch}\lambda}{\lambda\,\mathrm{sh}\lambda}+1\right)\psi(t) \tag{23}$$

$$\varphi(t)=\frac{h_0^2}{2\nu}\frac{d\varphi(t)}{dt}-\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{2N^2}{\lambda\,\mathrm{sh}\lambda}-\frac{2N^2}{\lambda}\right)-\frac{A}{2}\left(1-\frac{\nu_r}{\nu}-\frac{2\nu_r}{\nu}\frac{1-\mathrm{ch}\lambda}{\lambda\,\mathrm{sh}\lambda}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(2N^2\frac{1-\mathrm{ch}\lambda}{\lambda\,\mathrm{sh}\lambda}+1\right)\right]+\frac{Ih_0}{4\nu}\frac{d\psi(t)}{dt}\left(2\frac{1-\mathrm{ch}\lambda}{\lambda\,\mathrm{sh}\lambda}+1\right)\times \tag{24}$$
$$\times\left[1-A\left(1-\frac{\nu_r}{\nu}-\frac{2\nu_r}{\nu}\frac{1-\mathrm{ch}\lambda}{\lambda\,\mathrm{sh}\lambda}\right)\right]+\frac{du}{dt}\left[1-\frac{A}{2}\left(1-\frac{\nu_r}{\nu}-\frac{2\nu_r}{\nu}\frac{1-\mathrm{ch}\lambda}{\lambda\,\mathrm{sh}\lambda}\right)\right]$$

$$\psi(t)=-\left(2\frac{1-\mathrm{ch}\lambda}{\lambda\,\mathrm{sh}\lambda}+1\right)\left\{\frac{I}{4\nu}\frac{d\psi(t)}{dt}\left[\frac{1}{N^2}+\left(1+\frac{\nu_r}{\nu}\right)\left(2\frac{1-\mathrm{ch}\lambda}{\lambda\,\mathrm{sh}\lambda}+1\right)A\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{h_0}{4\nu}\frac{d\varphi(t)}{dt}\left[1+\left(1+\frac{\nu_r}{\nu}\right)\left(2N^2\frac{1-\mathrm{ch}\lambda}{\lambda\,\mathrm{sh}\lambda}+1\right)A+\frac{A}{2h_0}\left(1+\frac{\nu_r}{\nu}\right)\frac{du}{dt}\right]\right\} \tag{25}$$

Введем следующие безразмерные величины:

$$u^{*}=\frac{u}{U_\infty}=u\frac{\rho\nu}{qh_0},\quad \Theta=\frac{\nu}{h_0^2}t,\quad n=\rho\frac{h_0}{m},\quad g=\frac{I}{h_0^2},$$
$$\Phi(\theta)=\frac{\rho h_0}{q}\varphi(t),\quad \Psi(\theta)=\frac{\rho I}{q}\psi(t) \tag{26}$$

Здесь $U_\infty=\dfrac{qh_0}{\rho\nu}$ - предельное значение скорости точки шипа (при y =0) при $t\to\infty$, относящегося к классическому случаю ньютоновской жидкости [2].

Тогда, уравнения (23)-(25) в безразмерной форме примут следующий вид:

$$\frac{du^*}{d\theta}=n-\left(1+\frac{\nu_r}{\nu}\right)Anu^*-\left(1+\frac{\nu_r}{\nu}\right)\frac{An}{2}\left(2N^2\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}+1\right)\Phi(\theta)-$$
$$-\left(1+\frac{\nu_r}{\nu}\right)\frac{An}{2}\left(2\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}+1\right)\Psi(\theta) \qquad (27)$$

$$\Phi(\theta)=\frac{1}{2}\frac{d\Phi(\theta)}{d\theta}\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{2N^2}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}-\frac{2N^2}{\lambda^2}\right)-\frac{A}{2}\left(1-\frac{\nu_r}{\nu}-\frac{2\nu_r}{\nu}\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(2N^2\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}+1\right)\right]+\frac{1}{4}\frac{d\Psi(\theta)}{d\theta}\left(2\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}+1\right)\times \qquad (28)$$
$$\times\left[1-A\left(1-\frac{\nu_r}{\nu}-\frac{2\nu_r}{\nu}\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}\right)\right]+\frac{du^*}{d\theta}\left[1-\frac{A}{2}\left(1-\frac{\nu_r}{\nu}-\frac{2\nu_r}{\nu}\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}\right)\right]$$

$$\Psi(\theta)=-g\left(2\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}+1\right)\left\{\frac{d\Psi(\theta)}{d\theta}\left[\frac{1}{N^2}+\left(1+\frac{\nu_r}{\nu}\right)\left(2\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}+1\right)A\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{d\Phi(\theta)}{d\theta}\left[1+\left(1+\frac{\nu_r}{\nu}\right)\left(2N^2\frac{1-\operatorname{ch}\lambda}{\lambda\operatorname{sh}\lambda}+1\right)A\right]+\frac{du^*}{d\theta}\left(1+\frac{\nu_r}{\nu}\right)\frac{A}{2}\right\} \qquad (29)$$

Так как при $t=0$ $v_x=0$, $u=0$ и $\omega=0$, то из (16)-(21) следует, что $\varphi(0)=0$ и $\psi(0)=0$. Тогда, принимая во внимание (26), получим следующие начальные условия:

$$\text{при } \theta=0 \quad u^*=0,\ \Phi(0)=0,\ \Psi(0)=0 \qquad (30)$$

Уравнения (16) для ω и (17) для скорости v_x, с учетом обозначения (26), в безразмерном виде запишутся так:

$$\omega^*=\frac{\omega h_0}{U_\infty}=C_2^*\operatorname{ch}(\lambda y^*)+C_3^*\operatorname{sh}(\lambda y^*)-\frac{1}{2}\Phi(\theta)y^*+\frac{\nu+\nu_r}{2\nu}C_1^*-\frac{1}{4N^2}\Psi(\theta) \qquad (31)$$

$$v_x^*=\frac{v_x}{U_\infty}=\frac{1}{2}\Phi(\theta)y^{*2}-\frac{2N^2}{\lambda}C_2^*\operatorname{sh}(\lambda y^*)-\frac{2N^2}{\lambda}C_3^*\operatorname{ch}(\lambda y^*)+$$
$$+\frac{\nu-\nu_r}{\nu}C_1^*y^*+\frac{1}{2}\Psi(\theta)y^*+C_4^* \qquad (32)$$

Здесь

$$C_1^*=\frac{\rho\nu}{q}C_1,\quad C_2^*=\frac{\rho\nu}{q}C_2,\quad C_3^*=\frac{\rho\nu}{q}C_3,$$
$$C_4^*=\frac{\rho\nu}{qh_0}C_4,\quad y^*=\frac{y}{h_0}$$

Решения (28) и (32) переходят в классические при $\nu_r = 0$ [2] и (31) дает $\omega = 0$.

Так как ν, ν_r, c_a, c_d не отрицательны, то λ - действительное число.

Структурная несимметричная жидкость, помимо обычных безразмерных параметров, встречающихся в теории ньютоновской жидкости, обладает новыми скалярными константами, связанными с учетом вращательного движения частиц. Несимметричная жидкость характеризуется тремя физическими константами ν, ν_r и $(c_a + c_d)$ в отличие от классической ньютоновской жидкости, которая характеризуется лишь одной константой вязкости [3]. Параметр ν_r имеет размерность вязкости. Поскольку он появляется в результате учета вращательного движения частиц, то естественно его называть вязкостью вращательного движения или просто вращательная вязкость [15]. ν_r характеризует сопротивление вращательным движениям подобно тому, как сдвиговая ньютоновская вязкость характеризует сопротивление поступательным движениям. Константа $(c_a + c_d)$ имеет размерность $[\nu][L^2]$, и с ее помощью можно составить параметр $l = \left(\frac{c_a + c_d}{4\nu}\right)^{1/2}$, который имеет размерность длины. Параметр l может быть отождествлен с некоторой характеристикой вещества, зависящей от размера молекул (подструктуры).

Структурные несимметричные жидкости характеризуются двумя безразмерными параметрами.

Параметр связи N, определенный формулой $N = [\nu/(\nu + \nu_r)]^{1/2}$, характеризует связь уравнений (1) поступательного и (2) вращательного движений. Когда $\nu_r \to 0$, получаем $N \to 0$, эти уравнения разделяются, и уравнение поступательного движения (1) сводится к обычному уравнению Навье-Стокса.

Второй важный безразмерный параметр L представляет собой отношение зазора между стенками внешнего и внутреннего цилиндров $h_0 = R_2 - R_1$ к характерной материальной длине l, то есть

$$L = \frac{h_0}{l} \quad (\text{или } \lambda = kh_0 = \frac{Nh_0}{l} = NL)$$

Это число характеризует взаимосвязь между геометрией и свойствами жидкости.

Можно ожидать, что эффекты несимметричности жидкости будут значительными, когда l либо велико (что соответствует большому размеру подструктуры вещества), либо зазор между цилиндрами h_0 мал.

Большое значение L означает большой зазор между цилиндрами или малую характерную материальную длину l. В этом случае влияние микроструктуры жидкости незначительно. Здесь, по-видимому, представляет интерес второй случай, когда зазор между цилиндрами h_0 мал и сравним с l.

Чтобы показать влияние учета микроструктуры жидкости (смазки) на значение v_x и u, используем их значения, полученные Таргом [2] при анализе решения классического случая. Для u и v_x имеем [2]

$$u = \Omega R_1 \approx \frac{qh_0}{\rho\nu}\left(1 - \exp^{-\frac{\nu\pi}{h_0^2}t}\right) \tag{33}$$

$$v_x \approx \frac{qh_0}{\rho\nu}\left(1 - \frac{y}{h_0}\right)\left(1 - \exp^{-\frac{\nu\pi}{h_0^2}t}\right) = u\left(1 - \frac{y}{h_0}\right) \tag{34}$$

Из (33) видно, что скорость точки шипа (при $y = 0$) при $t \to \infty$ стремится к предельному значению $U_\infty = \dfrac{qh_0}{\rho\nu}$. Заметим, что u будет отличаться от U_∞ менее чем на 1% по истечении промежутка времени t_1, для которого $\exp^{-\frac{\nu\pi}{h_0^2}t_1} = 0,01$. Отсюда

$$t_1 \approx 4,6\frac{h_0^2}{\nu n} = 4,6\frac{h_0 J_1}{\rho\nu S R_1^2} \tag{35}$$

Если, в частности, считать, что вращающееся тело представляет однородный цилиндрический вал, концы которого являются шипами, и если принять, чо полная длина вала в l_1 раз больше длины смоченной части Н , то будет $J_1 = 0,5R_1^2 m_1 = 0,25R_1^3\rho_1 S l_1$ и формула (35), определяющая время разгона, имеет вид

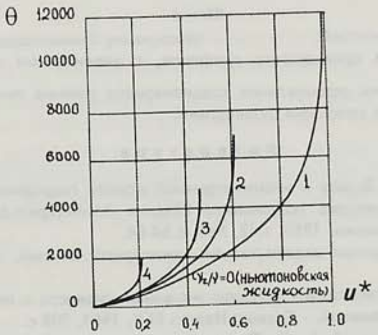
$$t_1 \approx 1.15 l_1 \frac{R_1 h_0}{\nu}\frac{\rho_1}{\rho} \tag{36}$$

Следует отметить, что для подшипника t_1 будет невелико: порядка нескольких секунд. Если принять, например, $l_1 = 10$, $\nu = 2\,\text{см}^2/\text{с}$, $\rho_1 = 10\rho$, $R_1 = 5$ см, $h_0 = 0.05$ см, то получится $t_1 = 14$ с.

Был произведен численный эксперимент для исследования системы дифференциальных уравнений (27)-(29) при начальных условиях (30) для различных значений ν_r/ν и g. Результаты этих исследований были использованы для построения профилей скоростей для различных моментов времени.

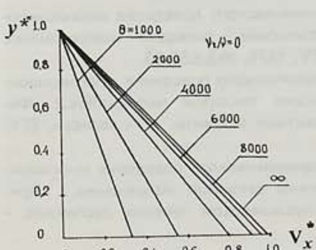
На фиг.2 представлены графики зависимости безразмерной скорости движения точки шипа (при y=0) от безразмерного времени θ (для рассмотренной задачи $\theta = 800t$) при различных значений ν_r/ν (при $\lambda = 1$). Кривая 1 построена для $\nu_r/\nu = 0$ (классический профиль - ньютоновская жидкость), кривая 2 - для $\nu_r/\nu = 0{,}5$, кривая 3 - для $\nu_r/\nu = 1$, кривая 4 - для $\nu_r/\nu = 9$.

Как видно из этого графика, с увеличением отношения ν_r/ν скорость точки шипа уменьшается по сравнению скорости для классических, жидкостей Навье-Стокса, где внутреннее вращение не учитывается. С увеличением ν_r/ν уменьшается также время разгона t_1.

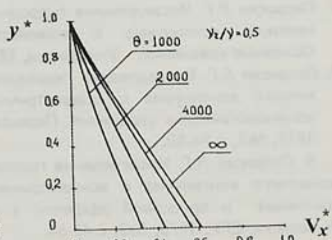


Фиг. 2

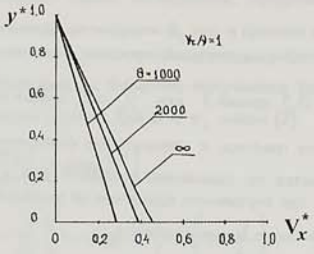
На фиг.3, 4, 5 представлены профили безразмерных скоростей смазки в слое между двумя соосными цилиндрами для разных моментов времени при $\nu_r/\nu = 0$, $\nu_r/\nu = 0{,}5$, $\nu_r/\nu = 1$ (при $\lambda = 1$).



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Как видно из приведенных графиков, с увеличением значений ν_r/ν уменьшается время установления стационарного режима течения смазки в слое между двумя соосными цилиндрами.

Литература

1. *Петросян Л.Г.* Задача о несимметричной модели гидродинамической теории цилиндрического подшипника (Задача Зоммерфельда). - Изв. АН АрмССР, Механика, 1989, т.42, №3, с.54-64.
2. *Тарг С.М.* Основные задачи теории ламинарных течений. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. 420 с.
3. *Петросян Л.Г.* Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений. - Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984. 308 с.
4. *Grad H.* Statistical Mechanics-Thermo-dynamics and fluid dynamics of sistems with an arbitrary number of Integrals. - Commun.pure appl.math., 1952, vol.5, №4, p.455-494.
5. *Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Кувшинский Е.В.* Асимметрическая гидромеханика. - ПММ, 1965, т.29, вып.2, с.297-308.
6. *Нгуен Ван Дьеп, Листров А.Т.* О неизотермической модели несимметричных жидкостей. - ИАН СССР, МЖГ, 1967, №5, с.132-136.
7. *Петросян Л.Г.* Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения.I. Основные уравнения. - Уч.записки, ЕГУ, 1976, №3,с.56-63.
8. *Петросян Л.Г.* Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения.2. Феноменологические уравнения. Перекрестные эффекты. - Уч.записки, ЕГУ, 1977, №2, с.74-80.

9. *Петросян Л.Г.* Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения.3. Пристеночный и приосевой эффекты в пуазелевском течении суспензии. - Уч.записки, ЕГУ, 1978, №2, с.46-54.

10. Петросян Л.Г. К построению модели магнитной гидродинамики несимметричных жидкостей. - ПМ, 1976, т.12, №11, с.103-109.

11. Петросян Л.Г. О модели электродинамики с несимметричным тензором напряжений. - ЖТФ, 1979, т.49, вып.3, с.481-487.

12. Петросян Л.Г. К построению неизотермической модели электрогидродинамики с несимметричным тензором напряжений. - ПМ, 1980, т.16, №4, с.108-114.

13. Петросян Л.Г. Моментная гидродинамическая теория прокатки. - ПМ, 1982, т.18, №4, с.116-121.

14. Слезкин Н.А., Тарг С.М. Обобщенные уравнения Рейнольдса. - ДАН СССР, 1946, т.LIV, №3, с.205-208.

15. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. - М.: Мир, 1964, 456 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию

22.10.1992