ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 3-4, 1994 Механика

УДК 532.591:534.22.2

ОДНОМЕРНЫЕ ВОЛНЫ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

Оганян Г.Г.

Օհանյան Գ.Գ.

Միաչափ ալիքները գազահեղուկ խառնուրդում

Դիտարկվում են այնպիսի գազահեղուկ միջավայրեր, որտեղ սահմանային իզոթերմիկ և ադիաբատիկ ձայնի արագությունները մոտ են իրար: Ստացված են գրգռումների վարքը նկարագրող սահմտոտիկ բանաձևեր ալիքի ճակատից հեռու կետերում: Ցույց է տրված, որ երկար ալիքային մոտավորությունում միջֆազային ջերմափոխանակությունը խոչընդոտում է, իսկ կարճալիքային մոտավորությունում ուժեղացնում է գրգռումների մարումը:

Ohanian G.G.

One Dimensional Wave in Gas-Fluid Mixture

Исследуется волновое движение в газожидкостных средах, в которых величины предельных изотермической и адиабатической скоростей звука в смеси близки одна другой. Полученное уравнение в предельных случаях переходит в уравнения, описывающие волновой процесс в средах, в которых термодинамическое поведение пузырьков близко либо к изотермическому, либо к адиабатическому.

В наиболее общей постановке система уравнений движения газожидкостной монодисперсной бесстолкновительной смеси с учетом несовпадений давлений и температур в фазах, а также эффектов сжимаемости и вязкости фаз приведена в [1]. Теоретическое исследование волновых процессов в рамках односкоростной и однотемпературной модели газожидкостной смеси [2,3] качественно не всегда совпадает с данными эксперимента [2,4,5] ввиду того, что исследовались либо чисто изотермический, либо адиабатический термодинамические режимы поведения газового пузырька в жидкости. Физически приемлемое истолкование результатов проведенных экспериментов дано в [6,7], где впервые подчеркнута важность учета тепловых эффектов, обусловленных межфазным взаимодействием пульсирующего пузырька с несущей жидкостью.

В настоящей работе исследуется волновое движение в специальных газожидкостных средах, в которых величины предельных изотермической и адиабатической скоростей звука в смеси близки одна другой. Методом коротких волн [8,9] выведено двухволновое уравнение, переходящее в предельных случаях в уравнения, описывающие распространение нелинейных акустических волн в смесях, в которых термодинамическое поведение пузырьков близко, либо к изотермическому, либо к адиабатическому. В частных случаях отсутствия теплообмена между пузырьком и жидкостью, они совпадают с известными уравнениями [2,3].

Рассмотрена частная задача с начальными условиями. В линейной постановке получены асимптотические формулы, описывающие поведение возмущений далеко впереди и позади фронта волны. Выявлено, что в длинноволновом приближении межфазный теплообмен противодействует затуханию, а в коротковолновом - усиливает эффект затухания.

1. **Исходные уравнения.** Предположим, что в монодисперсной газожидкостной смеси частицы фаз движутся с одинаковой скоростью. Несущая жидкая фаза обладает эффектами вязкости и сжимаемости, а газовая фаза представляет собой пузырьки калорически совершенного газа. Будем считать, что в рассматриваемой области течения в смеси не происходит сильного пересжатия газовой фазы и потому, ввиду существенного влияния температуры на плотность газа в пузырьках, примем, что теплообмен между фазами определяется лишь тепловым сопротивлением газовой фазы. Тогда можно полагать температуру жидкости T_1 постоянной ($T_1 = T_0 = \mathrm{const}$), при этом, согласно [6,7], учет эффекта теплопроводности газа важен лишь при межфазном взаимодействии с жидкостью. Пренебрегая эффектами образования, дробления, коагуляции и столкновения пузырьков, уравнения движения исследуемой газожидкостной смеси возьмем в виде [1,7,10]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0,\qquad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x} \tag{1.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

$$P_2-P=(1-\varphi_2)\rho_1 R\frac{d^2R}{dt^2}+(1-\varphi_2)\frac{3}{2}\rho_1\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+$$
$$+\frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt}-\frac{R}{c}\frac{d}{dt}\left(P_2-\frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt}\right) \tag{1.3}$$

$$\frac{\rho_2\beta}{\rho_1(1-\beta)}=\mathrm{const},\quad \rho_2R^3=\mathrm{const},\quad P_2=c_{v2}(\gamma-1)\rho_2T_2 \tag{1.4}$$

$$\rho=\rho_1(1-\beta)+\rho_2\beta,\quad P=P_1(1-\beta)+P_2\beta \tag{1.5}$$

$$\frac{dP_2}{dt}=-\frac{3\gamma P_2}{R}\frac{dR}{dt}-\frac{3}{2}\frac{(\gamma-1)k_2\mathrm{Nu}}{R^2}(T_2-T_0) \tag{1.6}$$

$$\varphi_1 = \frac{1,1\beta^{1/3} - \beta}{1-\beta}, \qquad \varphi_2 = \frac{1,47\beta^{1/3} - 0,33\beta}{1-\beta}$$

Здесь t - время, x - координатная ось, u - скорость частиц смеси, R - радиус пузырьков, β - объемная концентрация газа, $\gamma = c_{P2}/c_{V2}$ - показатель адиабаты газа, $\mu = \mu_1[1+o(\beta)]$ - динамический коэффициент вязкости смеси, a - скорость звука, k_2 - коэффициент теплопроводности газа, Nu - число Нуссельта, остальные обозначения общепринятые. Индексы 1 и 2 отнесены, соответственно, к параметрам течения жидкой и газовой фаз. Параметры, характеризующие движения всей смеси, индексов не имеют. Поправочные коэффициенты φ_1, φ_2 учитывают конечность величины β и неодиночность газового пузырька в безграничной жидкости [1,7]. Использование уравнения (1.6) позво-ляет в первом приближении учесть несовпадение температур в фазах.

Комбинируя соотношения (1.4), характеризующие условия сохранения массы газа в пузырьке, и совпадения скоростей частиц жидкой и газовой фаз, получим

$$\frac{1}{\beta(1-\beta)}\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt} - \frac{1}{\rho_2}\frac{d\rho_2}{dt}, \quad \frac{d\rho_2}{dt} = -\frac{3\rho_2}{R}\frac{dR}{dt} \tag{1.7}$$

Учитывая (1.7) и определение плотности всей смеси (1.5), уравнение неразрывности смеси (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{(1-\beta)}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt} - \frac{3\beta}{R}\frac{dR}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.8}$$

Используя уравнения (1.7), (1.8) и (1.3), из определения давления всей смеси (1.5) находим

$$(1-\beta)\frac{dP_2}{dt} - \frac{d}{dt}\left[(1-\varphi_1)\rho_1 R\frac{d^2R}{dt^2} + (1-\varphi_2)\frac{3}{2}\rho_1\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt} - \frac{R}{a_1}\frac{d}{dt}\left(P_2 - \frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt}\right)\right] = (1-\beta)\frac{dP_1}{dt} + \beta(P_2 - P_1)\left(\frac{3}{R}\frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{1.9}$$

Комбинирование уравнений импульса смеси (1.2), пульсации пузырька (1.3) и состояний (1.4) дает

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{P_2}{T_2}\left(\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{3T_2}{R}\frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x} + \left[(1-\varphi_1)\rho_1 R\frac{d^2R}{dt^2} + \right.$$
$$\left. + (1-\varphi_2)\frac{3}{2}\rho_1\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt} - \frac{R}{a_1}\frac{d}{dt}\left(P_2 - \frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt}\right)\right] + \frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.10}$$

Исключив из рассмотрения в уравнении (1.6) давление в пузырьке P_2 посредством уравнения состояния калорически совершенного газа (1.4) и используя (1.7), будем иметь

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}+u\frac{\partial T_2}{\partial x}+\frac{3(\gamma-1)T_2}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial t}+u\frac{\partial R}{\partial x}\right)=-\frac{3}{2}\frac{k_2\mathrm{Nu}}{\rho_2 c_{V2}R^2}(T_2-T_0) \quad (1.11)$$

В зависимости от величины теплообмена между пузырьком и жидкостью в газожидкостных смесях скорость распространения возмущений в предельных случаях совпадает либо с изотермической a_e, либо с адиабатической a_f скоростями звука в смеси, которые задаются формулами [2,3,11]

$$\frac{1}{a_{e0}^2}-\frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{10}a_{1e0}^2}-\frac{\beta_0\rho_0}{P_0}=0,\quad \frac{1}{a_{f0}^2}-\frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{10}a_{1f0}^2}-\frac{\beta_0\rho_0}{\gamma P_0}=0 \quad (1.12)$$

Здесь и далее индекс 0 отнесен к состоянию покоя. Первый из режимов реализуется при $\mathrm{Nu}\to\infty$, а второй - при $\mathrm{Nu}\to 0$. Дифференцируя по ρ_1 тождество $P_1(\rho_1,s_1)=P_1[\rho_1,T_1(\rho_1,s_1)]$ и учитывая постоянство температуры в жидкости, нетрудно показать, что $a_{1e}=a_{1f}=a_1$.

2. **Асимптотические разложения.** Предположим, что по невозмущенной покоящейся смеси в направлении оси x распространяется волна, в которой избыточные значения всех параметров течения малы по сравнению с начальными. Примем, что величины возмущений параметров имеют такой же порядок малости, что и массовая скорость частиц смеси

$$u=\varepsilon a_0 u',\quad P=P_0(1+\varepsilon P'),\quad P_i=P_0(1+\varepsilon P_i'),\quad \rho=\rho_0(1+\varepsilon\rho')$$

$$\rho_i=\rho_{i0}(1+\varepsilon\rho_i'),\quad T_2=T_0(1+\varepsilon T'),\quad R=R_0(1+\varepsilon R'),\quad \beta=\beta_0+\varepsilon\beta' \quad (2.1)$$

$$a_1=a_{10}(1+\varepsilon a_1'),\quad (i=1,2)$$

Здесь ε - безразмерный малый параметр. Рассматриваемую область течения считаем областью коротких волн. В этой области, примыкающей к ударному фронту, изменения избыточных величин, характеризующих возмущенное течение, происходит весьма быстро, несмотря на их малость. Ширина области течения, где сосредоточены возмущения, мала по сравнению с расстояниями, на которые может распространяться волна. Поэтому, для последующих преобразований и упрощений уравнений п.1, введем систему координат, движущуюся со скоростью звука a_0 невозмущенной смеси [8,9]

$$t=\frac{L}{a_0\Delta}t',\quad x=a_0t+Lx_1 \quad (2.2)$$

где L - характерная длина в направлении оси, Δ- второй безразмерный малый параметр. Напомним, что a_0, в предельных случаях совпадает либо с изотермической a_{e0}, либо с адиабатической a_{f0} скоростями звука в смеси. При упрощении уравнений в дальнейшем будут удержаны лишь главные (порядка 1) и старшие (порядка ε) члены и штрихи над возмущениями параметров течения будут опущены.

Применяя преобразования (2.1), (2.2) к уравнениям (1.1)-(1.3) и (1.7)-(1.10), удержим главные члены. Учитывая, что в системе координат $\left(x_1, t'\right)$ волна распространяется по покоящейся смеси, проинтегрируем получаемые упрощенные уравнения

$$\rho = u,\quad P = P_1 = P_2 = \frac{\rho_0 a_0^2}{P_0}u,\qquad \rho_1 = \frac{1}{1-\beta_0}(u + 3\beta_0 R)$$
$$\rho_2 = -3R,\quad R = -\frac{\rho_0 a_0^2}{3P_0}u,\quad \beta = \beta_0(u + 3R) \tag{2.3}$$

В рассматриваемой газожидкостной смеси пусть величины (1.12) невозмущенных предельных скоростей звука a_{e0} и a_{f0} близки одна другой. По предположению, скорость a_0 распространения волны малой, но конечной интенсивности, не совпадает ни с a_{e0}, ни с a_{f0} и потому примем

$$a_0 - a_{e0} = \varepsilon a_0 \sigma_e,\quad a_{f0} - a_0 = \varepsilon a_0 \sigma_f \tag{2.4}$$

Очевидно, что σ_e и σ_f - постоянные величины порядка единицы, связанные между собой, согласно формулам (1.12), соотношением

$$\sigma_e = -\sigma_f + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\beta_0\rho_0 a_0^2}{2P_0} \tag{2.5}$$

Отсюда следует $(\gamma-1)\sim\varepsilon$, что соответствует пузырькам, наполненными многоатомным газом (например, пропаном C_3H_8 при 0,1 МПа и T=$280^0 K$). Комбинирование уравнений состояния газа, (1.8) с формулой $dP_1 = a_1^2 d\rho_1$ позволяет записать уравнение неразрывности в форме, удобной при рассмотрении режима распространения возмущений, близкого к изотермическому

$$\frac{(1-\beta_0)P_2}{T_2}\left(\frac{dT_2}{dt} - \frac{3T_2}{R}\frac{dR}{dt}\right) -$$
$$\frac{d}{dt}\left[(1-\varphi_1)\rho_1 R\frac{d^2R}{dt^2} + (1-\varphi_2)\frac{3}{2}\rho_1\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt} - \frac{R}{a_1}\frac{d}{dt}\left(P_2 - \frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt}\right)\right] - \tag{2.6}$$
$$-\rho_1 a_1^2\left(\frac{3\beta}{R}\frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \beta(P_2 - P_1)\left(\frac{3}{R}\frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

Ввиду того, что искомое уравнение должно быть получено из упрощенных в порядке ε системы уравнений (1.10), (1.11) и (2.6), преобразование (2.2), с учетом определения (2.4), очевидно, можно переписать в явном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\Delta}{L}a_{e0}\frac{\partial}{\partial t'}-\frac{a_{e0}}{L}(1+\varepsilon\sigma_e)\frac{\partial}{\partial x_1},\quad \frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x_1} \tag{2.7}$$

Применим преобразования (2.1) и (2.7) к уравнению (1.11) и при его упрощении оставим главные члены. Получим

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}+3(\gamma-1)\frac{\partial R}{\partial x_1}=\frac{3\gamma}{2}\frac{L^2}{R_0^2}\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}T,\quad \mathrm{Pe}=\frac{La_0}{\lambda_2} \tag{2.8}$$

Здесь Pe - число Пекле, $\lambda_2=k_2(c_{p2}\rho_{20})^{-1}$ - коэффициент температуропроводности газа. Для того, чтобы в (2.8) все члены были одного порядка, необходимо принять

$$T\sim\varepsilon,\quad \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\sim\frac{R_0^2}{L^2}$$

откуда следует, что возмущение температуры - величина более высокого порядка малости, чем величина массовой скорости частиц смеси. Разлагая функцию $a_1=a_1(\rho_1,T_1)$ в ряд Тейлора в окрестности локального термодинамического равновесия и используя формулы (2.1), (2.3), находим главный член разложения

$$a_1=(m-1)\frac{\rho_0a_0^2}{\rho_{10}a_{10}^2}u,\quad m=\frac{1}{a_{10}}\left[\frac{\partial}{\partial\rho_1}(\rho_1a_1)\right]_0 \tag{2.9}$$

Применение преобразования (2.1), (2.7) к уравнениям (1.10) и (2.6) и их последующее комбинирование позволяет исключить из рассмотрения член порядка единицы $\partial R/\partial x_1$, при этом получаемое упрощенное уравнение, кроме старших членов порядка ε, содержит также член порядка единицы $\partial u/\partial x_1$ с коэффициентом, в точности совпадающим с первой из формул (1.12). В теории коротких волн известно [8,9], что члены порядка единицы упрощенного уравнения связаны с переносом массы и импульса смеси. Поэтому в полученном уравнении вышеупомянутый коэффициент необходимо приравнять нулю, и, тем самым, снова придем к определению (1.12) изотермической скорости звука в смеси. Далее, подставляя соотношения (2.3), (2.9) в члены порядка ε, находим

$$\Delta\frac{\partial u_1}{\partial t}+\varepsilon(\alpha_eu_1-\sigma_e)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\delta_e+\frac{R_0}{L}\frac{a_{e0}}{a_{10}}\delta_a\right)\frac{\partial^2u_1}{\partial x_1^2}+\frac{R_0^2}{L^2}d_e\frac{\partial^3u_1}{\partial x_1^3}= \tag{2.10}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial x_1},\quad \mathrm{Re}=\frac{\rho_0La_{e0}}{\mu},\quad u_1=\frac{1}{\beta_0}u$$

$$\alpha_e = m\frac{(1-\beta_0)\beta_0\rho_0^2 a_{e0}^4}{\rho_{10}^2 a_{10}^4}+\left[1-\frac{(1-\beta_0)\beta_0\rho_0 a_{e0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\right]^2, \quad \delta_e=\frac{2}{3}\left(1+\frac{\rho_0 a_{e0}^2}{P_0}A_e\right)$$

$$d_e=\frac{(1-\varphi_{10})\rho_{10}a_{e0}^2}{6P_0}A_e, \quad \delta_e=\frac{A_e}{2}, \quad A_e=\left(1-\frac{P_0}{\rho_{10}a_{e0}^2}\right)\left[1-\frac{(1-\beta_0)\rho_0 a_{e0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\right]$$

Если же исходить от альтернативной формы записи уравнения (1.9), удобной при рассмотрении режима распространения возмущений, близкого к адиабатическому, и проделать аналогичные выкладки, то снова придем к упрощенному в порядке ε уравнению (2.10), в котором заменены a_{e0} на a_{f0}, σ_e на - σ_f, α_e на α_f, где

$$\alpha_f = m\frac{(1-\beta_0)\beta_0\rho_0^2 a_{e0}^4}{\rho_{10}^2 a_{10}^4}+\frac{\gamma+1}{2}\left[1-\frac{(1-\beta_0)\rho_0 a_{f0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\right]^2$$

Ввиду того, что $(\gamma-1)\sim\varepsilon$, в рассматриваемом приближении (порядка ε) $\alpha_e=\alpha_f=\alpha$ и в коэффициентах уравнения (2.10), везде можно заменить a_{e0} на a_0, то есть принять $d_e=d_f=d$, $\delta_e=\delta_f=\delta$, $A_e=A_f=A$. Исключив возмущение радиуса пузырька в уравнении (2.8) и комбинируя его с уравнением (2.10), приходим к окончательному уравнению, описывающему распространение возмущений со скоростью a_0, не совпадающей обязательно ни с одной из предельных невозмущенных скоростей звука:

$$\Delta\frac{\partial u_1}{\partial t}+\varepsilon(\alpha u_1-\sigma_e)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\delta+\frac{R_0}{L}\frac{a_0}{a_{10}}\delta_a+\frac{N}{2}\delta_T\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{R_0^2}{L^2}d\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3}=$$

$$=N\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\Delta\frac{\partial u_1}{\partial t}+\varepsilon(\alpha u_1-\sigma_e)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\delta+\frac{R_0}{L}\frac{a_0}{a_{10}}\delta_a\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{R_0^2}{L^2}d\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3}\right] \tag{2.11}$$

$$N=\frac{2}{3\gamma}\frac{R_0^2}{L^2}\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Nu}}, \quad \delta_T=(\gamma-1)\left[1-\frac{(1-\beta_0)\rho_0^2 a_0^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\right]$$

Здесь вторые слагаемые в круглых скобках ответственны за учет эффекта сжимаемости жидкой фазы и исходят от уравнения (1.3). Существует и иной альтернативный подход к учету сжимаемости, предложенный в [1].

Для сохранения требования сплошности рассматриваемого континиума при воздействии на него умеренных ($P_0\le 3$ МПа) давлений, обычно [7,12], на величину объемного газосодержания налагается ограничение сверху: $\beta_0\le 0,1$. Для

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{N+2\delta}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+d\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=N\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}-\delta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+d\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)$$

Линейное приближение. Применяя к полученному уравнению преобразование Фурье

$$V(k,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(x,t)\exp(-ikx)dx$$

нетрудно выписать общее решение

$$v(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}V(k,0)\exp\left\{i\left[dk^3t-\frac{N^2k^3t}{2(1+N^2k^2)}+kx\right]-\left[\delta k^2t+\frac{Nk^2t}{2(1+N^2k^2)}\right]\right\}dk$$

где спектральная функция $V(k,0)$ есть Фурье-трансформанта начального условия. Здесь k- безразмерное волновое число.

3. Асимптотические решения. Для получения простых аналитических решений перейдем к исследованию предельных случаев.

Длинноволновое приближение. Полагая $N^2k^2 \ll 1$, из общего решения находим

$$v(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}V(k,0)\exp\left[i\left(d-\frac{N^2}{2}\right)k^3t+ikx-\left(\delta+\frac{N}{2}\right)k^2t\right]dk \quad (3.1)$$

Коротковолновое приближение. Если же полагать $N^2k^2 \gg 1$, то из общего решения имеем

$$v(x,t)=\exp\left(-\frac{t}{2N}\right)\int_{-\infty}^{\infty}V(k,0)\exp\left[i\left(dk^3t-\frac{kt}{2}+kx\right)-\delta k^2t\right]dk \quad (3.2)$$

Из решения (3.2) видно, что учет тепловой релаксации в пузырьке приводит к экспоненциальному затуханию во времени амплитуды волны. Такой же закон следует из линейного варианта уравнения, описывающего квазиадиабатический режим распространения волны.

Пусть начальное условие задается в виде

$$v(x,0)=x^2\exp\left(-m^2x^2\right), \quad m=\text{const}$$

Тогда, можно искомую спектральную функцию выразить через эле-ментарные

$$V(k,0)=\frac{1}{4m^3\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{k^2}{2m^2}\right)\exp\left(-\frac{k^2}{4m^2}\right) \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в решение (3.1) и применяя теорему о свертке функций, в длинноволновом приближении получим

$$\nu(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1+4m^2\delta_* t\right)^{-\frac{3}{2}}(3d_* t)^{-\frac{1}{3}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2\delta_* t+\frac{z^2}{1+4m^2\delta_* t}\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{m^2z^2}{1+4m^2\delta_* t}\right)Ai\left(\frac{x-z}{\sqrt{3d_* t}}\right)dz;\quad \delta_*=\delta+\frac{N}{2},\quad d_*=d-\frac{N^2}{2} \tag{3.4}$$

где $Ai(y)$ - функция Эйри. При $t\to 0$, используя свойства функции Эйри [13], нетрудно показать переход решения (3.4) в начальное условие. Разлагая в решении (3.4) функцию Эйри в ряд по степеням z и используя интегральное представление гамма-функций, после применения формулы Лежандра находим

$$\nu(x,t)=\frac{1}{m\left(1+4m^2\delta_* t\right)}(3d_* t)^{-\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(3d_* t)^{-\frac{2n}{3}}\left(\frac{1+4m^2\delta_* t}{m^2}\right)^n\times$$

$$\times Ai^{(2n)}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3d_* t}}\right)\left[\frac{2\delta_* t}{n!}+\frac{1}{m^2}\frac{1}{n!}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]$$

Выпишем асимптотические решения далеко впереди и позади фронта волны, для чего воспользуемся предварительно формулами асимптотического разложения производных функций Эйри при больших значениях аргумента [13]. Далее, ввиду сходимости получаемых рядов [14], получаем соответственно:

при $x(3d_* t)^{-\frac{1}{3}}\to\infty$

$$\nu(x,t)=\frac{(3d_* tx)^{-\frac{1}{4}}}{4m^3}\left(1+\frac{1}{2m^2}\frac{x}{3d_* t}\right)\exp\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3d_* t}}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1+4m^2\delta_* t}{4m^2}\frac{x}{3d_* t}\right]$$

при $x(3d_* t)^{-\frac{1}{3}}\to-\infty$

$$\nu(x,t)=\frac{1}{2m^3}\left|3d_* t\right|^{-\frac{1}{4}}\left(1-\frac{1}{2m^2}\left|\frac{x}{3d_* t}\right|\right)\exp\left(-\frac{1+4m^2\delta_* t}{4m^2}\left|\frac{x}{3d_* t}\right|\right)\times$$

$$\times\cos\left(\frac{2}{3}\left|\frac{x}{3d_* t}\right|^{\frac{3}{2}}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{3.5}$$

Очевидно, что характер поведения возмущений определяется вторыми слагаемыми в выписанных решениях, при этом далеко впереди волны эффекты вязкости и теплообмена противодействуют, а далеко позади - способствуют затуханию возмущений. В длинноволновом приближении учет межфазного теплообмена аналогичен воздействию второй (продольной) вязкости на процесс распространения возмущений и одновременно приводит к уменьшению эффекта дисперсии.

Перейдем теперь к исследованию распространения линейных волн в коротковолновом приближении. Подставляя выражение Фурье-образа (3.3) начального условия в решение (3.2) и опять применяя теорему о свертке функций, находим

$$v(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1+4m^2\delta t\right)^{-\frac{3}{2}}(3dt)^{-\frac{1}{3}}\exp\left(-\frac{t}{2N}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left(2\delta t+\frac{z^2}{1+4m^2\delta t}\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{m^2z^2}{1+4m^2\delta t}\right)Ai\left(\frac{x-\frac{t}{2}-z}{\sqrt[3]{3dt}}\right)dz \tag{3.6}$$

Легко проверить, что при $t\to 0$ данное решение переходит в заданное начальное условие. Как и выше, следуя известной методике [13], решение (3.6) можно представить в виде

$$v(x,t)=\frac{1}{m(1+4m^2\delta t)}(3dt)^{-\frac{1}{3}}\exp\left(-\frac{t}{2N}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(3dt)^{\frac{2n}{3}}\left(\frac{1+4m^2\delta\, t}{m^2}\right)^{n}\times$$
$$\times\left[\frac{2\delta t}{n!}+\frac{1}{m^2}\frac{1}{n!}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]Ai^{(2n)}\left(\frac{x-\frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right)$$

Аналогично выводу асимптотических решений (3.5) длинно-волнового приближения, можно получить: при $\left(x-\frac{t}{2}\right)(3dt)^{-\frac{1}{3}}\to\infty$ (далеко впереди фронта волны)

$$v(x,t)=\frac{1}{8m^5}\left(\frac{x-\frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right)^{\frac{3}{4}}\frac{1}{3dt}\exp\left[-\frac{t}{2N}-\frac{2}{3}\left(\frac{x-\frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1+4m^2\delta t}{4m^2}\frac{x-t/2}{3dt}\right].$$

при $\left(x-\frac{t}{2}\right)(3dt)^{-\frac{1}{3}}\to-\infty$ (далеко позади фронта волны)

$$v(x,t)=\frac{1}{4m^5}\left|\frac{x-\frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right|^{\frac{3}{4}}\frac{1}{3dt}\exp\left[-\frac{t}{2N}-\frac{1+4m^2\delta t}{4m^2}\left|\frac{x-\frac{t}{2}}{3dt}\right|\right]\cdot\cos\left(\frac{2}{3}\left|\frac{x-\frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right|^{\frac{3}{2}}-\frac{\pi}{4}\right)$$

Таким образом, в коротковолновом приближении межфазный теплообмен усиливает эффект затухания возмущений.

Литература

1. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. - М.: Наука, 1978. 336 с.

2. Кутателидзе С.С., Накоряков В.Е. Теплообмен и волны в газожидкостных системах. - Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.

3. Ван-Вейнгарден Л. Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа. Реология суспензий. - М.: Мир, 1975, с.68-103.

4. Кузнецов В.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Экспериментальное исследование распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа. //Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, с.32-44.

5. Noordzij L., Van Wijngaarden L. Relaxation effects, caused by relative motion, on shock waves in gas-bubble liquid mixtures. //J.Fluid Mech.1974, v.66, № 1, p.115-143.

6. Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш. Структура ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа. - Изв.АН СССР. МЖГ, 1974, N6, с.30-41.

7. Губайдулин А.А., Ивандаев А.И., Нигматулин Р.И. Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры. - ПМТФ, 1978, № 2, с.78-86.

8. Гриб А.А., Рыжов О.С., Христианович С.А. Теория коротких волн. - ПМТФ, 1960, № 1, с.63-74.

9. Рыжов О.С. О нелинейной акустике химически активных сред. - ПММ, 1971, т.35, № 6, с.1023-1037.

10. Акуличев В.А. Пульсация кавитационных полостей. // Мощные ультразвуковые поля. - М.: Наука, 1968, с.129-165.

11.Оганян Г.Г. Об уравнениях нелинейной акустики газожидкостных сред. Изв.АН АрмССР, Механика, 1988, т.41, № 3, с.25-36.

12. Гельфанд Б.Е., Губин С.А., Когарко С.М., Тимофеев Е.И. Прохождение ударных волн через границу раздела в двухфазных газожидкостных средах. - Изв.АН СССР, МЖГ, 1974, № 6, с.58-65.

13.Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. - М.: Наука, 1973. 176 с.

14. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. - М.: Наука, 1981. 800 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
3.12.1990