ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 3-4, 1994 Механика

УДК 532.59

РЕШЕНИЕ ДИФРАКЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ВБЛИЗИ КАСАНИЯ ДИФРАКЦИОННОЙ И ПАДАЮЩЕЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛН В ЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Багдоев А.Г., Безиргенян Г.С.

Ա.Գ.Բագդոեւ, Գ.Ս.Բեզիրգենյան

Գծային դրվածքով դիֆրակցիոն խնդրի լուծումը դիֆրակցիոն եւ ընկնող գրավիտացիոն ալիքների շոշափման կետի շրջակայքում

Խնդրի լուծումը հանգում է $h = h(x, y)$ փոփոխական խորություն ունեցող անսեղմելի հեղուկի ազատ մակերևույթի $\eta = \eta(t, x, y)$ գրգռման որոշմանը երկրաչափական խավարի և ընկնող ու տարածվող ալիքի տիրույթներում: Սկզբնական պայմանները տալով Կիրխոֆի տեսքով և օգտագործելով «սաղր ջրի» վարկածը և Ադամարի մեթոդը, գտնված է գծային խնդրի լուծումը սահմանային դիֆրակցիոն և տարածվող ալիքների շոշափման կետի շրջակայքում: Թռիչքային ալիքի դեպքում դիտարկված է ստացիոնար դիֆրակցիայի խնդիրը: Ցույց է տրված, որ այս դեպքում ալիքի լայնույթը և փուլը արտահայտվում են Ֆրենելի ինտեգրալներով:

Bagdoev A.G., Bezirgenian G.S.

The Solution of the Diffraction Problem the Near Tangencty of Diffraction and Inciding Gravitation Waves in Linear Statement

Используя модифицированный метод Адамара, в линейной постановке с использованием гипотезы "мелкой воды" найдено возвышение $\eta = \eta(t, x, y)$ свободной поверхности жидкости с переменной глубиной $h = h(x, y)$ вблизи касания фронтов дифрагированной и распространяющейся волн. Показано, что в частном случае скачкообразной волны решение нестационарной задачи выражается через функцию *arctg*, что хорошо известно. В последнем случае, для получения из него решения стационарной задачи (которая является более типичной в явлении дифракции) к функции *arctg* применено преобразование Лапласа по времени. Определены амплитуда и фаза волны, которые выражаются через интегралы Френеля.

Проблема дифракции волн разной природы (гравитационных, акустических, электромагнитных) на телах (препятствиях) разной формы в разных средах является хорошо известной. Имеется многочисленная литература по дифракции электромагнитных, акустических, гравитационных волн на барьерах разной формы в разных средах. Совершенно ясно, что даже краткий обзор фундаментальных работ по методике решения этой проблемы неуместно приводить в статье по понятной причине. Вкратце остановимся на некоторых из них, в которых предложены разные: аналитические, численные или комбинированные методы решения дифракционных задач.

Из аналитических методов следует отметить некоторые классические методы:

1) Метод Кирхгофа (интегральный метод), являющийся математическим обобщением принципа Гюйгенса-Френеля, основан на точной формуле Грина и описывает решение стационарной задачи дифракции в однородной среде при соответствующих краевых условиях, которые задаются приближенно [1-4] (в области тени их полагают равным нулю, а в освещенной части их принимают такими же, как при отсутствии барьера).

2) Метод Фурье - когда функция, описывающая поле, представляется в виде Фурье-разложения по одной из координат [5-7]. При применении этого метода обычно делается переход от декартовых координат к цилиндрическим (в случае угловых дифракционных областей) или к сферическим (в случае препятствий с гладкой криволинейной границей).

3) Метод Фурье - преобразование, пригодное для стационарных задач дифракции 2 в однородных средах.

Из локальных методов решения дифракционных задач в неоднородных средах, описывающих возмущенное поле в некоторой его части (например, полутени), следует отметить:

а) метод пограничного слоя, основоположниками которого являются Фок [8] и Леонтович [9]. Первоначально этот метод Фок сформулировал как принцип локального поля ([8], с.15-16);

б) метод Адамара для нестационарных дифракционных задач, который непосредственно использован в этой статье.

Суть метода пограничного слоя, который в дальнейшем был развит Бабичем и др. в работах [10, 11], состоит в нахождении главного члена асимптотического разложения решения стационарной задачи дифракции по обратным степеням ω, при $\omega \to \infty$ $\left(u = \sum_{0}^{\infty} u_s(M) e^{i\omega\tau(M)} \Big/ (-i\omega)^{s+\gamma} \right)$ в окрестности фронта волны, то есть в узком слое, имеющем порядок $O\left(\omega^{-\frac{3}{2}}\right)$.

Суть метода Адамара состоит в том, что решение в любой момент в любой точке [12, 13], расположенной вблизи границы возмущенной области, выражается через начальные условия и фундаментальное (элементарное) решение волнового уравнения.

Уместно отметить, что изучение окрестности касания произвольной волны с дифракционной на основании линейного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами гиперболического типа методом Адамара, проведено в [14]. Обзор работ по решению дифракционных задач численными и комбинированными методами частично можно найти в [2, 7, 15]. Кстати, довольно краткий обзор работ по дифракции приведен в [3].

1. Физическое описание задачи, основные предположения и математическая постановка. Пусть одиночная слабая поверхностная гравитационная волна произвольной формы (например, уединенная волна, возбужденная разными причинами: мгновенным порывом ветра, подводным землетрясением или дрейфом) набегает на вертикальный тонкий жесткий полубесконечный барьер с заостренным краем, расположенный в морской или океанской прибрежной зоне. Считается, что в начальный момент $t=0$ волна, сталкиваясь с волнорезом, касается его заостренного края. Начало координат выберем на кромке препятствия, а за плоскость xOy примем невозмущенную поверхность жидкости. В рассматриваемой задаче возмущенное движение жидкости представляет собой колебательное движение частиц вокруг их невозмущенного состояния.

Основные предположения мелкой воды [5, 7, 16] в линейной теории:

а) амплитуда колебания частиц достаточно мала по сравнению с характерной глубиной жидкости ($\eta_{max}/h_t << 1$);

б) вертикальные ускорения частиц достаточно малы ($|dw/dt| << 1$), то есть их влиянием на распределение давления можно пренебречь;

в) глубина воды в прибрежной зоне достаточно мала по сравнению с длиной волны ($h_t/\lambda << 1,\ c=\sqrt{gh}$ - длинная волна), где $h(x,y)$ - глубина воды в невозмущенном состоянии, h_t- характерная глубина воды у барьера, λ- длина волны, c - скорость распространения длинных гравитационных поверхностных волн в воде конечной глубины, а η_{max}- максимальное отклонение свободной поверхности жидкости от ее невозмущенного состояния. На основании предположений а) и б) возмущенное движение несжимаемой весомой идеальной жидкости под воздействием силы тяжести описывается системой линейных уравнений движения и неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial t}\approx-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial t}\approx-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\ -g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0 \qquad (1.1,\ а\text{-}в)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (1.2)$$

Граничные условия на дне (моря или океана) и на свободной поверхности запишутся соответственно в форме

$$v_n=0 \text{ при } z=-h(x,y),\quad w|_{z=\eta}=\frac{d\eta}{dt}\approx\frac{\partial\eta}{\partial t} \text{ при } z=\eta \qquad (1.3,\ а\text{-}б)$$

Для полной формулировки задачи (с математической точки зрения) необходимо еще записать начальные условия. Но предварительно покажем, что система уравнений (1.1а-в), (1.2) при граничных условиях (1.3а-б) можно свести к волновому уравнению вблизи фронтов волн.

Расшифруем граничное условие (1.3а). Обозначим через n_0 единичный вектор нормали ко дну. Тогда

$$n_0=\frac{\nabla(z+h(x,y))}{|\nabla(z+h(x,y))|}=\frac{\partial h/_{\partial x}\,\vec{i}+\partial h/_{\partial y}\,\vec{j}+\vec{k}}{|\nabla(z+h(x,y))|},\quad \mathrm{v}_n=(u,\mathrm{v},w)(n_{0x},n_{0y},n_{0z})$$

Следовательно,

$$w\big|_{z=-h}=-\left(u\frac{\partial h}{\partial x}+\mathrm{v}\frac{\partial h}{\partial y}\right) \tag{1.4}$$

Интегрируя уравнение (1.1в) по z в пределах от z до η, получим гидростатический закон распределения давления: $p=p_a+\rho g(\eta-z)$. Подстановка последнего выражения в первые два уравнения движения дает

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-g\frac{\partial \eta}{\partial x},\quad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}=-g\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{1.5,а-б}$$

Как видно из (1.5), продольные и поперечные компоненты ускорения частиц не зависят от апликаты z. С учетом этого факта проинтегрируем уравнение неразрывности по z в пределах от $-h$ до η. Тогда с учетом граничных условий (1.3б) и (1.4) и предположения а) получим

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial(hu)}{\partial x}+\frac{\partial(h\mathrm{v})}{\partial y}=0 \tag{1.6}$$

Умножив уравнения (1.5) на h, затем продифференцировав соответственно по x и y, и сложив, с учетом последнего выражения, легко установить, что

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)=g\left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

Сведем последнее уравнение к волновому уравнению. С этой целью произведем замену $\eta=\eta'\exp\Phi(x,y)$, где Φ и ее производные первого и второго порядка являются довольно гладкими функциями, причем Φ подлежит определению. Подстановка такой замены в уравнение дает

$$\frac{\partial^2\eta'}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial^2\eta'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta'}{\partial y^2}\right)-g\left[\left(2h\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta'}{\partial x}+\left(2h\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial y}\right)\frac{\partial \eta'}{\partial y}\right]=$$
$$=g\left[h\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right]\eta'$$

Физически очевидно, что вблизи фронта волны

$$\left|\partial\eta'/_{\partial t}\right|,\quad \left|\partial\eta'/_{\partial x}\right|,\quad \left|\partial\eta'/_{\partial y}\right|>>\eta'$$

Следовательно, в последнем уравнении слагаемыми типа $\eta' h\times$ $\times(\partial^2\Phi/\partial x^2+\partial^2\Phi/\partial y^2)$ и того же порядка по сравнению с $\partial^2\eta'/\partial t^2$, $\partial^2\eta'/\partial x^2$, $\partial^2\eta'/\partial y^2$ можно пренебречь. Тогда уравнение, которое получается из последнего после отбрасывания из него слагаемых отмеченного порядка, чтобы стало волновым уравнением, необходимо полагать:

$$2h\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}=0 \quad \text{и} \quad 2h\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial y}=0 \tag{1.7}$$

Таким образом, функция $\eta' = \sqrt{h\eta}$ в окрестности фронтов волн удовлетворяет волновому уравнению.

Семейство лучей. Начальные условия. С целью нахождения решения задачи в любой момент $t>0$ в окрестности касания точки дифракционной волны с распространяющейся волной и математической записи начальных условий проведем следующее построение.

Физически имеются два семейства поля лучей, которые характеризуются как экстремали интеграла Ферма:

а) дифракционные лучи, исходящие из края экрана, являющиеся источником излучения вторичных возмущений (согласно принципу Гюйгенса-Френеля), за счет которых образуется слабо смачиваемая зона, расположенная за барьером (Огибание волной препятствие - дифракция в узком смысле);

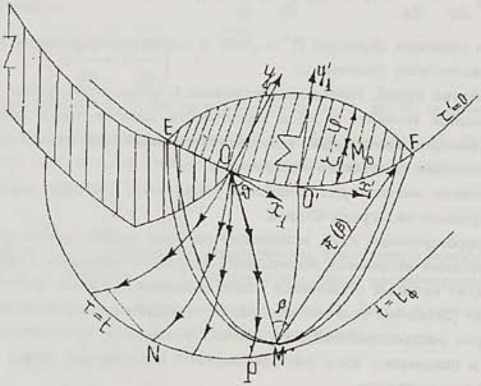
б) лучи распространяющейся волны, которые не являются центральными лучами и покрывают зону распространения набегающей волны после столкновения с волнорезом.

Чтобы описать эти два семейства лучей, введем две системы криволинейных координат: τ, θ - для первого семейства и τ', s - для второго семейства. Координата

$$\tau = \tau(0,N) = \min\left(\delta\int_0^N d\sigma / c(x,y)\right)$$

характеризует время пробега возмущений от кромки препятствия до текущей точки возмущенной области вдоль дифракционных лучей, то есть определяет положение точки на луче. Совершенно ясно, что фронт дифракционной волны в любой момент t характеризуется уравнением $\tau = t$. Координата ϑ описывает дифракционные лучи, то есть $\vartheta = \mathrm{const}$ вдоль луча и отсчитывается от фиксированного направления. Координата τ' имеет тот же смысл, что и τ, но уже для падающей на волнорез и распространяющейся волны, а координата s отсчитывается от края экрана вдоль начального фронта волны и фиксирует лучи распространяющейся волны, которые не центральны. Кроме них, введем координатную систему x_1Oy_1, причем ось Ox_1 направим по касательной к фронту $\tau'=0$, а Oy_1 - перпендикулярно к ней (фиг.1). Далее введем расстояния ζ и φ, отсчитываемые, соответственно, от текущей точки M_0, расположенной за фронтом волны $\tau'=0$ до нее, и от той же точки до квазисферы (полулунок), являющейся обращением фронта дифракционной волны (принцип взаимности

[18]). (В случае однородной среды фронт дифракционной волны является сферой).



Фиг. 1

Геометрическая картина дифракции на остром крае в плане

После таких построений и обозначений, начальные условия представим в форме приближенных условий Кирхгофа [4], то есть

$$\eta'\big|_{t=0} = \left| \begin{matrix} A\zeta^{\alpha}x_1^{\gamma} \\ 0 \end{matrix} \right., \quad \frac{\partial\eta'}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \left| \begin{matrix} \alpha\, Ac_0\zeta^{\alpha-1}x_1^{\gamma} & \text{при } \zeta\geq 0 & \text{и} & x_1\geq 0 \\ 0 & \text{при } \zeta<0 & \text{или} & x_1<0 \end{matrix} \right. \tag{1.8}$$

где α, γ характеризуют гладкость решения поперек и вдоль волны и могут быть любыми вещественными числами, причем $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, $\alpha + \gamma \geq -\frac{3}{2}$, а $A = A_1 c_0^{\ \alpha} = \mathbf{const}$, A_1 характеризует интенсивность набегающей волны, а c_0 - скорость волны в точке O, $\left(c(O) = c_0\right)$. (Объяснения физического смысла допущений, вложенные в приближенных условиях Кирхгофа, приведены в [2], с.248).

2. Решение задачи. Как уже было сказано, решение полученной задачи Коши по [12, 13] в любой момент $t > 0$, в любой точке M возмущенной области выражается через начальные условия и фундаментальное (элементарное) решение волнового уравнения (вернее, сопряженного к нему), найденное Адамаром, которое было конкретизировано (с точки зрения практического приложения) Бабичем [17]. Чтобы в произвольной точке M пространства t, x, y, лежащей правее луча OP, записать решение, необходимо построить обращенный характеристический коноид с вершиной в точке M и образующими, составленными из бихарактеристик волнового уравнения, и найти его пересечение с плоскостью $t=0$ (фиг 1). (Вершина коноида является особой точкой решения линейной задачи). Область интегрирования обозначим через $\sum$. Она состоит из квазиокружности $\varphi=0$ (которая совпадает с обращенной дифракционной волной по принципу взаимности) и части начального положения фронта падающей волны $\zeta=0$ $(\tau'=0)$. Тогда искомое решение задачи Коши (которое Адамар получил, используя формулу Грина) запишется в форме:

$$\eta'(M)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{c^2(M_0)}\left[\eta'\big|_{t=0}\frac{\partial\eta'_\Phi}{\partial t}+\eta'_\Phi\frac{\partial\eta'}{\partial t}\bigg|_{t=0}\right]dM_0 \qquad (2.1)$$

где η'_Φ - фундаментальное решение сопряженного уравнения к волновому ([13], с.170, 178). Причем рассматривается конечная часть интеграла.

При этом, согласно теории Кирхгофа, следует интегрировать по освещенной части начальной волны, то есть полагать $x_1\geq 0$ [2]. Для пояснения сути этого подхода обозначм через $x_п$ и $\xi_п$, соответственно, точки пересечения фронта квазиокружности с начальной волной и экраном, причем $x_п>0$, $\xi_п<0$. Область интегрирования состоит из участков $(\xi_п,0)$ и $(0,x_п)$. Когда $t=\tau$, то есть точка М находится на точечной волне, квазиокружность EF проходит через край О экрана и $\xi_п=0$ (фиг. 1). Естественно считать, что при малых $t-\tau$ точка пересечения квазиокружности с экраном $x_1=\xi_п\approx c_0(t-\tau)$. В то же время, как показано далее

$$x_п=s\pm\sqrt{s^2+\frac{2c_0(t-\tau)}{K_1-K_2}}$$

(s- расстояние от края экрана, K_1 и K_2 - кривизны, соответственно, начальной волны и квазиокружности) и для порядков можно получить: $s^2=c_0(t-\tau)$, $x_п\sim\sqrt{c_0(t-\tau)}$. Отсюда следует, что $\xi_п<<x_п$ и при интегрировании в (2.1) частью области $x_1<0$ следует пренебречь. Более строгое обоснование выбора $x_1>0$ для области Σ проведено для модельной задачи определения давления и скоростей жидкости в окрестности точки касания дифракционной и падающей волн, где получено решение граничной задачи в виде интегралов по x_1 в пределах $(\xi_п,0)$, $(0,x_п)$ [18], причем

$$\xi_п=-V\left(t-\frac{1}{C_0}\right)\sqrt{(x-\xi_п)^2+y^2},\ x_п=V\left(t-\frac{1}{C_0}\sqrt{(x-x_п)^2+y^2}\right)$$

где ось Ox выбрана по поверхности жидкости, а ось Oy - по нормали к ней (в глубь жидкости), а $V>c_0$ - скорость фронта давления на поверхности.

В рассматриваемом случае $\tau = r/c_0$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Из выражений $\xi_п$ и $x_п$ можно получить

$$\xi_п = -\frac{V(t-\tau)}{1+\frac{V}{c_0}\frac{x}{r}}, \quad x_п = V\frac{\frac{xV}{C_0^2}-t+\sqrt{\left(t-\frac{xV}{C_0^2}\right)^2+\left(\frac{V^2}{C_0^2}-1\right)\left(t^2-\tau^2\right)}}{\frac{V^2}{c_0^2}-1}$$

Отсюда следует, что $\xi_п \approx t-\tau$, $x_п \approx \sqrt{t-\tau}$ и областью $(\xi_п, 0)$ при интегрировании можно пренебречь.

Конечно, приведенная задача отличается от рассматриваемой задачи, но с точки зрения структуры решения, обе задачи эквивалентны. Таким образом, исходя из некоторых эвристических и более строгих соображений, показано, что при определении решения рассматриваемой задачи в окрестности касания волн следует интегралом по рассеивателю пренебречь, как малой более высокого порядка.

Для линейных уравнений (с постоянными или переменными коэффициентами) гиперболического типа с m независимым переменным элементарное решение, приведенное в [12, 13], при $m = 2m_1+1$ имеет вид: $v = \overline{V}/\Gamma^{m_1-\frac{1}{2}}$, где Γ - квадрат геодезического расстояния ($\Gamma = 0$ описывает характеристический коноид), а $\overline{V}$ - голоморфная функция координат двух точек. В рассматриваемом случае $m=3$, следовательно, $m_1 = 1$ и $v = \overline{V}/\sqrt{\Gamma}$. В общем случае (для произвольных точек) Γ является решением дифференциального уравнения первого порядка с частными производными: $B(\partial\Gamma/\partial x_i, x_i) = 4\Gamma$, где $B = \Sigma b_{ik}\gamma_i\gamma_k$ - характеристическая форма линейного дифферен-циального уравнения второго порядка с коэффициентами b_{ik} при старших производных. Если точки, между которыми измеряется геодезическое расстояние, бесконечно близки, то есть имеют координаты $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x+dx = (x_1+dx_1, \ldots, x_m+dx_m)$, то формула для Γ упрощается и имеет вид [17]: $\sqrt{\Gamma} = \sqrt{(t-t_0)^2+\tau^2}$, но опять остается неизвестным (хотя бы для уравнений с переменными коэффициентами) вид функции $\overline{V}$. Тогда, выражение элементарного решения для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами при старших производных, для практических приложений непригодно. Целесообразно его взаимствовать из той же работы [17], которое в окрестности фронтов (дифракционной или распространяющейся) волн с использованием принципа взаимности можно записать в форме

$$\eta'_ф = \sqrt{\frac{c(M_0)}{2|r'_\beta(M_0)|}}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}+\ldots \tag{2.2}$$

где ... обозначены менее сингулярные слагаемые, r' - радиус-вектор $\overrightarrow{MM_0}$, $\beta = \mathrm{const}$ характеризует бихарактеристики, то есть β есть угол составленной касательной к лучу в точке M с фиксированнным направлением, $\bar{\tau}$ - время пробега от точки M_0 до точки M (или наоборот) вдоль проекции бихарактеристики на плоскость $\tau' = 0$ (фиг. 1).

Уместно отметить, что отличие методики нахождения решения изучаемой задачи от методики, изложенной в [17], состоит в расширении нестационарного одномерного решения по лучу на двумерную область.

До постановки фундаментального решения в (2.1) предварительно выразим в нем время пробега $t - \bar{\tau}$ от точки М до квазиокружности через φ, то есть $t - \bar{\tau} = \varphi / c(M_0)$.

После такой замены постановка элементарного решения (2.2) и начальных данных (1.8) в решении (2.1), с учетом, что y_1 от ζ отличается на величину второго порядка малости (размеры области интегрирования малы), дает

$$\eta'(M) = \frac{A}{2\sqrt{2}\pi} \frac{1}{\sqrt{|r'_\beta(M_0)|}} \times$$
$$\times \iint \zeta^{\alpha-1} x_1^\gamma \left[\frac{\zeta}{c(M_0)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{\varphi}} + \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \right] \partial\zeta \, \partial x_1 \tag{2.3}$$

$c(M_0) = c(0) = c_0$, $|r'_\beta(M_0)| = |r'_\beta(0)| = |r'_{\beta 0}|$ вследствие их достаточно слабой изменяемости в области Σ. С целью сохранения, по мере возможности, точности решения замена $c(M_0)$ и $r'_\beta(M_0)$ на c_0 и $r'_{\beta 0}$ не произведена.

С целью вычисления интеграла разложим в окрестности точки O' величину $\varphi + \zeta$ в ряд Тейлора. Точка O' является точкой пересечения бихарактеристики, исходящей из точки М, где ищется решение с начальным фронтом волны, причем эта бихарактеристика является и лучом волны. Обозначим через x'_1, y'_1 координаты точки M_0 относительно новой декартовой системы координат с началом в O' и осью абсцисс касательной к кривой $\zeta = 0$ в этой точке. Тогда

$$(\varphi+\zeta)_{(x'_1, y'_1)} = (\varphi+\zeta)\Big|_{O'} + \left.\frac{\partial(\varphi+\zeta)}{\partial x'_1}\right|_{O'} x'_1 + \left.\frac{\partial(\varphi+\zeta)}{\partial y'_1}\right|_{O'} y'_1 +$$
$$+ \left.\frac{\partial^2(\varphi+\zeta)}{\partial x_1'^2}\right|_{O'} x_1'^2 + \left.\frac{\partial^2(\varphi+\zeta)}{\partial y_1'^2}\right|_{O'} y_1'^2 + \ldots$$

где точками обозначены слагаемые третьего и более высокого порядка малости.

С точностью величин второго порядка малости получим

$$(\varphi+\zeta)_{(O')} \cong 0,\ \left.\frac{\partial(\varphi+\zeta)}{\partial x_1'}\right|_{O'} \cong 0,\ \left.\frac{\partial(\varphi+\zeta)}{\partial y_1'}\right|_{O'} \cong 1,\ \left.\frac{\partial^2(\varphi+\zeta)}{\partial x_1'^2}\right|_{O'} =$$

$$= -K_1 + K_2 \qquad y_1' = c(M_0)\tau''$$

где τ'' - время пробега от квазиокружности до начальной волны, равное времени пробега от дифракционной волны до фронта распространяющейся волны $t = t_\Phi$ вдоль бихарактеристики, то есть оно равно $t - t_\Phi$; $K_1 \approx -\partial^2\varphi / \partial x_1'^2$ - кривизна квазиокружности, $K_2 \approx \partial^2\zeta / \partial x_1'^2$ - кривизна фронта начальной волны, причем кривизна считается положительной, если вогнутость кривой находится с той стороны, куда распространяется волна. Следует отметить, что t_Φ - тот момент времени, когда фронт распространяющейся волны находится в точке $M(t_\Phi, x, y)$.

Таким образом,

$$\varphi + \zeta \cong c(M_0)(t - t_\Phi) - \frac{1}{2}(K_1 - K_2)(x_1 - s^2) \tag{2.4}$$

причем в работе рассматривается случай $K_1 - K_2 > 0$. Подставляя выражение φ из (2.4) в (2.3) и произведя с первым слагаемым интегрирование по частям, с учетом, что $\partial\varphi / \partial t = c(M_0)\partial\varphi / \partial\zeta$, получим

$$\eta(M) = \frac{\alpha A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{|r_\beta'(M_0)|}} \iint\limits_{\substack{\zeta\ge0\\ x\ge0}} \frac{\zeta^{\alpha-1} x_1^{\gamma} d\zeta dx_1}{\sqrt{c(M_0)(t - t_\Phi) - \frac{1}{2}(K_1 - K_2)(x_1 - s)^2 - \zeta}} \tag{2.5}$$

3. Вычисление интеграла (2.5). При вычислении интеграла (2.5) необходимо учесть следующих два возможных случая:

а) точка $M(t, x, y)$, расположенная вблизи предельного дифракционного луча, лежит за фронтом дифракционной волны $t > \tau$;

б) точка $M(t, x, y)$ лежит между фронтами дифракционной и распространяющейся волны, $t < \tau$.

Отметим, что в обоих случаях $t > t_\Phi$, что физически очевидно.

Пределы интегрирования по x_1 будут: абсциссы точек пересечения обращенного фронта дифракционнной волны и начального фронта распространяющейся волны, определяющие из совместного решения уравнений $\varphi = 0$ и $\zeta = 0$. Тогда, как следует из (2.4), искомые значения x_1 являются корнями квадратного уравнения

$$c(M_0)(t-t_\Phi)-\frac{1}{2}(K_1-K_2)(x_1-s)^2=0$$
$$\left(x_{\Pi 1,2}=s\pm\sqrt{2\frac{c(M_0)(t-t_\Phi)}{K_1-K_2}}\right) \tag{3.1}$$

Но из известного соотношения $c_0(t-t_\Phi)-\frac{1}{2}(K_1-K_2)s^2=c_0(t-\tau)$ следует, что в случае а) $x_{\Pi 2}<0$, а в случае б) $x_{\Pi 2}>0$. Согласно постановке задачи, рассматривается та часть области интегрирования, которая расположена правее кромки препятствия. Следовательно, в случае а) пределы интегрирования по направлению x_1 будут: $0, x_{\Pi 1}$, а в случае б) $x_{\Pi 2}, x_{\Pi 1}$.

В случае а), который рассмотрим сначала, двойной интеграл, представляя в форме повторного интеграла, решения (2.5) можно переписать в следующей форме:

$$\eta'(M)=\frac{A\alpha}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{|r'_\beta(M_0)|}}\int_0^{x_{\Pi 1}}x_1^\gamma dx_1\int_0^{\varphi=0}\frac{\zeta^{\alpha-1}d\zeta}{\sqrt{c(M_0)(t-t_\Phi)-\frac{1}{2}(K_1-K_2)(x_1-s)^2-\zeta}}$$

Произведем замену переменного $\zeta=\psi\left[c_0(t-t_\Phi)-\frac{1}{2}(K_1-K_2)(x_1-s)^2\right]$.

При $\varphi=0,\ \zeta=c(M_0)(t-t_\Phi)-\frac{1}{2}(K_1-K_2)(x_1-s)^2$ и $\psi=1$. Следовательно,

$$\int_0^{\varphi=0}\left[c(M_0)(t-t_\Phi)-\frac{1}{2}(K_1-K_2)(x_1-s)^2-\zeta\right]^{-\frac{1}{2}}\zeta^{\alpha-1}d\zeta=$$
$$=\left[c(M_0)(t-t_\Phi)-\frac{1}{2}(K_1-K_2)(x_1-s)^2\right]^{\alpha-\frac{1}{2}}\int_0^1(1-\psi)^{-\frac{1}{2}}\psi^{\alpha-1}d\psi=$$
$$=\left[c(M_0)(t-t_\Phi)-\frac{1}{2}(K_1-K_2)(x_1-s)^2\right]^{\alpha-\frac{1}{2}}\mathrm{B}\left(\alpha,\frac{1}{2}\right)$$

[19], ФП, 774(1), с.339).

Значит

$$\eta'=\frac{A\alpha}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{|r'_\beta(M_0)|}}\int_0^{x_{\Pi 1}}\left[c(M_0)(t-t_\Phi)-\frac{1}{2}(K_1-K_2)(x_1-s)^2\right]^{\alpha-\frac{1}{2}}x_1^\gamma dx_1$$

Введем вместо x_1 новую переменную ξ по формуле

$$x_1 = s + \sqrt{\frac{2c_0(t-t_\Phi)}{K_1-K_2}}\,\xi.$$

Тогда

$$\eta'(M) = \frac{A}{\pi}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\frac{\left[c(M_0)\right]^\alpha}{\sqrt{\left|r'_\beta(M_0)\right|}}\frac{(t-t_\Phi)^\alpha}{\sqrt{K_1-K_2}}\int_{\xi_0}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left[s+\sqrt{\frac{2c(M_0)(t-t_\Phi)}{K_1-K_2}}\quad\xi\right]^\gamma d\xi$$

где ξ_0 определяется из равенства

$$\xi_0\sqrt{\frac{2c(M_0)(t-t_\Phi)}{K_1-K_2}}+s=0 \tag{3.2}$$

С целью вычисления последнего интеграла произведем новую замену переменного: $1-\xi=(1-\xi_0)p$. Тогда

$$1-\xi^2 = 2(1-\xi_0)(1-qp)p, \quad q=\frac{1-\xi_0}{2}$$

$$s+\sqrt{\frac{2c(M_0)(t-t_\Phi)}{K_1-K_2}}\xi = \sqrt{\frac{2c(M_0)(t-t_\Phi)}{K_1-K_2}}(\xi-\xi_0),$$

$$\xi-\xi_0=(1-\xi_0)(1-p)$$

при $\xi=1$ $p=0$, а при $\xi=\xi_0$ $p=1$, $d\xi=-(1-\xi_0)dp$.

Таким образом,

$$\eta'=2^{\alpha+\frac{\gamma}{2}}\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\frac{\left[c(M_0)\right]^{\alpha+\frac{\gamma}{2}}}{\sqrt{\left|r'_\beta(M_0)\right|}}\frac{(t-t_\Phi)^{\alpha+\frac{\gamma}{2}}}{(K_1-K_2)^{\frac{1+\gamma}{2}}}(1-\xi_0)^{\alpha+\gamma+\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\int_0^1 p^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-p)^\gamma(1-qp)^{\alpha-\frac{1}{2}}dp$$

Интеграл, входящий в правую часть последнего равенства, представляет из себя табличный интеграл и выражается через бэта- и гипергеометрическую функции ([19] см.фр.: 7.211, с.416 и [20] 1531, с.373). Окончательно искомое решение в рассматриваемом случае запишется в форме:

$$\eta'(t,x,y)=2^{\alpha+\frac{\gamma}{2}}\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma\left(\alpha+\gamma+\frac{3}{2}\right)}\frac{\left[c(M_0)(t-t_\Phi)\right]^{\alpha+\frac{\gamma}{2}}}{\sqrt{\left|r_\beta'(M_0)\right|(K_1-K_2)^{1+\gamma}}}(1-\xi_0)^{\alpha+\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}}\times \tag{3.3}$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}-\alpha,\frac{1}{2}+\alpha,\gamma+\alpha+\frac{3}{2},\frac{1-\xi_0}{2}\right) \text{ при } t>\tau$$

В частном случае скачкообразной начальной волны $\alpha=\gamma=0$ и из

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!!,\quad F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},z^2\right)=\frac{\arcsin z}{z}$$

([19], фр.: 7.221.26, с.417 и [20] 151.6, с.370) следует, что

$$\eta'(t,x,y)=\frac{2A}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(K_1-K_2)\left|r_\beta'(M_0)\right|}}\arcsin\sqrt{\frac{1-\xi_0}{2}}$$

Но $2\arcsin\sqrt{\frac{1-\xi_0}{2}}=\arcsin\sqrt{1-\xi_0{}^2}$ и первую часть последнего равенства, с использованием тождества $\arcsin x=\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ можно представить в форме:

$$\eta'(t,x,y)=\frac{A}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\left|r_\beta'(M_0)\right|(K_1-K_2)}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\xi_0{}^2}}{\xi_0}$$

Но из выражения (3.2) и соотношения $s=-(\vartheta-\vartheta_0)(K_1-K_2)$ следует, что

$$1-\xi_0{}^2=\frac{t-\tau}{t-t_\Phi},\quad \xi_0=-\sqrt{\frac{\tau-t_\Phi}{t-t_\Phi}},\quad \text{а } \sqrt{\tau-t_\Phi}=-\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2c(M_0)(K_1-K_2)}$$

и, следовательно,

$$\eta'(t,x,y)=\frac{A}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\left|r_\beta'(M_0)\right|(K_1-K_2)}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2c(M_0)(t-\tau)(K_1-K_2)}}{\vartheta-\vartheta_0} \tag{3.4}$$

В случае б), опять представляя двойной интеграл (2.5) в форме повторного интеграла с использованием уже вышепроделанной замены переменных, вычислений и выражения пределов интегрирования (3.1), можно показать, что

$$\eta'(M)=\frac{A}{\sqrt{\pi}}\frac{c_{M_0}^{\alpha}}{\sqrt{\left|r_\beta'\right|_{M_0}}}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\frac{(t-t_\Phi)^\alpha}{\sqrt{K_1-K_2}}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)\left[s+\frac{\sqrt{2c(M_0)(t-t_\Phi)}}{K_1-K_2}\xi\right]^\gamma d\xi$$

Но согласно (3.2) и с учетом, что

$$1-\xi=2p',\ \ 1-\xi^2=4p(1+p'),\ \ \xi-\xi_0=(1-\xi_0)\left(1-\frac{2}{1-\xi_0}p'\right),$$

$$s+\sqrt{\frac{2c(M_{0,})(t-t_\Phi)}{K_1-K_2}}\,\xi=\sqrt{\frac{2c(M_0)(t-t_\Phi)}{K_1-K_2}}\,(\xi-\xi_0),$$

искомое решение запишется в форме:

$$\eta'(t,x,y)=2^{2\alpha+\frac{\gamma}{2}}\frac{Ac_{M_0}^{\alpha+\frac{\gamma}{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1/2)}{\Gamma(2\alpha+1)}\frac{(t-t_\Phi)^{\alpha+\frac{\gamma}{2}}(1-\xi_0)^\gamma}{\sqrt{\left|r_\beta\right|_{M_0}}(K_1-K_2)^{\gamma+1}}\times$$

$$\times\mathbf{F}\left(-\gamma,\alpha+\frac{1}{2},2\alpha+1,\frac{2}{1-\xi_0}\right)$$

Используя известное соотношение для гипергеометрических и гамма-функций:

$$\mathbf{F}\left(-\gamma,\alpha+\frac{1}{2},2\alpha+1,x\right)=\left(1-\frac{x}{2}\right)^\gamma\mathbf{F}\left(-\frac{\gamma}{2},\frac{1-\gamma}{2},1+\alpha,y\right)$$

$$\Gamma(2z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^z\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\qquad \text{где}\quad y=\left[\frac{x}{2-x}\right]^2$$

с учетом, что в рассматриваемом случае $x=\dfrac{2}{1-\xi_0}$, $z=\dfrac{1}{2}+\alpha$ искомое решение окончательно запишется в форме:

$$\eta'(t,x,y)=2^{\alpha+\frac{\gamma}{2}-1}Ac_{M_0}^{\alpha+\frac{\gamma}{2}}\frac{(t-t_\Phi)^{\alpha+\frac{\gamma}{2}}(-\xi_0)^\gamma}{\sqrt{\left|r_\beta'(M_0)\right|}(K_1-K_2)^{\gamma+1}}\mathbf{F}\left(-\frac{\gamma}{2},\frac{1-\gamma}{2},1+\alpha,\frac{1}{\zeta_0^{\ 2}}\right)\quad(3.5)$$

В случае, когда точка М лежит левее предельного дифракционного луча ОР, решение задачи получается соответственно из (3.3) и (3.5) аналитическим их продолжением в эту область.

В частном случае $\gamma=0$ из (3.5) получается решение одномерной по лучу нестационарной задачи Коши (распространение волны в безграничной покоящейся неоднородной среде), приведенное в [17]. (Различие между ними состоит в разнице постоянных множителей, которая является последствием различия этих же постоянных, фигурирующих в начальных данных ([17], с.242).

4. Решение стационарной задачи дифракции. Пусть последовательность поверхностных гравитационных волн скачкообразного профиля и малой амплитуды, генерируемых на покоящейся поверхности моря или океана разными источниками, набегает на тонкий полубесконечный жесткий волнорез с заостренным концом. Задача состоит в нахождении амплитуды и фазы колебаний частиц в возмущенной области, расположенной за барьером. С этой целью применимо к найденному решению (3.4) преобразование Лапласа по времени. Тогда

$$U = u_1 + iu_2 = \frac{A}{\pi}\Big[\big|r'_\beta(M_0)\big|(K_1 - K_2)\Big]^{-\frac{1}{2}} \int_\tau^\infty \operatorname{arctg} a\sqrt{t-\tau}\, e^{-\sigma t}\, dt$$

где $a = \sqrt{2c(M_0)(K_1 - K_2)} \,/\, (\vartheta - \vartheta_0)$, σ - комплексная величина, причем $\mathrm{Re}(\sigma^2) > 0$. Произведя интегрирование по частям (интегрированная часть равна нулю) и замену переменного $\sqrt{t-\tau} = T$ в полученном интеграле, можно показать, что

$$U = \frac{A}{\pi}\Big[\big|r'_\beta(M_0)\big|(K_1 - K_2)\Big]^{-\frac{1}{2}} \frac{a}{\sigma} e^{-\sigma\tau} \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma T^2}\, dt}{1 + a^2 T}$$

Но последний интеграл является табличным интегралом ([19] ст.169, ф.3.274) и выражается через функцию вероятностей, то есть

$$U = \frac{A}{2}\Big[\big|r'_\beta(M_0)\big|(K_1 - K_2)\Big]^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{-\sigma\tau}}{\sigma} e^{\sigma\frac{(\vartheta-\vartheta_0)^2}{2c(M_0)(K_1-K_2)}} \times$$
$$\times\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\sigma}\,\frac{\vartheta - \vartheta_0}{\sqrt{2c(M_0)(K_1 - K_2)}}\right)\right] \qquad (4.1)$$

Чтобы полученному решению стационарной задачи дифракции, происходящей от края экрана, придать больше наглядности и привычности, выразим функцию вероятностей через функции Френеля. С этой целью в качестве σ возьмем чисто мнимую величину, то есть $\sigma = -i\sigma_2$ (которое удовлетворяет условию $\mathrm{Re}\sigma^2 > 0$) и с учетом, что $\sqrt{-i} = \exp(-i\pi/4)$, произведем в интеграле вероятностей замену переменного $t = \exp(-i\pi/4)x$, где x- действительная величина. Тогда $e^{-t^2} = \cos x^2 - i\sin x^2$ и, следовательно,

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{a}\right) = \left[C\left(\sqrt{\sigma_2}\Big/a\right) - S\left(\sqrt{\sigma_2}\Big/a\right)\right] - i\left[C\left(\sqrt{\sigma_2}\Big/a\right) + S\left(\sqrt{\sigma_2}\Big/a\right)\right]$$

где C и S - интегралы Френеля. Таким образом, из (4.1) и последней формулы следует, что

$$U = u_1 + i\,u_2 = \frac{A}{2\sigma_2}\left[\left|r_\beta'(M_0)\right|(K_1 - K_2)\right]^{-1/2} e^{-i\sigma_2\tau}\, e^{\frac{(\vartheta-\vartheta_0)^2}{2c(M_0)(K_1-K_2)}\sigma_2} \times$$
$$\times\left\{\left[C\left(\sqrt{\sigma_2}/a\right)+S\left(\sqrt{\sigma_2}/a\right)\right]-i\left[1-C\left(\sqrt{\sigma_2}/a\right)+S\left(\sqrt{\sigma_2}/a\right)\right]\right\} \qquad (4.2$$

Благодарим В.М.Бабича за ценные замечания, которые авторы, по возможности, учли в статье.

Литература

1. Цыдипов Ч.Ц. Распространение ультракоротких радиоволн. - Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1977, 202 с.

2. Виноградов М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. - М.: Наука, 1979, 381 с.

3. Ле Блон П., Лайсек Л. Волны в океанах. Часть I. - М.: Мир, 1981, 478 с.

4. Багдоев А.Г., Безиргенян Г.С. О дифракции интенсивной световой волны в неоднородной, кубически-нелинейной среде. - Докл. АН Арм. ССР, 1984, т. 29, №1, с. 29-34.

5. Стокер Дж.Дж. Волны на воде. - М.: ИЛ, 1959, 617 с.

6. Петрашень Г.И. и др. О методе рядов в теории дифракции волн от плоских угловых областей. - Л.: Уч. записки ЛГУ, 1958, т. 6, № 246, с. 5 - 70.

7. Селезнов И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. - Киев: Наукова Думка, 1989, 203 с.

8. Фок В.Л. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. - М.: Сов. радио, 1970, 517 с.

9. Леонтович М.Л., Фок В.А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения. - ЖЭТФ, 1946, 16, №17, с. 557 - 573.

10. Бабич В.М., Кирпичникова Н.Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. - Л.: ЛГУ 1974, 124 с.

11. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. - М.: Наука, 1972, 456 с.

12. Hadamard J. Commentarii Mathematici Helvetici - Paris, 1933, vol. 5, p. 137 - 173.

13. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. - М.: Наука, 1978, 352 с.

14. Багдоев А.Г. Исследование окрестности волны вблизи особой линии. - Изв. АН Арм.ССР, 1971, т. 24, № 1, с. 16-37.

15. Васильев Е.П. и др. Численные методы в теории дифракции. - В сб.: Теория дифракции и распространения волн. Тр. YI Всесоюзного симпозиума по дифракции волн. Цахкадзор, 1973, с. 7-15.

16. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть I. - М.: 1963.

17. Бабич В.М. Распространение нестационарных волн и каустики. - Уч. записки ЛГУ. Динамические задачи теории упругости. ЛГУ, 1958, YI, № 246, вып. 32, с. 228-259.

18. Багдоев А.Г. Определение параметров движения жидкости в окрестности встречи фронтов волн.- Изв.АН Арм.ССР,Механика,1969, т.22, N5, с.45-64.

19. Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.-Л.: Гостехтеориздат, 1951, 463 с.

20. Справочник по специальным функциям. - М.: Наука, 1979, 830 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
3.10.1991