ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 3-4, 1994 Механика

УДК 62.50

ВЛИЯНИЕ ВАРИАЦИЙ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ НА КОНЕЧНОЕ СОСТОЯНИЕ СХВАТА МАНИПУЛЯТОРА

Гукасян А. А.

Ա.Ա.Ղուկասյան

Մանիպուլյատորի բռնիչի վերջնական դիրքի վրա սկզբնական պայմանների վարիացիաների ազդեցությունը

Օպտիմալ ղեկավարման խնդրի լուծման հիման վրա ուսումնասիրվում է մանիպուլյատորի նպատակային դիրքին հասնելու հնարավորությունը, կախված սկզբնական պայմանների փոփոխությունից: Գնահատված է նաև ֆունկցիոնալի փոփոխությունը:

Ghukasyan A.A.

The Influence of Variations of the Initial Conditions on the Final State of the Holder of a Manipulator

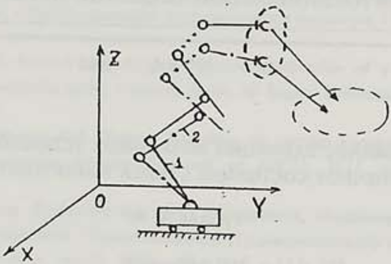
В работе, на основе решения задачи оптимального управления, исследуется возможность достижения цели манипулятором после изменения начального состояния, а также изменение функции стоимости. Подобные вопросы для широкого класса механических систем исследованы в работах [1-7] и др.

1. Математическая формулировка задачи и определение вариаций конечных состояний манипулятора. Рассматривается управляемое движение N -звенного манипулятора, звенья которого считаются абсолютно твердыми телами. Конфигурацию манипулятора в пространстве определим вектором $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)^T$ $(n\geq N)$. Компоненты α_i $(i=1,2,\ldots,n)$ включают в себя углы в шарнирах и относительное перемещение звеньев. Положение схвата в системе координат $OXYZ$ определим через вектор $q=(q_1,q_2,\ldots,q_m)^T$ (фиг.1), где

$$q=f(\alpha) \tag{1.1}$$

Предполагая, что каждая степень свободы α_i управляется моментом M_i, развиваемым приводом, расположенным в шарнирах манипулятора, уравнение движения можно представить в виде

$$\ddot{\alpha} = f\left(\alpha, \dot{\alpha}, M\right); \ \ \alpha(t_0) = \alpha^0, \ \ \dot{\alpha}(t_0) = \dot{\alpha}^0 \tag{1.2}$$



Фиг. 1
1 - начальное состояние манипулятора
2 - начальное состояние после нескольких циклов работ

Пусть в пространстве состояний $\left\{q_i, \dot{q}_i\right\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ задано начальное состояние $\left(q_i(t_0), \ \dot{q}_i(t_0)\right)$ схвата манипулятора, а конечное состояние задано в *2m*-мерном пространстве состояний в виде K-мерного многообразия Q, которое определяется l-уравнениями ($k = 2m - l; \ \ l \le 2m$)

$$Q_i\left[x(t_1)\right] = 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots l)$$

$$x = \left\{x_j, x_{j+m}\right\}, \ \ x_j = q_j, \ \ x_{j+m} = \dot{q}_j \ \ (j = 1, 2, \ldots m) \tag{1.3}$$

С учетом (1.1) отображение многообразия Q в пространстве состояний $\left\{\alpha_i, \dot{\alpha}_i\right\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ является $r = (2n - l)$-мерным многообразием S конечных конфигураций манипулятора, которая также определяется l-уравнениями.

Не нарушая общности в (1.2), введем фазовые переменные

$$\alpha_i = y_i, \ \ \dot{\alpha}_i = y_{i+n} \ \ \ (i = 1, 2 \ldots, n)$$

и представим движение манипулятора векторным уравнением

$$\dot{y} = F(y, M), \ \ y(t_0) = y^0 \tag{1.4}$$

Предполагается, что пара $M = M(t), \ \ y = y(t)$ является решением задачи оптимального управления движением манипулятора, которая приводит манипулятор из начального состояния в r-мерное многообразие S с минимизацией функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \Phi[y, M]\, dt \to \min_{M \in P} \qquad (t_1 \text{ не фиксирована}).$$

Ставится следующая задача. Если начальное условие (начальное состояние) манипулятора изменяется от y^0 до $\tilde{y}^0$, где

$$\tilde{y}^0 = y^0 + \varepsilon\delta y^0 + O(\varepsilon), \ \delta y^0 = \delta y(t_0) \qquad (1.5)$$

то будет ли достигнуто при управлении $M = M(t)$ конечное множество состояний манипулятора.

Исследование этого вопроса связано с оценкой влияний вариаций начальных условий на траекторию движения манипулятора в пространстве состояний. Обозначим через $\tilde{y}(t)$ траекторию движения манипулятора, соответствующую новому начальному условию $\tilde{y}^0$. Предполагая, что траектория непрерывно зависит от вариации начального условия, в первом приближении $\tilde{y}(t)$ представим в виде [7]

$$\tilde{y}(t) = y(t) + \varepsilon\delta y(t) \qquad (1.6)$$

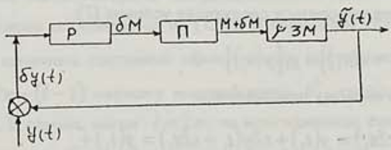
где $\delta y(t)$ является решением вариационного уравнения

$$\delta\dot{y}(t) = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y,M} \delta y(t) \qquad (1.7)$$

Здесь $\partial F / \partial y$ - матрица Якоби, элементы которой равны $\left\{ \partial F_i / \partial y_j \right\}_{i,j=1}^{2n,2m}$

Уравнение (1.7) соответствует разомкнутой схеме управления манипулятора, когда $\delta M = 0$ (фиг.2).

Если управление манипулятором осуществляется по принципу обратной связи (фиг.3), то вариационное уравнение, определяющее новую траекторию, имеет вид

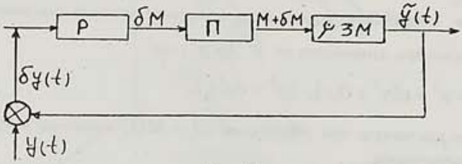


Фиг. 2

П - привод, ЗМ - звено манипулятора.

$$\delta\dot{y}(t)=\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y,M}\delta y+\left.\frac{\partial F}{\partial M}\right|_{y,M}\delta M \tag{1.8}$$

где матрица $\dfrac{\partial F}{\partial M}$ определяется аналогично матрице $\dfrac{\partial F}{\partial y}$.



Фиг. 3

Р - регулятор, П - привод, ЗМ - звено манипулятора,

$\otimes$ - измерительное устройство.

Поставленную задачу с управлением манипулятора по принципу обратной связи, можно исследовать методом теории оптимальной стабилизации [8].

Вернемся к разомкнутой схеме управления манипулятором. Предполагаем, что при наличии оптимального управления $M=M(t)$ и при новом начальном состоянии $\tilde{y}^0$, фазовое состояние манипулятора в конце процесса управления принадлежит многообразию S. Определим те условия, которые разрешают данный вопрос.

Поскольку конечное время управления манипулятором t_1 не фиксировано, то требуется, чтобы S достигалось в некоторый момент времени $t_1+\varepsilon\delta t_1$. Моменту времени $t_1+\varepsilon\delta t_1$ соответствует $\tilde{y}(t_1+\varepsilon\delta t_1)$ - конечное состояние.

Предполагаем, что l -уравнения описывают многообразие

$$g_i[y(t_1)]=0 \quad (i=1,2,...,l;\ l\le n) \tag{1.9}$$

Поскольку состояние $y(t_1)$ и $\tilde{y}(t_1+\varepsilon\delta t_1)$ принадлежит многообразию S, то должно удовлетворяться следующее условие [7]:

$$g_i[\tilde{y}(t_1+\varepsilon\delta t_1)]-g_i[y(t_1)]=0 \tag{1.10}$$

Так как по первому приближению

$$\tilde{y}(t_1+\varepsilon\delta t_1)=y(t_1)+\varepsilon\delta y(t_1+\varepsilon\delta t_1)=y(t_1)+$$
$$+\varepsilon\{\delta y(t_1)+F[y(t_1),M(t_1)]\delta t_1\}$$

то соотношение (1.10) принимает вид

$$\left\langle \frac{\partial g_i}{\partial y}, \delta y(t_1) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial g_i}{\partial y}, F\left[y(t_1), M(t) \right] \right\rangle \delta t_1 = 0 \tag{1.11}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, l)$$

Из (1.11) можно определить δt_1, если существует p $(1 \le p \le l)$, при котором $\left\langle \frac{\partial g_p}{\partial y}, F\left[y(t_1), M(t_1) \right] \right\rangle \neq 0$

$$\delta t_1 = - \left\langle \frac{\partial g_p}{\partial y}, \delta y(t) \right\rangle \Bigg/ \left\langle \frac{\partial g_p}{\partial y}, F\left[y(t_1), M(t_1) \right] \right\rangle \tag{1.12}$$

Подставляя (1.12) в (1.11), получим

$$\left\langle \left(\left(\left\langle \frac{\partial g_p}{\partial y}, F \right\rangle \frac{\partial g_i}{\partial y} - \left\langle \frac{\partial g_i}{\partial y}, F \right\rangle \frac{\partial g_p}{\partial y} \right) \delta y(t_1) \right\rangle = 0 \tag{1.13}$$

$$(i \neq p,\ i = 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, l)$$

Система уравнений (1.13) описывает пересечения $(l-1)$ гиперплоскостей, которые можно записать в виде

$$A \delta y(t_1) = 0 \tag{1.14}$$

где $\{a_{ij}\} = A$, $[(l-1) \times 2n]$-мерная матрица.

Обозначим пересечение гиперплоскостей, где должен быть $\delta y(t_1)$, через S^*. Здесь S^* в $2n$-мерном пространстве состояний $2n-(l-1)$-мерное многообразие. Если среди $l-1$ уравнений (1.13) есть линейно зависимые, то размерность матрицы A можно понизить. В частности, если $l=1$, то из (1.13) следует, что S^* представляет собой все пространство, и конечное множество состояний манипулятора S всегда достижимо. Дополнительное время в этом случае также определяется из (1.12). В противном случае, если $l>1$, то множество конечных состояний манипулятора достижимо, когда $\delta y(t_1)$ принадлежит $2n-(l-1)$-мерному многообразию S^*, определяемому уравнениями (1.13). В случае, когда $l=2n$, то есть конечное состояние манипулятора фиксировано, S^* представляет собой в $2n$-мерном пространстве состояний линию.

2. Область допустимых изменений начальных условий схвата манипулятора. Прежде чем определить область начальных изменений схвата манипулятора, определим область начальных изменений конфигурации.

Из вариационного уравнения (1.7) следует, что при заданных $\delta y(t_0) = \delta y^0$, для широкого класса управления $M = M(t)$ решение можно представить в виде

$$\delta y(t) = Y[t, t_0]\delta y^0 \tag{2.1}$$

где матрица $Y[t, t_0]$ имеет размерность $2n \times 2n$ и является фундаментальной матрицей решений уравнения (1.7).

Из (2.1), в частности, получим

$$\delta y(t_1) = Y[t_1, t_0]\delta y^0 \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (1.14), имеем

$$Y^0[t_1, t_0]\delta y^0 = 0 \tag{2.3}$$

где $Y^0[t_1, t_0] = AY[t_1, t_0]$ имеет размерность $(l-1)\times 2n$.

Из (2.3), в частности, следует, что область (S^0) начальных изменений конфигурации манипулятора также принадлежит пересечению $l-1$ гиперповерхностей и имеет размерность $[2n-(l-1)]$.

Из (1.1) следует, что вариация начального и конечного состояний схвата манипулятора, в зависимости от изменения конфигурации, имеет вид

$$\delta x(t_1) = X\delta y(t_1); \quad \delta x(t_0) = X\delta y(t_0) \tag{2.4}$$

где $x_i = q_i$, $x_{i+m} = \dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$,

$$X = \begin{bmatrix} F(\alpha) & 0 \\ \dot{F}(\alpha) & F(\alpha) \end{bmatrix}, \quad F(\alpha) = \left\{ \partial f_i \middle/ \partial \alpha_j \right\}_{i,j=1}^{m,n}$$

X имеет размерность $2m \times 2n$.

Изменение конечного состояния схвата манипулятора, в зависимости от изменения начальной конфигурации, можно определить из соотношений (2.2) и (2.4)

$$\delta x(t_0) = X\,Y[t_1, t_0]\delta y(t_0) \tag{2.5}$$

Если в системе управления манипулятором имеются датчики положения и скорости, которые могут измерять $n-m$ комопнент δy_i, или когда $n = m$, то можно также определить изменение положения схвата манипулятора в зависимости от изменения начального положения схвата

$$\delta x(t_1) = XY[t_1, t_0]X^{-1}\delta x(t_0)$$

3. Приращение функционала. По предложению $y(t)$ и $M(t)$ - оптимальное решение задачи управления манипулятором по критерию качества

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \Phi[y, M]dt \to \min_{M \in P} \tag{3.1}$$

с фиксированным начальным состоянием y^0. Минимальное значение функционала при оптимальном управлении $M(t)$ и траектории $y(t)$ обозначим через J^*.

В соответствии с изменением начального состояния манипулятора $\bar{y}^0 = y^0 + \varepsilon\delta y^0 + 0(\varepsilon)$, фазовая траектория $\bar{y}(t) = y(t) + \varepsilon\delta y(t)$ достигает конечного состояния S за время $t_1 + \varepsilon\delta t_1$.

Вычислим приращение функционала (3.1), отвечающее траектории $\bar{y}(t)$

$$J = \int_{t_0}^{t_1+\varepsilon\delta t_1} \Phi[y + \varepsilon\delta y, M]dt = \int_{t_0}^{t_1} \Phi[y + \varepsilon\delta y, M]dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{\varepsilon\delta t_1} \Phi[y + \varepsilon\delta y, M]dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \Phi[y, M] + \varepsilon \frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y + \ldots + 0(\varepsilon) \right\} dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{\varepsilon\delta t_1} \left\{ \Phi[y, M] + \varepsilon \frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y + \ldots + 0(\varepsilon) \right\} dt = J^* + \eta + 0(\varepsilon)$$

Приращение функционала (3.1) имеет вид

$$\eta = \varepsilon \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y dt + \Phi[y(\vartheta), M(\vartheta)]\delta t_1 \right\}$$

где $\vartheta \in [t_1, t_1 + \varepsilon\delta t_1]$.

Из (2.1) следует, что η можно определить в зависимости от вариации начального состояния манипулятора в виде

$$\eta = \varepsilon \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial\Phi}{\partial y} Y[t, t_0]\delta y^0 dt + \Phi[y(\vartheta), M(\vartheta)]\delta t_1 \right\}.$$

Приращение η имеет порядок ε.

Литература

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.С., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.В.* Математическая теория оптимальных процессов. - М.:Наука, 1983. 392 с.

2. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.

3. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. - М. 1987. 365 с.

4. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. - М.: Наука, 1978. 270 с.

5. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. - М.: Наука, 1971. 424 с.

6. *Рогов Н.Н., Черноусько Ф.Л.* Оптимальное уравнение электродвигателем робота с упругими элементами. - Тех. кибернетика, 1989, N I, с.135-145.

7. *Леондес, Ву.* Функции чувствительности относительно начальных условий и их применение. - Тр. американского общества инженеров-механиков "Теоретические основы инженерных расчетов", 1971, N3, с.128-134.

8. *Гукасян А.А.* Об оптимальной стабилизации движений манипулятора с электромеханическими приводами. - Тех.кибернетика. 1991, N4, с.189-195.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию

20.11.1991