ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Механика 47, №1—2, 1994 Механика

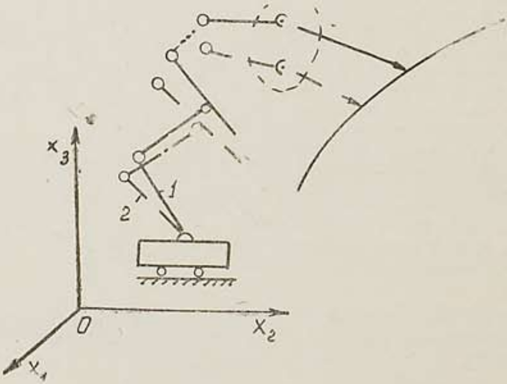
УДК 62.50

О ВЛИЯНИИ ВАРИАЦИИ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ НА РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ

А. А. ГУКАСЯН

В работе исследуются вопросы определения моментов переключения для релейного типа управления манипуляционным роботом в случае изменения начальных условий. Подобные вопросы для различных механических систем исследованы в работах [1—8] и др.

1. *Исходные предположения.* Рассмотрим управляемое движение N звенного манипулятора фиг. 1. Обобщенные координаты манипулятора обозначим через вектор $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^T$, где α_i —углы в шарнирах или линейное относительное движение звеньев. Положение схвата в пространстве определим вектором $x=(x_1, x_2, x_3)$ (схват моделируется как материальная точка).



1 - начальное состояние манипулятора

2 начальное состояние после нескольких циклов работ

Фиг. 1.

Уравнение движения манипулятора определим в форме Лагранжа и представим в векторном виде

$$\ddot{\alpha}=f(\alpha, \dot{\alpha}, M) \tag{1.1}$$

где $M=M_1,\ldots,M_n)$—управляющие силы и моменты, развиваемые приводами, расположенными в шарнирах 0_i.

Между обощенными координатами манипулятора α_i и координатами, определяющими положение схвата, имеется следующая связь:

$$x=\bar{f}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \tag{1.2}$$

Пусть в пространстве переменных $x_i(i=1,2,3)$ задана некоторая линия, которую с учетом (1.2) представим в виде

$$\begin{aligned} &\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_n)=0 \\ &\varphi_2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Функции $\varphi_i\ (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=0$ в пространстве переменных $\alpha_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ представляют собой гладкие гиперповерхности. Пересечение Ω этих гиперповерхностей является $(n-2)$-мерным гладким многообразием, если в каждой точке $\alpha\in\Omega$ векторы $\operatorname{grad}\varphi_i(\alpha)$ $(i=1,2)$ линейно независимы [1].

Пусть требуется за время $t\in[t_0,T]$ из начального положения $x(t_0)=x^0$, $\dot{x}(t_0)=\dot{x}^0$ привести схват манитулятора на линию (1.3) со скоростью $\dot{x}(T)=a$ и с минимизацией некоторого функционала, характеризующего качество переходного процесса:

$$J=\int_{t_0}^{T}\Phi(\alpha,\dot{\alpha},M)dt\to\min_{|M(t)|\leqslant m} \tag{1.4}$$

Введем фазовые переменные

$$\alpha_i=y_i,\quad \dot{\alpha}_i=y_{i+n}\,(i=1,2,\ldots,n) \tag{1.5}$$

Начальное множество представляет собой $r_0=(2n-6)$-мерное гладкое многообразие S^0, а конечное $r_1=(2n-5)$-мерное гладкое многообразие S_1 в пространстве переменных $\{y_i,\ y_{i+n}\}$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Векторное уравнение (1.1) и функционал (1.4) в фазовом пространстве (1.5) представим в виде

$$\dot{y}=F(y,M),\quad y^0\in S^0 \tag{1.6}$$

$$J=\int_{t_0}^{T}\Phi(y,M)dt\to\min_{|M(t)|\leqslant m} \tag{1.7}$$

соответственно.

2. Математическая формулировка и исследование задачи. Пусть движение механической системы описывается векторным дифференциальным уравнением (1.6). Требуется найти такие управляющие силы и моменты, которые приводят фазовую точку из начального положения на многообразие $S^1[y(T)]=0$ с минимизацией функционала (1.7).

Сформулированная задача является задачей оптимального управления с подвижными концами [1].

Предположим, что при применении принципа максимума Понтрягина [1], управление M, решающее поставленную задачу, имеет релейный вид:

$$M=m\,\mathrm{sign}[g(y)], \quad \psi=g(y) \tag{2.1}$$

а сопряженным уравнением является

$$\dot{\psi}=h(y,\psi), \quad \psi=g(y), \quad \psi(T)=0 \tag{2.2}$$

Пусть функция $\psi=g(y)$ имеет k простых нулей. Это означает, что управляющее устройство при реализации оптимального управления манипулятором изменяет знак управления k раз.

Подставляя (2.1) в правую часть уравнения (1.6), получим

$$\dot{y}=F\{y,m\,\mathrm{sign}[g(y)]\} \tag{2.3}$$

Правая часть уравнения (2.3) имеет разрыв в момент переключения $\tau_i(i=1,2,\ldots,k)$. Разделим пространство состояний Y, где происходит движение, на $(k+2)$ подпространств $Y_0, Y_1,\ldots, Y_k, Y_{k+1}$ с гиперповерхностями $g_i(y)=0$ $(i=1,2,\ldots,k)$, так что

$$y\in\begin{cases} Y_{i-1}, & \text{если } g_i(y)>0 \\ Y_i, & \text{если } g_i(y)=0 \\ Y_{i+1} & \text{если } g_i(y)<0 \quad (i=1,2,\ldots,k) \end{cases} \tag{2.4}$$

Уравнение (2.3), описывающее движение манипулятора, можно заменить системой дифференциальных уравнений следующего типа:

$$\begin{gathered} \dot{y}=F_i(y) \quad \text{для } y\in\overline{Y}_{i-1} \\ \dot{y}=F_{i+1}(y) \text{ для } \quad y\in\overline{Y}_{i+1} \end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь под $\overline{Y}_{i-1}(i=1,2,\ldots,k)$ понимается замыкание подпространства Y_{i-1}. Предположим, что правые части системы (2.5) удовлетворяют условиям единственности и непрерывности решений в $\overline{Y}_{i-1}$ и в $\overline{Y}_{i+1}(i=1,2,\ldots,k)$.

Пусть $y=y(t)$ является решением задачи оптимального управления, начинающимся в точке $y(t_0)\in Y_0$, пересекающим гиперповерхности $g_i(y)=0$ $(i=1,2,\ldots,k)$ в точках $y(\tau_i)$ и проходящим через некоторую точку $y_1\in Y_{k+1}$. Траектория $y=y(t)$ является непрерывной и кусочно-дифференцируемой, именно, во всех точках, кроме $\tau_i(i=$ $=(1,2,\ldots,k)$.

В соответствии с оптимальным решением $y=y(t)$, которое характеризует оптимальное изменение конфигурации манипулятора в фазовом пространстве, можно из выражений (1.2) определить также оптимальный закон движения схвата манипулятора:

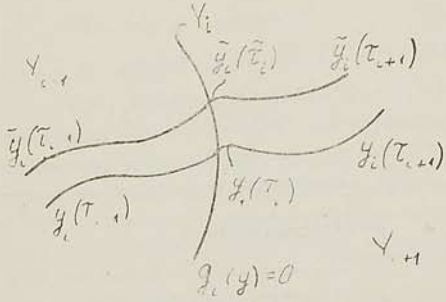
$$x=\bar{f}(y_1(t),\ldots,y_n(t)) \tag{2.6}$$

$$\dot{x}=F(\alpha)\alpha=\{\partial \bar{f}_i(y)/\partial y_j\}_{i,j=1}^{3,n}(y_{1+n}(t),\ldots,y_{2n})^T$$

фазовая траектория схвата также является непрерывной и кусочно-дифференцируемой.

Во время работы манипулятора, в силу действия различных воздействий и помех, начальное (исходное) состояние манипулятора трудно восстановить (фиг. 1). Это приводит к тому, что если известна вариация начального условия $\delta y_0=y_0-\tilde{y}_0$, то в случае релейного управления необходимо определить новые моменты переключения управлющей функции соответственно новому начальному условию.

3. Определение моментов переключения. Не нарушая общности, рассмотрим поведение фазовой траектории движений манипулятора



Фиг. 2.

$y=y(t)$ на интервале времени $\tau_{i-1}\leqslant\tau_i\leqslant\tau_{i+1}$, где τ_i— момент переключения, а $y(\tau_i)$—точка переключения управляющей функции (фиг. 2). Предполагаем, что $y(\tau_{i-1})\in Y_{i-1}$ является начальным условием и обозначим через $y_i^0=y(\tau_{i-1})$, а траекторию на интервале времени $t\in[\tau_{i-1}, \tau_{i+1}]$—через $y=y(t)$, где $\tilde{y}_i^0=y_i^0+\varepsilon\delta y_i^0+0(\varepsilon)$ [7]

Пусть возмущенная фазовая траектория движения манипулятора $\tilde{y}_i(t)$ пересекает гиперповерхность $g_i(y)=0$ в момент времени $\tilde{\tau}_i$, т. е. $g[\tilde{y}(\tilde{\tau}_i)]=0$ и проходит через некоторую точку $\tilde{y}(\tau_{i+1})=\tilde{y}_i^1\in Y_{i+1}$. Без потери общности будем рассматривать случай, когда $\tau_i\leqslant\tilde{\tau}_i$ (случай $\tau_i\geqslant\tilde{\tau}_i$ не вносит в анализе исследования принципиальных затруднений)

Траекторию системы, соответствующую новому начальному условию, представим в виде [7]

$$\tilde{y}_i(t)=y_i(t)+\delta y_i^-(t), \text{ для } \tau_{i-1}\leqslant t<\tilde{\tau}_i \tag{3.1}$$

$$\tilde{y}_i(t)=y_i(t)+\delta y_i^+(t), \text{ для } \tilde{\tau}_i\leqslant t\leqq\tau_{i+1}$$

где $\delta y_i^-(t)$, $\delta y_i^+(t)$—решения уравнений

$$\frac{d}{dt}[\delta y_i^-(y)]=\frac{\partial F_i}{\partial y}\bigg|_{y_i(t)}\cdot\delta y_i^-(t) \tag{3.2}$$

$$\delta y_i^-(\tau_{i-1})=\delta y_i^0$$

$$\frac{d}{dt}[\delta y_i^+(y)]=\frac{\partial F_i}{\partial y}\bigg|_{y_i(t)}\cdot\delta y_i^+(t) \tag{3.3}$$

Из (3.1)–(3.3) следует, что $\delta y_i^-(t)$ на интервале $t\in[\tau_{i-1},\tau]$ можно определить из (3.2), а для определения решения $\delta y_i^+(t)$ уравнения (3.3), необходимо найти соотношение между $\delta y_i^+(t)$ и $\delta y_i^-(t)$.

Момент переключения, соответствующий новому начальному условию, определим следующим образом:

$$\tilde{\tau}_i=\tau_i+\varepsilon t_i \tag{3.4}$$

Тогда

$$\tilde{y}_i(\tilde{\tau}_i)=y_i(\tau)+\varepsilon\delta y_i^-(\tau_i^-)+\varepsilon F_i[\tilde{y}_i(\tau_i)]\cdot\delta t_i+0(\varepsilon) \tag{3.5}$$

$$\delta y_i^+(\tilde{\tau}_i)=\delta y_i^-(\tau_i^-)+\{F_i[\tilde{y}_i(\tau_i)]-F_{i+1}[y_i(\tilde{\tau}_i)]\}\delta t_i+0(\varepsilon)/\varepsilon \tag{3.6}$$

Так как гиперповерхность $g_i[y(t)]=0$ является поверхностью переключения, то это означает, что фазовые точки движения манипулятора $\tilde{y}_i(\tilde{\tau}_i)$ и $y_i(t_i)$ одновременно принадлежат ему, то есть

$$g_i[\tilde{y}_i(\tilde{\tau}_i)]-g_i[y_i(\tau_i)]=0$$

или в первом приближении

$$g_i[\tilde{y}_i(\tilde{\tau}_i)]-g_i[y_i(\tau_i)]=\langle g_{iy}[y_i(\tau_i)+0(\varepsilon)], \tag{3.7}$$

$$\tilde{y}_i(\tilde{\tau}_i)-y_i(\tau_i)\rangle=0$$

Подставляя (3.5) в соотношение (3.7) и перейдя к пределу, когда $\varepsilon\to0$, получим

$$\delta t_i=-\frac{\langle g_{iy}[y_i(\tau_i)],\delta y_i^-(\tau_i^-)\rangle}{\langle g_{iy}[y_i(\tau_i)],F_i[y_i(\tau_i^-)]\rangle} \tag{3.8}$$

$$\delta y_i^+(\tau_i^+)-\delta y_i^-(\tau_i^-)=\{F_{i+1}[y_i(\tau_i^+)]-F_i[y_i(\tau_i^-)]\}\times$$

$$\times\frac{\langle g_{iy}[y_i(\tau_i)],\delta y_i^-(\tau_i^-)\rangle}{\langle g_{iy}[y_i(\tau_i)],F_i[y_i(\tau_i^-)]\rangle} \tag{3.9}$$

Разность между $\delta y_i^+(\tau_i^+)$ и $\delta y_i^-(\tau_i^-)$ называется условием скачка для возмущенного движения в точке переключения.

Из (3.9) следует, что между функциями $\delta y_i^+(\tau_i^+)$ и $\delta y_i^-(\tau_i^-)$ имеется линейная связь, то есть

$$\delta y_i^+(\tau_i)=A\delta y_i^-(\tau_i^-) \tag{3.10}$$

После того, как найдена связь (3.10), можно определить новую фазовую траекторию движения манипулятора из уравнений (3.2) и (3.3)

$$\delta y_i^-(t)=\Phi_1[t,\tau_{i-1}]\cdot\delta y_i^-(\tau_{i-1}),\quad \tau_{i-1}\leqslant t\leqslant\tau_i \tag{3.11}$$

$$\delta y_i^+(t)=\Phi_2[t,\tau_i^+]\cdot\delta y_i^+(\tau_i^+),\quad t\geqslant\tau_i^+ \tag{3.12}$$

Здесь Φ_1 и Φ_2—фундаментальные матрицы решений уравнений (3.2) и (3.3), соответственно.

Из (3.10)—(3.12) следует, что

$$\delta y_i^+(t)=M(t,t_{i-1})\delta y_i^-(\tau_{i-1}) \tag{3.13}$$

где

$$M(t,\tau_{i-1})=\Phi_2[t,\tau_i^+]A\Phi_1[t,\tau_{i-1}]$$

Если матрица M—неособая, то

$$\delta y_i^-(\tau_{i-1})=M^{-1}\delta y_i^+(t)$$

Заметим, что если заданы исходное решение $y_i(t)$ и вариации начального условия $\delta y_i(\tau_{i-1})$, то известны все члены в правой части выражения (3.8), определяющие влияние вариации начальных условий на момент переключения τ_i. Проведенное исследование можно распространить для любого i и тем самым, определить влияние вариации начальных условий на моменты переключения $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$.

В соответствии с (2.6) возмущенная траектория движения схвата манипулятора по первому приближению на интервале времени $t\in\in[\tau_{i-1}, \tau_{i+1}]$, имеет вид

$$\delta x=F(\alpha)\delta\alpha=\{\partial \bar{f}_i(y)/\partial y_j\}_{i,j}^{3,7}\cdot\delta y$$

ABOUT INFLUENCE OF INITIAL CONDITIONS VARIATIONS ON SOLUTION OF OPTIMAL CONTROL OF MANIPULATING ROBOTS MOTION PROBLEM

A. A. GUKASIAN

ՄԱՆԻՊՈՒԼՅԱՑԻՈՆ ՌՈԲՈՏՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՂԵԿԱՎԱՐՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՎՐԱ ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ՎԱՐԻԱՑԻԱՅԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ա. ՂՈՒԿԱՍՅԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հետազոտվում է մանիպուլյացիոն ռոբոտների օպտիմալ ղեկավարման անջատման կետերի որոշման հարցերը, սկզբնական պայմանների փոփոխության դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов.—М.: Наука, 1983, 392 с.
2. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями.—М.: Наука, 1980, 384 с.
3. *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления.—М.: Наука, 1987, 365 с.
4. *Черноусько Ф. Л., Меликян А. А.* Игровые задачи управления и поиска.—М.: Наука, 1978, 270 с.
5. *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем.—М.: Наука, 1971, 424 с.
6. *Рогов Н. Н., Черноусько Ф. Л.* Оптимальное управление электродвигателем работа с упругими элементами.—Тех. кибернетика, 1989, № 1, с. 135—145.
7. *Леондес В. У.* Функции чувствительности относительно начальных условий и их применение.—Тр. американского общества инженеров-механиков. «Теоретические основы инженерных расчетов», 1971, № 3, с. 128—134.
8. *Гукасян А. А.* О влиянии вариаций начальных условий на решение задачи оптимального управления манипуляционных роботов.—Тезисы докл. 7-ой Всесоюзной конференции по управлению в механических системах. Свердловск: 1990, 32 с.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
20.11.1991

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

Технический редактор *В. Д. СТЕПАНЯН*

Сдано в набор 20.07.1994 г. Подписано к печати 14.10.1994 г.
Формат 70×108[1]/16. Бумага № 1. сыктывкарская. Высокая печать. Печ. лист 4,25.
Усл. печ. л. 5,95. Усл. кр. отт. 5,95. Тираж 150. Заказ 22

Издательство «Гитутюн» НАН РА, 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.
пр. Маршала Баграмяна, 24-г.
Типография Издательства «Гитутюн» НАН РА, 378410, г. Аштарак, 2.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи, представляемые в «Известия НАН Армении. Механика», должны сопровождаться разрешением на опубликование от учреждения, в котором выполнена работа.

2. Статьи представляются на армянском или русском языках в двух экземплярах в возможно сжатой и ясно изложенной форме, чисто напечатанными на пишущей машинке в два интервала на одной стороне листа. К статье должно быть приложено резюме на армянском языке, если она написана на русском языке, и наоборот, а также аннотация в 2-х экземплярах с указанием УДК.

3. Объем статьи не должен превышать 14 стр. машинописи, включая список литературы и таблицы.

4. Формулы и все обозначения вписываются от руки чернилами, при этом должно быть отчетливое различие между заглавными и строчными буквами.

В тех случаях, когда заглавные и строчные буквы одинаковы по начертанию, необходимо заглавные буквы подчеркнуть снизу двумя черточками, а строчные отметить двумя черточками сверху, например: $\underline{\underline{V}}$ и $\overline{\overline{v}}$, $\underline{\underline{S}}$ и $\overline{\overline{s}}$, $\underline{\underline{O}}$ и $\overline{\overline{o}}$, $\underline{\underline{K}}$ и $\overline{\overline{k}}$, $\underline{\underline{U}}$ и $\overline{\overline{u}}$ и т. д. Следует также делать различие между O, o и 0 (нулем), для чего 0 (нуль) следует подчеркнуть снизу квадратной скобкой (карандашом).

Необходимо тщательно выписывать похожие друг на друга буквы, например g и q, l и e, I, J и Y, u и n и др. Греческие буквы подчеркивать красным карандашом.

Индексы и показатели следует отметить черным карандашом соответственно дугой ⌒ или ⌣, например: N^{4}_{i}. Черточки и другие знаки над буквами в математических обозначениях применять лишь в случае особой надобности.

Математические обозначения, например sin, arcsin, ln, lg, lim, const и т. д. надо подчеркивать горизонтальной прямой скобкой.

5. Рекомендуется двойная нумерация формул: первая цифра обозначает номер параграфа, вторая после точки—номер формулы.

6. Литература приводится общим списком в конце статьи, при этом в нижеследующей последовательности указываются: для книги—фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место издания, издательство, год издания, страницы; для журнала—фамилия и инициалы автора, наименование работы, название журнала, год издания, том (подчеркнуть) и выпуск. Ссылка на литературу в тексте дается цифрой в квадратных скобках.

7. Чертежи прилагаются на отдельных листах. Места иллюстраций указываются на левом поле страницы отметкой «фиг.». Подписи к иллюстрациям даются на отдельном листе в конце статьи. Каждая иллюстрация (чертеж, фото и др.) подписывается автором. На обороте иллюстрации указывается название журнала, фамилия автора, заглавие статьи и номер иллюстрации. Иллюстрации представляются в двух экземплярах: один экземпляр должен быть выполнен тушью на белой плотной бумаге или кальке, а второй—можно представить в виде светокопии или фотокопии. Фотоснимки должны быть контрастными.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. При представлении двух или более статей указывается желательный порядок их опубликования.

10. При возвращении статьи автору для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного текста.

11. В случае отказа в публикации редколлегия оставляет за собой право не возвращать автору один экземпляр статьи.

12. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени, отчества, а также номера телефона.

Адрес редакции: 375019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24-б. Редакция журнала «Известия НАН РА. Механика».