ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մեխանիկա 47, №1—2, 1994 Механика

МАГНИТОУПРУГИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В КОНЕЧНО-ПРОВОДЯЩЕМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

ГЕВОРКЯН А. В.

В работе установлено существование магнитоупругих обобщенных поверхностных сдвиговых волн в конечно-проводящем полупространстве при наличии внешнего постоянного магнитного поля, параллельно границе полупространства.

Исследуется вопрос существования поверхностных сдвиговых волн в случае конечно-проводящего полупространства при наличии внешнего постоянного магнитного поля, параллельного границе полупространства.

Пусть упругое конечно-проводящее полупространство отнесено к прямоугольной декартовой системе координат $0x_1x_2x_3$: ось x_1 направлена вдоль границы, ось x_2—в глубь полупространства.

Начальное магнитное поле $\vec{H}_0$ $(H_0, 0, 0)$ направлено по оси x_1.

Магнитная проницаемость материала полупространства принимается равной единице.

Учитывая, что в антиплоской деформации поле смещений и характеристики индуцированного электромагнитного поля имеют вид, соответственно, $\vec{u}=[0, 0, u_3(x_1, x_2, t)]$, $\vec{h}=[0, 0, h_3(x_1, x_2, t)]$, $\vec{e}=[e_1(x_1, x_2, t), e_2(x_1, x_2, t), 0]$ из системы линеаризованных уравнений магнитоупругости, описывающей поведение электромагнитного поля и движение проводящего упругого тела, при пренебрежении током смещения относительно тока проводимости, получим следующую систему уравнений (1—3):

$$\nabla^2 h_3-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial h_3}{\partial t}=-\frac{4\pi\sigma}{c^2}H_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial t},$$
$$G\nabla^2 u_3+\frac{H_0}{4\pi}\frac{\partial h_3}{\partial x_1}=\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},\qquad x_2>0 \tag{1}$$

где σ—удельная электропроводимость, c—электродинамическая постоянная, G—модуль сдвига, ρ—плотность материала полупространства.

В области $x_2<0$ имеем уравнения Максвелла и вытекающее из них волновое уравнение

$$\nabla^2 h_3^* = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h_3^*}{\partial t^2} \tag{2}$$

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2}=0, \quad h_3=h_3^*, \quad e_1=e_1^*, \quad x_2=0 \tag{3}$$

Решения уравнений (1) и (2) будем искать в виде

$$u_3=u(x_2)\exp i(kx_1-\omega t) \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, характеристическое уравнение которой имеет следующий вид:

$$\lambda^4-k^2(2-\alpha z+z^2)\lambda^2+k^4[(1-\alpha z)(1+z^2)-\alpha s z]=0 \tag{5}$$

где

$$\alpha=\frac{4\pi\sigma c_2}{kc^2}, \quad z=\frac{i\omega}{kc_2}, \quad c_2^2=\frac{G}{\rho}, \quad s=\frac{v_2^2}{c_2^2}, \quad v_2^2=\frac{H_0^2}{4\pi\rho},$$

Так как рассматриваются поверхностные волны, то из корней уравнения (5) выберем только те, которым соответствует уменьшение амплитуд волны с глубиной

$$\lambda_{1,2}=-k\lambda_{\pm}=-k\sqrt{1-\frac{1}{2}\alpha z+\frac{1}{2}z^2\pm\sqrt{\frac{1}{4}z^2(z+\alpha)^2+\alpha s z}} \tag{6}$$

при ограничении

$$\mathrm{Re}\lambda_{\pm}(z)>0 \tag{7}$$

а для того, чтобы эти волны уходили от границы, должно выполняться условие (4)

$$\mathrm{Im}\lambda_{\pm}(z)<0 \tag{8}$$

В дальнейшем, для определенности, используется положительное значение внутреннего корня (6).

Таким образом, решения системы (1) и уравнения (2) запишутся в следующем виде:

$$u_3=\left[\frac{\lambda_+^2+\alpha z-1}{ik\alpha H_0 z}A_+\exp(-k\lambda_+x_2)+\frac{\lambda_-^2+\alpha z-1}{ik\alpha H_0 z}A_-\exp(-k\lambda_-x_2)\right]\exp i(kx_1-\omega t) \tag{9}$$

$$h_3=(A_+\exp(-k\lambda_+x_2)+A_-\exp(-k\lambda_-x_2))\exp i(kx_1-\omega t) \tag{10}$$

$$h_3^*=B\exp(k\nu_*x_2)\exp i(kx_1-\omega t) \tag{11}$$

где

$$\nu_*=\sqrt{1+c_2^2\cdot c^{-2}z^2}\sim 1, \quad \mathrm{Re}\nu_*\approx 1, \quad \mathrm{Im}\nu_*\approx 0.$$

Подставляя выражения (9)—(11) в граничные условия (3), получим систему алгебраических однородных линейных уравнений для произвольных постоянных и из условия совместности этой системы получим дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\lambda_+ \cdot \lambda_-[1-c_2^2 \cdot c^{-2}\alpha^{-1}\nu_*^{-1}z(\lambda_+ + \lambda_-)]=-1-z^2 \tag{12}$$

Принимая во внимание, что

$$|1-c_2^2 \cdot c^{-2}\alpha^{-1}\nu_*^{-1}z(\lambda_+ + \lambda_-)|\approx 1$$

уравнение (12) переходит в уравнение

$$\lambda_+\lambda_- =-1-z^2 \tag{13}$$

которое, в свою очередь, сводится к кубическому уравнению

$$z^3+\alpha z^2+z+\alpha(1+s)=0 \tag{14}$$

Алгебраическое уравнение (14) имеет одно действительное отрицательное решение, не соответствующее условиям задачи, и комплексно-сопряженное решение с положительной действительной частью (5).

$$z_0=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{Q}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{Q}-\frac{q}{2}}\right)-\frac{\alpha}{3}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{Q}+\frac{q}{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{Q}-\frac{q}{2}}\right) \tag{15}$$

где

$$Q=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{1+s}{27}\alpha^4+\left[\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+s\right)^2-\frac{1}{27}\right]\alpha^2+\frac{1}{27}>0$$

$$p=1-\frac{\alpha^2}{3}, \quad q=\frac{2}{27}\alpha^3+\alpha\left(\frac{2}{3}+s\right)>0$$

В дальнейшем будем предполагать, что искомая волна распространяется по положительному направлению оси x_1, то есть в формуле (15) берется знак плюс.

Теперь обсудим, при каких условиях уравнения (13) и (14) являются равносильными.

Легко проверить, что правая часть уравнения (13) при $z=z_0$ имеет, соответственно, положительную реальную и отрицательную мнимую части: $\mathrm{Re}(1+z_0^2)<0$, $\mathrm{Im}(1+z_0^2)>0$.

Следовательно, выражение (15) будет решением исходного уравнения (13) при выполнении условия

$$\mathrm{Re}[\lambda_+(z_0)\cdot\lambda_-(z_0)]=\mathrm{Re}\lambda_+(z_0)\cdot\mathrm{Re}\lambda_-(z_0)-\mathrm{Im}\lambda_+(z_0)\mathrm{Im}\lambda_-(z_0)>0 \tag{16}$$

$$\mathrm{Im}[\lambda_+(z_0)\lambda_-(z_0)]=\mathrm{Re}\lambda_+(z_0)\mathrm{Im}\lambda_-(z_0)+\mathrm{Re}\lambda_-(z_0)\cdot\mathrm{Im}\lambda_+(z_0)<0$$

$$\mathrm{Re}\lambda_\pm(z_0)>0, \qquad \mathrm{Im}\lambda_\pm(z_0)<0$$

С другой стороны, по условию, $\lambda_+(z_0)$ и $\lambda_-(z_0)$ имеют следующий вид:

$$\lambda_{\pm}(z_0)=\sqrt{\frac{r_{\pm}+a_1\pm\sqrt{\frac{r_2+a_2}{2}}}{2}}+i\,\mathrm{sgn}\left(b_1\pm\sqrt{\frac{r_2-a_2}{2}}\,\mathrm{sgn}\,b_2\right)\times$$

$$\times\sqrt{\frac{r_{\pm}-\left(a_1\pm\sqrt{\frac{r_2+a_2}{2}}\right)}{2}} \tag{17}$$

где

$$a_1=\frac{1}{2}\left[1-3\alpha\mathrm{Re}z_0-2(\mathrm{Re}z_0)^2\right]$$

$$b_1=\mathrm{Im}z_0\left(\mathrm{Re}z_0-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$a_2=\frac{1}{4}\left[1-\alpha^2(1+s)+3\alpha s\mathrm{Re}z_0+2(\mathrm{Re}z_0)^2\right] \tag{18}$$

$$b_2=-\frac{1}{4}\,\mathrm{Im}z_0\left[2\mathrm{Re}z_0+\alpha(2-3s)\right]$$

$$r^2_{\pm}=\left(a_1\pm\sqrt{\frac{r_2+a_2}{2}}\right)^2+\left(b_1\pm\sqrt{\frac{r^2-a^2}{2}}\,\mathrm{sgn}\,b_2\right)^2$$

$$r_2^2=a_2^2+b_2^2\quad \mathrm{sgn}\,x=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

а из (14) можно установить следующие тождества:

$$(\mathrm{Im}z_0)^2\equiv3(\mathrm{Re}z_0)^2+2\alpha\mathrm{Re}z_0+1 \tag{19}$$

$$8(\mathrm{Re}z_0)^3\equiv\alpha s-2(1+\alpha^2)\mathrm{Re}z_0-8\alpha(\mathrm{Re}z_0)^2>0 \tag{20}$$

Тогда из (20) следует, что

$$\mathrm{Re}z_0<-\frac{s}{\alpha+\alpha^{-1}+\sqrt{(\alpha+\alpha^{-1})^2+8s}}<\frac{s}{2(\alpha+\alpha^{-1})}<\frac{s}{4} \tag{21}$$

В певую очередь нас интересуют те значения напряженности внешнего магнитного поля, которые реализуются на практике постоянными магнитами. Исходя из этого, при значениях $s<0{,}1$:

$$a_1>0,\quad b_1<0,\quad b_2<0 \tag{22}$$

и

$$\mathrm{Im}\lambda_{+}(z_0)<0$$

Теперь рассмотрим условие $\mathrm{Im}\lambda_{-}(z_0)<0$, то есть

$$b_1+\sqrt{\frac{r_2-a_2}{2}}<0 \tag{23}$$

Неравенство (23) с учетом (19) и (20) преобразуется

$$\operatorname{Re} z_0 > \frac{s \cdot \alpha}{\sqrt{(\alpha^2+1+s)^2+2s(\alpha^2+1-3s)}+\alpha^2+1+s} = \varphi(\alpha) \tag{24}$$

Графики функций $\operatorname{Re} z_0(\alpha)$ и $\varphi(\alpha)$ в интервале $0<\alpha<\infty$ пересекаются в единственной точке

$$\operatorname{Re} z_0(\alpha_0) = \varphi(\alpha_0) \tag{25}$$

где

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{\frac{s}{2\eta}-1}}{2\eta+1}, \qquad 1<\alpha_0(s)<\sqrt{3}$$

$$\eta(s) = 2\sqrt{-\frac{p_*}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\theta(s)\right) - \frac{2(1-s)}{3(1-3s)}; \quad \frac{s}{8}<\eta<\frac{s}{8-2s}$$

$$\theta = \frac{-\frac{q_*}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{p_*}{3}\right)^3}}, \quad p_* = -\frac{7s^2+7s+4}{12(1-3s)^2}$$

$$q_* = \frac{263s^3+30s^2-201s+16}{216(1-3s)^3}$$

Кроме этого, положительные функции $\operatorname{Re} z_0(\alpha)$ и $\varphi(\alpha)$ при $\alpha \to 0$; $\alpha \to \infty$ стремятся к нулю и

$$\operatorname{Re}' z_0(0) = \frac{s}{2} > \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{1+s} > \varphi'(0) = \frac{s}{\sqrt{(1+s)^2+2s(1-3s)}+1+s} \tag{26}$$

Следовательно, решением неравенства (24) является

$$\alpha<\alpha_0(s) \tag{27}$$

Таким образом, второе из неравенств (16) удовлетворяется.
Теперь докажем справедливость первого из неравенств (16) в интервале (27), преобразуя его с учетом (17)

$$r_-\left(\sqrt{\frac{r_2+a_2}{2}}+a_1\right) > r_+\left(\sqrt{\frac{r_2+a_2}{2}}-a_1\right) \tag{28}$$

Пусть

$$a_1<\sqrt{\frac{r_2+a_2}{2}} \tag{29}$$

тогда, учитывая (18), неравенство (28) можно записать в виде

$$(2a_1b_1-b_2)\left(b_1\sqrt{\frac{r_2+a_2}{2}}+a_1\sqrt{\frac{r_2-a_2}{2}}\right)>0 \tag{30}$$

С другой стороны, из соотношений (21), (27) и (29) следует отрицательность множителей (30), подтверждающее справедливость неравенства (28).

И, наконец, рассмотрим особый случай, когда

$$\operatorname{Im}\lambda_-(z_0)=0 \tag{31}$$

Это возможно, если одновременно имеют место условия

$$b_1(\alpha)+\sqrt{\frac{r_2(\alpha)-a_2(\alpha)}{2}}=0 \tag{32}$$

$$a_1(\alpha)>\sqrt{\frac{r_2(\alpha)+a_2(\alpha)}{2}} \tag{33}$$

Решением уравнения (32) является

$$\alpha=\alpha_0(s) \tag{34}$$

Из неравенства (21) вытекает, что

$$-a_1(\alpha_0)b_1(\alpha_0)>-\frac{1}{2}b_2(\alpha_0)=\sqrt{\frac{r_2(\alpha_0)+a_2(\alpha_0)}{2}}\cdot\sqrt{\frac{r_2(\alpha_0)-a_2(\alpha_0)}{2}}$$

Так как

$$-b_1(\alpha_0)=\sqrt{\frac{r_2(\alpha_0)-a_2(\alpha_0)}{2}}$$

то неравенство (33) выполняется и, тем самым, в соотношении (27) допускается знак равенства, то есть

$$\alpha\leqslant\alpha_0(s) \tag{35}$$

Соотношение (35), фактически, является условием существования поверхностных сдвиговых волн.

Итак, в конечно-проводящем полупространстве распространяются затухающие магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны со структурными волновыми векторами $\vec{k}_\pm(k,\ -k\operatorname{Im}\lambda_\pm(z_0),\ 0)$ с соответствующими фазовыми скоростями

$$v_\pm=\frac{\operatorname{Im}z_0}{\sqrt{1+(\operatorname{Im}\lambda_\pm(z_0))^2}}\,c_2 \tag{36}$$

а вдоль границы распространяется поверхностная затухающая волна с фазовой скоростью

$$v_p=\operatorname{Im}z_0(\alpha)\cdot c_2 \tag{37}$$

являющейся монотонно возрастающей функцией от параметра α и

$$c_2<v_p\leqslant\operatorname{Im}z_0(\alpha_0)\cdot c_2 \tag{38}$$

причем

$$v_+<v_-\leqslant v_p \tag{39}$$

Интересно отметить, что при $\alpha=\alpha_0(s)$ волновой вектор $\vec{k}_-$ становится параллельным оси x_1, причем

$$v_-(\alpha_0)=v_p(\alpha_0)=\operatorname{Im}z_0(\alpha_0)\cdot c_2 \tag{40}$$

Кроме того, заслуживает внимания и тот факт, что к интервалу $\alpha > \alpha_0(s)$ относится идеально проводящая среда.

Аналогичным образом решается задача при зависимости $k = k(\omega)$ с действительной частотой ω. Тогда волевое число k стачовится комплексным и определяется формулой

$$k = k_\omega \left[\sqrt{\frac{r + \dfrac{1+(1+s)\alpha^2}{1+(1+s)^2\alpha^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{r - \dfrac{1+(1+s)\alpha^2}{1+(1+s)^2\alpha^2}}{2}} \right] \tag{41}$$

$$r^2 = \frac{[1+(1+s)\alpha^2]^2 + s^2\alpha^2}{[1+(1+s)^2\alpha^2]^2}, \quad \alpha = \frac{4\pi\sigma}{\omega} \cdot \frac{c_2^2}{c^2}, \quad k_\omega = \frac{\omega}{c_2}$$

Соответствующие корни характеристического уравнения системы имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -k_\omega \lambda_{\pm} = -k_\omega \left[\sqrt{\frac{r_{\pm} + a_1 \pm \sqrt{\dfrac{r_2 + a_2}{2}}}{2}} - i \sqrt{\frac{r_{\pm} - \left(a_1 \pm \sqrt{\dfrac{r_2 + a_2}{2}}\right)}{2}} \right] \tag{42}$$

$$r_{\pm}^2 = \left(a_1 \pm \sqrt{\frac{r_2 + a_2}{2}}\right)^2 + \left(b_1 \mp \sqrt{\frac{r_2 - a_2}{2}}\right)^2, \quad r_2^2 = a_2^2 + b_2^2 \tag{43}$$

$$a_1 = \frac{1+(1+s)\alpha^2}{1+(1+s)^2\alpha^2} - \frac{1}{2} > 0$$

$$b_1 = \alpha \left[\frac{s}{2+(1+s)^2\alpha^2} - \frac{1}{2} \right] < 0$$

$$a_2 = \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{s^2\alpha^2}{1+(1+s)^2\alpha^2}$$

$$b_2 = \alpha \left[s \cdot \frac{1+(1+s)\alpha^2}{1+(1+s)^2\alpha^2} - \frac{1}{2} \right] < 0$$

Здесь условие существования магнитоупругих неоднородных поверхностных сдвиговых волн выглядит так:

$$\alpha \leq \alpha_0(s) \tag{44}$$

где

$$\alpha_0^2(s) = \frac{\eta(s)}{(1+s)^2(s-\eta(s))},$$

$$0 < \eta(s) < \frac{1{,}5s(1-2s)}{\sqrt{(1-3{,}5s+s^2)^2 + 6s(1-s)(1-2s)} + 1 - 3{,}5s + s^2}$$

$$\eta(s)=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\frac{-q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\right]-\frac{2}{3}(1-s)$$

$$p=-\frac{1}{3}(1+2{,}5s+s^2)<0, \qquad q=-\frac{1}{108}(8-51s-30s^2-s^3)<0$$

$$Q=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

Таким образом, в этом случае, в конечно-проводящем полупространстве распространяются магнитоупругие неоднородные поверхностные сдвиговые волны со структурными волновыми векторами $\vec{k}_{\pm}(\mathrm{Re}\,k, -k_\omega \mathrm{Im}\,\lambda_{\pm}, 0)$ с соответствующими фазовыми скоростями

$$v_{\pm}=\frac{\omega}{\sqrt{(\mathrm{Re}\,k)^2+k_\omega^2(\mathrm{Im}\,\lambda_{\pm})^2}}=\frac{v_p}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{Im}\,\lambda_{\pm}}{\mathrm{Re}(k_\omega^{-1}k)}\right)^2}}, \tag{45}$$

причем

$$v_+<v_-\leqslant v_p, \quad c_2<v_p\leqslant v_p(\alpha_0) \tag{46}$$

где $v_p=\omega/\mathrm{Re}\,k$ — скорость распространения затухающей поверхностной волны вдоль границы полупространства.

MAGNETOELASTIC SURFACE SHEAR WAVES IN THE HALF SPACE WITH FINITE CONDUCTIVITY

A. V. GEVORKIAN

ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԱՅԻՆ ՍԱՀՔԻ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ա. Վ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում ցույց է տրված մագնիսաառաձգական սահքի ընդհանրացված մակերևույթային ալիքների գոյությունը վերջավոր հաղորդիչ կիսատարածությունում՝ եզրին զուգահեռ արտաքին հաստատուն մագնիսական դաշտի առկայությամբ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.—М.: Наука, 1982.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды.—М.: Наука, 1983, т. 1.
3. *Новацкий В. В.* Теория упругости.—М.: Мир, 1975.
4. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах.—М.: АН СССР, 1957.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике.—М.: Наука, 1984.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
3.12.1992