ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մեխանիկա 47, №1—2, 1994 Механика

УДК 539.43

УСТОЙЧИВОСТЬ МОДУЛЯЦИОННОЙ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИНЕ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ

БАГДОЕВ А. Г., МОВСИСЯН Л. А.

Изучается вопрос распространения одномерной квазимонохроматической волны в нелинейно упругой пластине, находящейся на вязкоупругом полупространстве.

На основании дисперсионного уравнения, найденного в асимптотическом приближении, получено уравнение модуляции и условия устойчивости распространения волн.

Изучается вопрос устойчивости распространения одномерной квазимонохроматической волны в нелинейно-упругой пластине, находящейся на вязкоупругом полупространстве. Случай упругого основания рассмотрен в [1].

1. Пусть нелинейно-упругая [2, 3] пластинка находится на вязкоупругом полупространстве и по пластине распространяется изгибная волна.

Одномерное уравнение движения пластинки будет [3]

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+D_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=Z \tag{1.1}$$

где

$$D_1=\frac{Eh^5\gamma_2\nu_1}{135(1-\nu^2)},\qquad \nu_1=\frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^3},$$

ρ — плотность пластинки, Z — влияние основания.

Уравнениями движения основания будут

$$\tilde{\mu}\,\Delta u+(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu})\frac{\partial e}{\partial x}-\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\quad \tilde{\mu}\Delta v+(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu})\frac{\partial e}{\partial y}=\rho_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

где для вязкоупругих операторов имеем

$$\tilde{\mu}u=\mu\left[u-\int\limits_{-\infty}^{t}\Gamma(t-s)u(s)ds\right] \tag{1.3}$$

и аналогичное выражение для $\tilde{\lambda}$, т. е. принимается, что коэффициент Пауссона постоянен.

На границе контакта пластинки с основанием принимается следующее условие:

$$v=w,\quad \sigma_y=Z,\quad \tau_{xy}=0 \quad \text{при} \quad y=0 \tag{1.4}$$

Решение (1.1) и (1.2) ищется в виде

$$w=ae^{i\tau}+\bar{a}e^{-i\bar{\tau}},\quad \tau=kx-\omega t$$

$$u=f(y)e^{i\tau}+\bar{f}(y)e^{-i\bar{\tau}},\quad v=\varphi(y)e^{i\tau}+\bar{\varphi}(y)e^{-i\bar{\tau}} \tag{1.5}$$

где чертой обозначены комплексно-сопряженные значения.

Подставляя (1.5) в (1.2) и в выражениях f и φ оставляя ограниченные части решения, имеем

$$u=(C_1e^{-p_1y}+C_2e^{-p_2y})e^{i\tau}+(\bar{C}_1e^{-\bar{p}_1y}+\bar{C}_2e^{-\bar{p}_2y})e^{-i\bar{\tau}} \tag{1.6}$$

$$v=(B_1e^{-p_1y}+B_2e^{-p_2y})e^{i\tau}+(\bar{B}_1e^{-\bar{p}_1y}+\bar{B}_2e^{-\bar{p}_2y})e^{-i\bar{\tau}}$$

$$p_1=\sqrt{k^2-\frac{\omega^2\rho_0}{(\lambda+2\mu)(1-\Gamma_c)}},\qquad p_2=\sqrt{k^2-\frac{\omega^2\rho_0}{\mu(1-\Gamma_c)}} \tag{1.7}$$

$$\bar{p}_i=p_i(\omega\to\bar{\omega},\Gamma_c\to\bar{\Gamma}_c),\quad \text{а}\quad \Gamma_c=\int_0^\infty e^{i\omega z}\Gamma(z)dz$$

Удовлетворяя условиям (1.4), получим

$$C_1=a\,\frac{p_2-ik\varkappa_2}{\varkappa_1p_2-\varkappa_2p_1},\quad C_2=a\,\frac{ik\varkappa_1-p_1}{\varkappa_1p_2-\varkappa_2p_1} \tag{1.8}$$

$$B_j=\varkappa_jC_j$$

$$\varkappa_j=\frac{i}{kp_j(\lambda+\mu)}\left[k^2(\lambda+2\mu)-\mu p_j^2-\frac{\rho\omega^2}{1-\Gamma_c}\right]$$

Вычисляя σ_y по формуле $\sigma_y=\tilde{\lambda}e+2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y}$, имеем

$$\sigma_y/_{y=0}=(1-\Gamma_c)[\lambda ik(C_1+C_2)-(\lambda+2\mu)(B_1p_1+B_2p_2)]e^{i\tau}+$$

$$+(1-\bar{\Gamma}_c)[-i\lambda k(\bar{C}_1+\bar{C}_2)-(\lambda+2\mu)(\bar{B}_1\bar{p}_1+\bar{B}_2\bar{p}_2)]e^{i\bar{\tau}} \tag{1.9}$$

Подставляя (1.5) и (1.9) с учетом (1.7), (1.8) в (1.1), получим нелинейное дисперсионное уравнение (трансцендентное для ω_0, где ω_0—линейная частота).

Ввиду большой сложности, полученное уравнение целесообразно исследовать его асимптотически. В частности, для малых ω^2/k^2 для σ_y получим

$$\sigma_y\Big|_{y=0}=-\frac{2\mu(\lambda+\mu)k}{\lambda+2\mu}\left[(1-\Gamma_c)ae^{i\tau}+(1-\bar{\Gamma}_c)\bar{a}e^{-i\bar{\tau}}\right] \tag{1.10}$$

Дисперсионное уравнение в таком приближении будет

$$Dk^4+3D_1k^8|a|^2+\alpha k[1-\Gamma_c(\omega_0)]=\rho h\omega^2 \tag{1.11}$$

где

$$\alpha=2\mu(\lambda+\mu)/(\lambda+2\mu)$$

В частности, если материал основания экспоненциального типа $\Gamma(z)=\gamma e^{-\beta z}$, то для линейной частоты ω_0 будем иметь

$$\omega_0=\omega_1+i\omega_2 \tag{1.12}$$

$$\rho h\omega_1^2=Dk^4+2\rho h\omega_2\beta+\alpha k$$

$$\omega_2=-\frac{\alpha\gamma k}{2(Dk^4+\alpha k+\rho h\beta^2)}$$

При получении (1.12) учитывается малость диссипации (ω_2).

2. Для получения уравнения модуляции представим (1.11) в виде

$$\omega=\omega_0+\left(\frac{\partial\omega}{\partial A^2}\right)_{A^2=0}A^2, \qquad A=|a| \tag{2.1}$$

где ω_0 определяется по (1.12), а

$$\frac{\partial\omega}{\partial A^2}=D_2-iD_3 \tag{2.2}$$

$$D_2=\frac{3}{2}\frac{D_1k^8}{\rho h\omega_1}e^{2\omega_2 t}, \quad D_3=\frac{3D_1k^8}{(2\rho h\omega_1)^2}\left[2\rho h\omega_2+\frac{\alpha\gamma k(\omega_1^2-\beta^2)}{(\beta^2+\omega_1^2)^2}\right]e^{2\omega_2 t}$$

Следуя [4—6], модуляционное уравнение можно получить, заменяя в (2.1) $\omega\to i\dfrac{\partial}{\partial t}$, $k\to -i\dfrac{\partial}{\partial x}$ и применяя (2.1) к $Ae^{i\tau_0}$ ($\tau_0=kx-\omega_0 t$), при этом используется формула

$$\omega_0\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)Ae^{i\tau_0}=\left[\omega_0(k)A-i\omega_0'(k)\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{1}{2}\omega_0''\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right]e^{i\tau_0}$$

Тогда получится:

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{d\omega_0}{dk}\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{i}{2}\frac{d^2\omega_0}{dk^2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+i(D_2-iD_3)|A|^2A=0 \tag{2.3}$$

Здесь при вычислении ω_1 в (1.12), член с ω_2 можно отбросить.

В работе [7] модуляционное уравнение получено несколько иным путем. Вместе с тем, исследование на устойчивость нужно провести аналогично. Как и там, полагая

$$A=be^{i\varphi}$$

$$b=b_0(t)+b'(x,t), \qquad \varphi=\varphi_0(t)+\varphi'(x,t) \tag{2.4}$$

Получим системы для невозмущенного и возмущенного движений. Далее, записав решение для возмущения в виде

$$b'=F\exp[i(Kx-\Omega t)], \quad \varphi'=\Phi\exp[i(Kx-\Omega t)] \tag{2.5}$$

для Ω получим уравнение

$$z^2+3D_3b_0^2z+z_1(z_1+2D_2b_0^2)=0 \tag{2.6}$$

где

$$z=-i\Omega+iK\frac{d\omega_1}{dk}-\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_2}{dk^2}K^2 \tag{2.7}$$

$$z_1=iK\frac{d\omega_2}{dk}+\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_1}{dk^2}K^2$$

Из (2.9) следует, что условием устойчивости будет

$$\Omega_2\leqslant 0, \qquad \Omega=\Omega_1+i\Omega_2 \tag{2.8}$$

Анализ корней (2.6) показывает, что имеется устойчивость, тогда

$$\frac{3}{2}b_0^2|D_3|+\frac{d\omega_2}{dk}\frac{K\left(D_2b_0^2+\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_1}{dk^2}K^2\right)}{\sqrt{z_2}}<\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_2}{dk^2}K^2,$$

если $$z_2=\left(\frac{1}{2}K^2\frac{d^2\omega_1}{dk^2}\right)^2+D_2b_0^2K^2\frac{d^2\omega_1}{dk^2}-\left(\frac{3}{2}D_3b_0^2\right)^2>0 \tag{2.9}$$

2) Если же $z_2<0$, то

$$\frac{2}{3}|D_3|b_0^2+\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_2}{dk^2}K^2>\sqrt{-z_2} \tag{2.10}$$

Полученные соотношения верны также и для Винклерового основания (вязкоупругого), т. е. тогда в (1.12) третий член должен быть заменен $\alpha'(1-\Gamma_c)$ (в (1.11) форма волнообразования учитывается) и в дальнейших формулах αk должно быть заменено на α'.

THE STABILITY MODULATION WAVE IN NONLINEAR PLATE ON THE VISCOELASTIC BASE

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

ԱՌԱՁԳԱՄԱԾՈՒՑԻԿ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍԱԼՈՒՄ ՄՈԴՈՒԼԱՑԻՈՆ ԱԼԻՔԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է ոչ գծային առաձգական սալում, որը գտնվում է առաձգամածուցիկ կիսատարածության վրա, միաչափ քվազիմոնոխրոմատիկ ալիքի տարածման հարցը։

Դիսպերսիոն հավասարման հիման վրա, որը գտնվել է ասիմպտոտիկ մոտավորությամբ, ստացվել է մոդուլացիայի հավասարումը և ալիքի տարածման կայունության պայմանը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Топчян Д. Х.* Волны модуляций в пластинах на упругом основании.—Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1982, с. 270—275.
2. *Каудерер Г.* Нелинейная механика.—М.: ИЛ, 1961, 777 с.
3. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Некоторые задачи по устойчивости распространения нелинейных волн.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1984, т. 37, № 2, с. 3—11.
4. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах.—М. Наука, 1973. 175 с.
5. *Багдоев А. Г.* Распространение волн в сплошных средах.—Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1981. 306 с.
6. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн.—М.: Наука, 1984. 432 с.
7. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* К вопросу устойчивости распространения нелинейных волн в вязкоупругой пластине.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1983, т. 36, № 2. с. 3—10.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
11.12.1992