

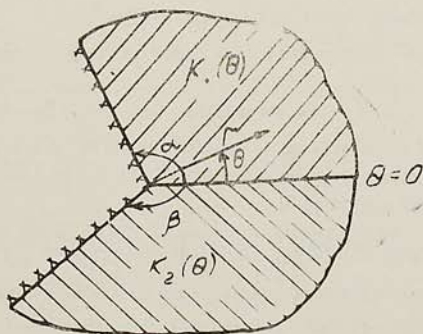
УДК 539.376

О ПРОДОЛЬНОМ СДВИГЕ НЕОДНОРОДНО-СОСТАВНОГО КЛИНА

АКОПЯН А. Г.

Рассматривается влияние неоднородности материала по экспоненциальному закону от кольцевой координаты на мало-напряженное состояние на крае контактной поверхности составного клиновидного тела со степенным законом упрочнения в условиях продольного сдвига. Принимаем, что внешние грани клина жестко защемлены. Для однородного составного клина вопросы, связанные с малонапряженностью при продольном сдвиге, исследованы в работах [1—3]. Задача малонапряженности неоднородно-составного клина со свободными внешними гранями при продольном сдвиге рассмотрена в работах [4, 5].

1. *Постановка задачи.* Пусть два длинных цилиндрических тела из неоднородных материалов со степенным упрочнением, спаянные друг с другом по некоторой части боковых поверхностей полным прилипанием, подвергаются продольному сдвигу. В угловой точке контактной поверхности поместим начало цилиндрической системы координат, ось $\theta=0$ проведем по контактной поверхности, ось z —по продольному направлению (фиг. 1).



Фиг. 1.

Между интенсивностями напряжений и деформаций принимаем зависимость

$$\tau_0 = k\varepsilon_0^m, \quad k = k(\theta) \quad (1.1)$$

где $k(\theta)$ характеризует неоднородные деформативные свойства материалов и определяется из соответственных экспериментов. Степени упрочнения m у обоих материалов принимаем одинаковыми, а функции $k(\theta)$ — различными.

Относительно перемещения будем иметь дифференциальное уравнение [5]:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r k \varepsilon_0^{m-1} \frac{\partial w}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{k}{r} \varepsilon_0^{m-1} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (1.2)$$

2. Представление решения. Величины в областях $0 \leq \theta \leq \alpha$, $-\beta \leq \theta \leq 0$ обозначим индексами $i=1, 2$, соответственно. Компоненты напряжений и перемещений в каждой области представим в виде

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= k_i r^{(\lambda-1)m} \chi_i f_i, & \tau_{\theta z} &= k_i r^{(\lambda-1)m} \chi_i f_i \\ w_i &= r^\lambda f_i, & \chi_i &= (\sqrt{f_i'^2 + \lambda^2 f_i^2})^{m-1} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $f_i = f_i(\lambda, \theta)$ и λ — искомые функция и постоянная, соответственно.

Подставляя выражения перемещений из (2.1) в (1.2) и вводя новую функцию $\psi_i = f_i'/f_i$, приходим к дифференциальному уравнению [4]

$$\psi_i' = - \frac{(\psi_i^2 + \lambda^2)(\psi_i^2 + 2n h_i \psi_i + s^2)}{\psi_i^2 + \lambda^2 n} \quad (2.2)$$

где

$$s^2 = \lambda(\lambda - 1 - n - 1), \quad 2h_i = k_i'/k_i, \quad n = 1/m.$$

В случае экспоненциального закона неоднородностей, то есть когда

$$k_i = k_i^* \exp(2h_i^* \theta) \quad (2.3)$$

где k_i^* и h_i^* — постоянные материалов, имеем $h_i = \text{const}$.

Тогда общее решение уравнений (2.2), когда $\Delta_i = s^2 - n^2 h_i^2 > 0$, представится в виде [4,5]

$$\frac{E_i}{\sqrt{\Delta_i}} \arctg \frac{\psi_i + n h_i}{\sqrt{\Delta_i}} + G_i \arctg \frac{\psi_i}{\lambda} + Q_i \ln \left(\sqrt{\frac{\psi_i^2 + 2n h_i \psi_i + s^2}{\psi_i^2 + \lambda^2}} \frac{\lambda}{s} \right) = H_i - \theta \quad (2.4)$$

где H_i — произвольные постоянные и введены обозначения

$$\begin{aligned} B_i G_i &= (n-1)^2, & B_i E_i &= 2(n+1)n^2 h_i^2 + (1-\lambda)(n-1)^2 \\ B_i Q_i &= 2(n-1)n h_i, & B_i &= (n-1)^2 + 4n^2 h_i^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Используя граничные условия на гранях клина и условия сопряже-

ния на контактной поверхности, из (2.4) определяем H_i и λ , следовательно, и функции ψ_i в соответствующих областях.

3. *Краевые условия.* На гранях клина заданы нулевые перемещения. Для функции f_i имеем граничные условия

$$f_1(x) = f_2(-\beta) = 0$$

а также условия сопряжения на контактной поверхности

$$f_1 = f_2, \quad f_1' / \lambda_1 = \gamma f_2' / \lambda_2 \quad \text{при } \theta = 0$$

где $\gamma = k_2(0) / k_1(0)$. Для ψ_i будем иметь условия

$$\psi_1(x) = -\psi_2(-\beta) = -\infty \quad (3.1)$$

и условие на контактной поверхности

$$\mu_1 (\sqrt{\mu_1^2 + \lambda^2})^{m-1} = \gamma \mu_2 (\sqrt{\mu_2^2 + \lambda^2})^{m-1} \quad (3.2)$$

причем, $\mu_i = \psi_i(\lambda, 0)$. Таким образом, приходим к трехточечной задаче об определении собственной функции ψ_i и собственного значения λ из уравнений (2.4) при граничных условиях (3.1), (3.2).

Используя граничные условия (3.1), из (2.4) находим

$$\begin{aligned} H_1 &= \alpha - \frac{\pi}{2} \left(G_1 + \frac{E_1}{\sqrt{\Delta_1}} \right) + Q_1 \ln \frac{\lambda}{s} \\ H_2 &= -\beta + \frac{\pi}{2} \left(G_2 + \frac{E_2}{\sqrt{\Delta_2}} \right) + Q_2 \ln \frac{\lambda}{s}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Принимая в (2.4) $\theta = 0$, получаем уравнения относительно μ_i

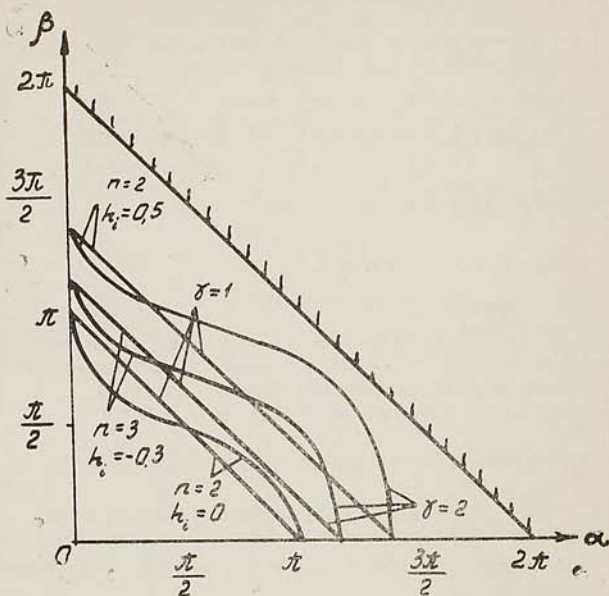
$$\alpha = \frac{E_1}{\sqrt{\Delta_1}} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\mu_1 + nh_1}{\sqrt{\Delta_1}} \right) + G_1 \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\lambda} \right) + \frac{Q_1}{2} \ln \frac{\mu_1^2 + 2nh_1\mu_1 + s^2}{\mu_1^2 + \lambda^2}, \quad (3.4)$$

$$\beta = \frac{E_2}{\sqrt{\Delta_2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_2 + nh_2}{\sqrt{\Delta_2}} \right) + G_2 \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_2}{\lambda} \right) - \frac{Q_2}{2} \ln \frac{\mu_2^2 + 2nh_2\mu_2 + s^2}{\mu_2^2 + \lambda^2}.$$

Полученные зависимости (3.2) и (3.4) составляют систему из трех трансцендентных уравнений относительно μ_1 , μ_2 и λ , определяющих в конечном счете $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, n, h_i)$.

4. *Гиперповерхность конечных напряжений.* Условие $\lambda = 1$ в пространстве параметров α , β , γ , n , h_i определяет некоторую поверхность конечных напряжений, отделяющую зону малонапряженности от зоны сильной концентрации напряжений. Принимая в (3.2) и (3.4) $\lambda = 1$, получим систему трансцендентных уравнений предельных кривых малонапряженности. Результаты численного исследования этой системы приведены на фиг. 2, где показано изменение зоны малонапряженности (ниже кривых) в зависимости от неоднородности механических свойств материалов.

5. *Случай одного неоднородного клина.* Когда клин изготовлен



Фиг. 2.

из одного неоднородного материала, то есть при $\gamma=1$, $h_1=h_2=h$ полагая $\mu_1=\mu_2$, уравнение (3.2) удовлетворим тождественно, а из (3.4) находим

$$\lambda = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 4[N^2 - (n-1)^4] \{N^2 n^2 h^2 + [2(n+1)n^2 h^2 + (n-1)^2] h^2\}}}{2[(n-1)^4 - N^2]} \quad (5.1)$$

$$M = (n-1)[N^2 + 4(n^2 - 1)n^2 h^2 + 2(n-1)^2]$$

$$N = (n-1)^2(2\nu - 1) + 8n^2 h^2 \nu, \quad \nu = \alpha_*/\pi, \quad \alpha + \beta = 2\alpha_*$$

Найденное значение λ совпадает с соответствующей формулой работы [5] для клина со свободными границами.

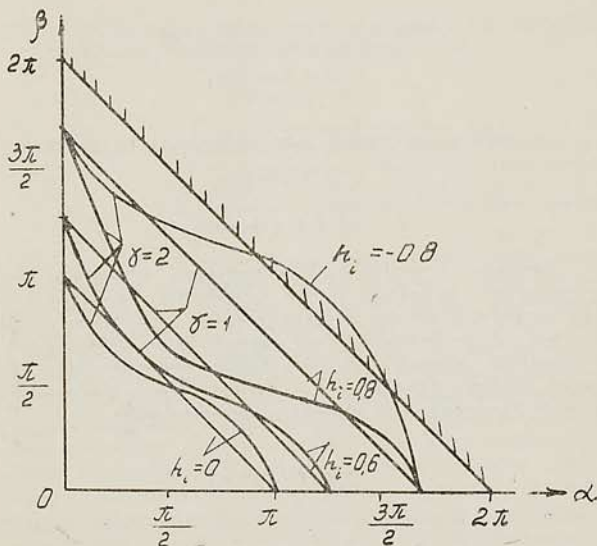
6. *Линейно-упругий неоднородно-составной клин.* Когда составной клин изготовлен из линейно-упругих неоднородных материалов, принимая в системе уравнений (3.2), (3.4) $m=n=1$, приходим к уравнению относительно λ :

$$\sqrt{\lambda^2 - h_1^2} \operatorname{ctg}(\alpha \sqrt{\lambda^2 - h_1^2}) + \gamma \sqrt{\lambda^2 - h_2^2} \operatorname{ctg}(\beta \sqrt{\lambda^2 - h_2^2}) + h_1 - \gamma h_2 = 0 \quad (6.1)$$

определяющему $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, h_1)$.

Далее, полагая здесь $\lambda=1$, определяем уравнение предельных кривых малонапряженности. На фиг. 3 представлены эти кривые в плоскости $\alpha\beta$, отделяющие зону малонапряженности (ниже кривых) от зоны сильной концентрации напряжений (выше кривых).

В случае, когда линейно-упругий клин изготовлен из одного сплошного неоднородного материала, т. е. при $\gamma=1$, $h_1=h_2=h$, согласно (6.1) имеем



Фиг. 3.

$$\lambda = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4\gamma^2}} \quad (6.2)$$

Отсюда заключаем, что при растворе угла клина

$$2\alpha_* \leq \frac{\pi}{\sqrt{1-h^2}} \quad (6.3)$$

соблюдается условие малонапряженности.

Формулы (6.2) и (6.3) совпадают с соответствующими формулами работы [5] для клина со свободными границами.

В рассмотренной задаче, если для одного однородного клина с углом раствора больше π , всегда имеется концентрация напряжений в вершине, то для одного неоднородного клина, как показывают графики (фиг. 2 и 3), эта закономерность нарушается. Из этих графиков

заклучаем также, что для одних и тех же значений степени упрочнения и раствора углов клина, в зависимости от неоднородности механических свойств материалов, клин может находиться в состоянии малонапряженности или сильной концентрации напряжений.

ABOUT LONGITUDINAL SHIFT OF NONHOMOGENEUS-COMPOUND WEDGE

A. G. HAKOBIAN

ԱՆՀՈՄՈԳԵՆՈՒ-ԲԱՂԱԳՐՅԱԿ ՍԵՊԻ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Գ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու լ մ

Գիտարկվում է աստիճանային ամրապնդվող, անհամասեռ նյութերից պատրաստված բաղադրյալ մարմնի մակերևույթի ամրակցված սեպածև եղրի լարվածային վիճակը երկայնական սահմի պայմաններում: Ստացված են սեպի թերլարվածային վիճակի տիրույթները լարումների խիստ կոնցենտրացիայի տիրույթից բաժանող կորերի հավասարումները: Յույց է տրված նյութերի մեխանիկական հատկությունների անհամասեռությունից կախված թերլարվածության տիրույթների փոփոխությունը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобакян К. С. Напряжения в составных упругих телах.—Ереван: Изд-во АН Армении, 1987. 338 с.
2. Задоян М. А. Пространственные задачи теории пластичности.—М.: Наука, 1992. 384 с.
3. Аксентян О. К., Луцик О. Н. Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина.—Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 5, с. 102—108.
4. Задоян М. А. Продольный сдвиг составного клина.—Докл. АН СССР, 1987, т. 296, № 2, с. 297—302.
5. Акопян А. Г., Задоян М. А. Малонапряженность неоднородно-составных клиньев.—Изв. Российской АН, МТТ, 1992, № 5, с. 88—96.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
17.11.1992