ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 1—2, 1994 Механика

ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ КРЕСТООБРАЗНЫМ БЕСКОНЕЧНЫМ СТРИНГЕРОМ

ГРИГОРЯН Э. Х., ТОРОСЯН Д. Р.

Рассматривается задача для упругой бесконечной пластины, усиленной двумя одинаковыми взаимно-перпендикулярными бесконечными стрингерами или, что то же самое, усиленной крестообразным бесконечным стрингером. Пластина деформируется под действием сил, приложенных к крестообразному стрингеру, симметрично относительно его центра и направленных к центру стрингера или наоборот. Задача заключается в определении контактных усилий, действующих между стрингером и пластиной.

С помощью преобразования Фурье задача сводится к решению системы разностных функциональных уравнений относительно трансформантов Фурье контактных сил. Дается замкнутое решение этой системы функциональных уравнений. Получены асимптотические формулы, характеризующие поведения контактных сил в окресности центра и далеких от него точках стрингера.

Пусть упругая бесконечность пластина толщины h усилена крестообразным бесконечным стрингером с модулем упругости E_s и с площадью поперечного сечения F_s. Пластина деформируется под действием сил $P\delta(x-a)\delta(y)$, $P\delta(x+a)\delta(y)$, $Q\delta(y-a)\delta(x)$, $Q\delta(y+a)\delta(x)$ (фиг. 1). Относительно крестообразного стрингера принимается модель контакта по линии, то есть считается, что контактные касательные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, а для пластины предполагается, что во время деформации она находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Требуется определить контактные напряжения, действующие под стрингером.

В силу вышесказанного уравнения равновесия стрингера запишутся в виде

$$\frac{du^{(1)}}{dx}=\frac{1}{E_sF_s}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta(x-t)\tau^{(1)}(t)dt+\frac{P}{E_sF_s}[\Theta(x+a)-\Theta(x-a)]$$

$$\frac{dv^{(1)}}{dy}=\frac{1}{E_sF_s}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta(y-\eta)\tau^{(2)}(\eta)d\eta+\frac{Q}{E_sF_s}[\Theta(y+a)-\Theta(y-a)]$$

где $\Theta(x)$—функция Хевисайда, $u^{(1)}(x)$, $v^{(1)}(y)$—горизонтальные и вертикальные перемещения стрингера соответственно, $\tau^{(1)}(x)$, $\tau^{(2)}(y)$ —интенсивности горизонтальных и вертикальных контактных касательных сил соответственно.

Из постановки задачи нетрудно заключить, что $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(y)$ — нечетные функции.

С другой стороны имеем

$$h\,\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx}=\frac{(3-\nu)(1+\nu)}{4\pi E}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau^{(1)}(t)}{t-x}\,dt-\frac{(1+\nu)^2}{4E\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta(\eta^2-x^2)}{(x^2+\eta^2)^2}\,\tau^{(2)}(\eta)\,d\eta$$

$$h\,\frac{dv^{(2)}(0,y)}{dy}=\frac{(3-\nu)(1+\nu)}{4\pi E}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau^{(2)}(\eta)}{\eta-y}\,d\eta-\frac{(1+\nu)^2}{4\pi E}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{t(t^2-y^2)}{(y^2+t^2)^2}\,\tau^{(1)}(t)\,dt$$

$$(-\infty<x,y<\infty)$$

где ν—коэффициент Пуассона материала пластины, а E—ее модуль упругости, $u^{(2)}(x,y)$, $v^{(2)}(x,y)$ —горизонтальные и вертикальные перемещения пластины соответственно.

Теперь, удовлетворив условиям контакта

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx}, \qquad -\infty<x<\infty$$

$$\frac{dv^{(1)}}{dy}(y)=\frac{dv^{(2)}}{dy}(0,y), \qquad -\infty<y<\infty$$

и имея в виду нечетность функции $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(y)$, получим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}\right)\tau^{(1)}(t)\,dt-\frac{2A}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\eta(\eta^2-x^2)}{(\eta^2+x^2)^2}\,\tau^{(2)}(\eta)\,d\eta=$$

$$=-\lambda_0\int\limits_0^{\infty}\Theta(t-x)\tau^{(1)}(t)\,dt+P\lambda_0\Theta(a-x)$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{\eta-y}+\frac{1}{\eta+y}\right)\tau^{(2)}(\eta)\,d\eta-\frac{2A}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{t(t^2-y^2)}{(t^2+y^2)^2}\,\tau^{(1)}(t)\,dt= \tag{1}$$

$$=-\lambda_0\int\limits_0^{\infty}\Theta(\eta-y)\tau^{(2)}(\eta)\,d\eta+Q\lambda_0\Theta(a-y)$$

где

$$A=\frac{1+\nu}{3-\nu}, \qquad \lambda_0=\frac{4Eh}{E_sF_s(3-\nu)(1+\nu)}$$

Таким образом, задача свелась к решению системы сингулярных интегральных уравнений (1). Решение системы уравнений (1) ищем в классе функций, равные нулю при нулевом значении аргумента и суммируемые на полуоси $[0, \infty)$. Для решения системы (1) сделаем замену переменных $x=ae^{v}$, $t=ae^{u}$, $\eta=a\cdot e^{u}$, $y=a\cdot e^{w}$, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1-e^{v-u}}+\frac{1}{1+e^{v-u}}\right)\tau^{(1)}(ae^{u})du-\frac{2A}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-e^{2(v-u)})}{(1+e^{2(v-u)})^{2}}\tau^{(2)}(ae^{u})du=$$

$$=-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\Theta(u-v)\tau^{(1)}(ae^{u})du+\lambda P_{1}\Theta(-v) \qquad (2)$$

$$(-\infty<v<\infty)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1-e^{w-u}}+\frac{1}{1+e^{w-u}}\right)\tau^{(2)}(ae^{u})du-\frac{2A}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-e^{2(w-u)})}{(1+e^{2(w-u)})^{2}}\tau^{(1)}(ae^{u})du=$$

$$=-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\Theta(u-w)\tau^{(2)}(ae^{u})du+\lambda Q_{1}\Theta(-w)$$

$$(-\infty<w<\infty)$$

где $\lambda=\lambda_{0}a,\qquad Q_{1}=\dfrac{Q}{a},\quad P_{1}=\dfrac{P}{a}.$

Применив к (2) преобразования Фурье, задачу сведем к решению системы функционально-разностных уравнений

$$\alpha\,\mathrm{cth}\frac{\pi\alpha}{2}\bar{\tau}^{(1)}(\alpha)+\frac{i\alpha(\alpha+i)A}{\mathrm{sh}\frac{\pi\alpha}{2}}\bar{\tau}^{(2)}(\alpha)+\lambda\bar{\tau}^{(1)}(\alpha-i)=\lambda P_{1} \qquad (3)$$

$$\alpha\cdot\mathrm{cth}\frac{\pi\alpha}{2}\bar{\tau}^{(2)}(\alpha)+\frac{i\alpha(\alpha+i)A}{\mathrm{sh}\frac{\pi\alpha}{2}}\bar{\tau}^{(1)}(\alpha)+\lambda\bar{\tau}^{(2)}(\alpha-i)=\lambda Q_{1}$$

$$(-1<\mathrm{Im}\,\alpha<0)$$

где

$$\bar{\tau}^{(k)}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{(k)}(ae^{u})e^{i\alpha u}du \qquad (k=1,2)$$

Сложив первое уравнение системы (3) со вторым, а затем высчитав из первого второе, получим два независимых функциональных уравнения

$$\bar{K}_{1}(\alpha)\bar{\varphi}_{1}(\alpha)+\lambda\bar{\varphi}_{1}(\alpha-i)=\lambda R_{1} \qquad (4)$$

$$\bar{K}_{2}(\alpha)\bar{\varphi}_{2}(\alpha)+\lambda\bar{\varphi}_{2}(\alpha-i)=\lambda R_{2} \qquad (5)$$

$$(-1<\mathrm{Im}\,\alpha<0)$$

где

$$R_1=P_1+Q_1, \qquad R_2=P_1-Q_1,$$

$$\overline{\varphi}_1(\alpha)=\overline{\tau}^{(1)}(\alpha)+\overline{\tau}^{(2)}\alpha, \quad \overline{\varphi}_2(\alpha)=\overline{\tau}^{(1)}(\alpha)-\overline{\tau}^{(2)}(\alpha),$$

$$\overline{K}_1(\alpha)=\frac{\alpha\left(\operatorname{ch}\frac{\pi\alpha}{2}+i(\alpha+i)A\right)}{\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{2}},$$

$$\overline{K}_2(\alpha)=\frac{\alpha\left(\operatorname{ch}\frac{\pi\alpha}{2}-i(\alpha+i)A\right)}{\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{2}}$$

Сначала рассмотрим уравнение (4) и его решение ищем в виде

$$\overline{\varphi}_1(\alpha)=\frac{i\Gamma(i\alpha)}{\operatorname{ch}\frac{\pi\alpha}{2}}\overline{T}_1(\alpha), \quad \overline{\varphi}_1(\alpha-i)=-\frac{\Gamma(1+i\alpha)}{\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{2}}\overline{T}_1(\alpha-i) \tag{6}$$

где $\Gamma(a)$—известная функция-гамма.

Подставив выражения $\overline{\varphi}_1(\alpha)$, $\overline{\varphi}_1(\alpha-i)$ из (6) в (4), получим функциональное уравнение

$$\overline{B}_1(\alpha)\overline{T}_1(\alpha)-i\overline{T}_1(\alpha-i)=iR_1\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{2}}{\Gamma(1+i\alpha)} \tag{7}$$

при условии

$$\overline{T}_1(-i)=0 \tag{8}$$

где

$$\overline{B}_1(\alpha)=\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi\alpha}{2}+i(\alpha+i)A}{\operatorname{ch}\frac{\pi\alpha}{2}}$$

Для решения (7), (8), рассмотрим функциональное уравнение

$$\overline{B}_1(\alpha)Y_1(\alpha-i)=Y_1(\alpha) \tag{9}$$

при условии

$$Y_1(-i)=1 \tag{10}$$

Решение уравнения (9) при условии (10) строится методом, изложенным в работах [1, 2], и имеет вид

$$Y_1(\alpha)=\exp\left[-\frac{i}{2}\int\limits_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}(\operatorname{cth}\pi(\alpha-s)+\operatorname{cth}\pi s)\ln\overline{B}_1(s)ds\right]$$

$$(-1<\operatorname{Im}\alpha<\tau<0)$$

Итак, мы представили $\overline{B}_1(\alpha)$ в виде

$$\overline{B}_1(\alpha)=\frac{Y_1(\alpha)}{Y_1(\alpha-i)}\quad(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)\tag{11}$$

Имея в виду (11) и разделив обе части уравнения (7) на $\operatorname{sh}\pi\alpha$, получим

$$\frac{Y_1(\alpha)\overline{T}_1(\alpha)}{\operatorname{sh}\pi\alpha}+\frac{\lambda Y_1(\alpha-i)\overline{T}_1(\alpha-i)}{\operatorname{sh}\pi(\alpha-i)}=\frac{\lambda R_1Y_1(\alpha-i)\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{2}}{\operatorname{sh}\pi\alpha\Gamma(1+i\alpha)}\tag{12}$$

Дале, применив к (12) обратное преобразование Фурье и имея в виду теорему Коши о вычетах, получим

$$F^{-1}\left[\frac{Y_1(\alpha)\overline{T}_1(\alpha)}{\operatorname{sh}\pi\alpha}\right]=\frac{\lambda R_1}{(1+\lambda e^u)}F^{-1}\left[\frac{Y_1(\alpha-i)\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{2}}{\Gamma(1+i\alpha)\operatorname{sh}\pi\alpha}\right]\tag{13}$$

где F—преобразование Фурье, а F^{-1} —обратное ему преобразование.

Теперь применив к (13) преобразования Фурье, при этом имея в виду теорему о свертке и, что

$$F\left[\frac{1}{1+\lambda e^u}\right]=-\frac{i\pi\lambda^{-i\alpha}}{\operatorname{sh}\pi\alpha}\qquad(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)$$

будем иметь

$$\overline{T}_1(\alpha)=-\frac{\lambda R_1 i}{2Y_1(\alpha)}\int\limits_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}(\operatorname{cth}\pi(\alpha-s)+\operatorname{cth}\pi s)\lambda^{-i(\alpha-s)}\ \frac{Y_1(s-i)\operatorname{sh}\frac{\pi s}{2}}{\Gamma(1+is)}\,ds$$

$$(-1<\operatorname{Im}\alpha<\tau<0)$$

Для дальнейшего определим значения $\overline{\varphi}_1(a)$ при $a=-i$, после чего получим

$$\overline{\varphi}_1(-i)=-\frac{R_1 i}{2}\int\limits_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\frac{\lambda^{is}Y_1(s-i)}{\Gamma(1+is)\operatorname{ch}\frac{\pi s}{2}\ \operatorname{sh}\pi s}\,ds$$

$$(-1<\tau<0)$$

Итак, мы определили $\overline{\varphi}_1(i\lambda)$, а тем самым и $\varphi_1(\ln z)=\tau^{(1)}(az)+$ $+\tau^{(2)}(az)$

$$\tau^{(1)}(az)+\tau^{(2)}(az)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\frac{i\Gamma(i\alpha)\overline{T}_1(\alpha)}{\operatorname{ch}\frac{\pi\alpha}{2}}z^{-i\alpha}\,d\alpha$$

$$(-1<\tau<0,\quad 0<t<\infty) \tag{14}$$

Заметим, что если $\overline{B}_1(\alpha)$ представить в виде

$$\overline{B}_1(\alpha)=\frac{\pi\overline{B}_1(-i)}{2(1+i\alpha)}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\left(\frac{\alpha+i}{\alpha_n+i}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{\alpha+i}{\overline{\alpha}_n-i}\right)^2\right)}{1+\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)^2} \tag{15}$$

$$\overline{B}_1(-i)=\left(1-\frac{2A}{\pi}\right),$$

то $Y_1(\alpha)$ из (9), (10) определится в виде

$$Y_1(\alpha)=\left(\frac{\pi}{2}\overline{B}_1(-i)\right)^{1-i\alpha}\Gamma(1+i\alpha)\overline{\Phi}_1(\alpha)$$

$$\tag{16}$$

$$\overline{\Phi}_1(\alpha)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(3-i\alpha-i\alpha_n)\Gamma(3-i\alpha+i\overline{\alpha}_n)\Gamma(2n+1+i\alpha)(1-i\alpha_n)^{2i\alpha-3}(1+i\overline{\alpha}_n)^{2i\alpha-3}}{\Gamma(i\alpha-i\alpha_n)\Gamma(i\alpha+i\overline{\alpha}_n)\Gamma(2n+2-i\alpha)(2n+1)^{2i\alpha-1}}$$

где α_n—нули функции $\overline{B}_1(\alpha)$, расположенные в порядке $0<\operatorname{Im}\alpha_n<\operatorname{Im}\alpha_{n+1}$ и $\operatorname{Re}\alpha_n>-1$ $(n=1,2,\ldots)$, а $\overline{\alpha}_n$—сопряженные с α_n и $\overline{B}_1(-\overline{\alpha}_n)=0$. Если корни мнимы, то вместо множителей в произведениях (15) и (16), соответствующих сопряженным корням, надо положить единицу. Известно, что α_1 положительно мнима $\operatorname{Im}\alpha_1>0$ [3]. Отметим также, что

$$|\alpha_n|=4n+0\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\quad\text{при}\quad n\to\infty$$

Поступая аналогичным образом, как это делалось выше, решение функционального уравнения (5) $\overline{\varphi}_2(\alpha)$ представится в виде (6), только здесь индексы один надо заменить индексами два, а в (16) под α_k надо понимать нули функции $\overline{B}_2(\alpha)$, Тогда

$$\tau^{(1)}(az)-\tau^{(2)}(az)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\frac{i\Gamma(i\alpha)\overline{T}_2(\alpha)}{\operatorname{ch}\frac{\pi\alpha}{2}}z^{-i\alpha}d\alpha \tag{17}$$

$$(-1<\tau<0,\quad 0<z<\infty)$$

Для получения асимптотических формул для функции $\varphi_1(x)=$ $=\tau^{(1)}(ax)+\tau^{(2)}(ax)$ при $x\to 0$ и $x\to\infty$, исследуем полюса аналитического продолжения функции $\overline{\varphi}_1(\alpha)$. Проще всего это сделать, обращаясь к уравнению (4) [4,5]. Сперва исследуем полюса функции $\bar{\varphi}_1(\alpha)$ (здесь и в дальнейшем под $\bar{\varphi}_1(\alpha)$ будем понимать и ее аналитическое продолжение) при $\operatorname{Im}\alpha\leqslant-1$. Так как $\bar{\varphi}_1(-i)$ конечна, то из (4) следует, что $\bar{\varphi}_1(-2i)=R_1$. Далее, поскольку $\bar{\varphi}_1(-2i)$ конечна, то, как следует из (4), $\alpha=-3i$ будет простым полюсом для $\bar{\varphi}_1(\alpha)$. Если $\alpha=-3i$ является простым полюсом, то $\alpha=-4i$ тоже будет таковым для $\bar{\varphi}_1(\alpha)$. Далее, поскольку $\alpha=-4i$ является простым полюсом для $\bar{\varphi}_1(\alpha)$, то $\alpha=-5i$ будет для $\bar{\varphi}_1(\alpha)$ двукратным полюсом (4). Из (4) следует также, что $\alpha=-6i$— двукратный полюс для $\bar{\varphi}_1(\alpha)$. Так продолжая, мы убедимся, что функция $\bar{\varphi}_1(\alpha)$ имеет при $\operatorname{Im}\alpha\leqslant-1$ полюса только в точках $\alpha=-i(2n+1)$, $\alpha=-i(2n+2)$ $(n=1,2,\ldots)$ с кратностями n.

Теперь исследуем полюса функции $\bar{\varphi}_1(\alpha)$ при $\operatorname{Im}\alpha\geqslant0$. Для этого заметим, что поскольку точки α_k, $-\bar{\alpha}_k$ $(k=1,2\ldots)$ -- нули функции $\bar{K}_1(\alpha)$, то из (4) следует, что они могут быть простыми полюсами функции $\bar{\varphi}_1(\alpha)$. Из (4) нетрудно заключить, что при этом точки $\alpha=\alpha_k+in$, $\alpha=-\bar{\alpha}_k+in$ $(n=1,2,\ldots)$ тоже могут быть простыми полюсами $\bar{\varphi}_1(\alpha)$. Значит функция $\bar{\varphi}_1(\alpha)$ при $\operatorname{Im}\alpha\geqslant0$ имеет полюса только в точках $\alpha=\alpha_k+in$, $\alpha=-\bar{\alpha}_k+in$ $(k=1,2,\ldots,\ n=0,1,2\ldots)$ и притом простые.

Так как определили аналитические свойства функции $\bar{\varphi}_1(\alpha)$, перейдем к вычислению интеграла в (14). Замыкая путь интегрирования сверху, получим формулу

$$\tau^{(1)}(az)+\tau^{(2)}(az)=iA_{-1}^{(\alpha_1)}z^{w}+iA_{-1}^{(\alpha_1)}\sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda)^n b_{nk}z^{n+w}+$$

$$+i\sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n b_{nk}z^{n-i\alpha_k}\right)A_{-1}^{(\alpha_k)}+\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n\bar{b}_{nk}z^{n+i\bar{\alpha}_k}\right)A_{-1}^{(-\bar{\alpha}_k)}\right] \tag{18}$$

$$\text{при}\quad 0\leqslant z<1$$

а замыкая снизу—формулу

$$\tau^{(1)}(az)+\tau^{(2)}(az)=-iA_{-1}^{(3)}z^{-3}-iA_{-1}^{(4)}z^{-4}-z^{-5}(iA_{-1}^{(5)}+A_{-2}^{(5)}\ln z)-$$

$$-z^{-6}(iA_{-1}^{(6)}+A_{-2}^{(6)}\ln z)+0\{z^{-7}(1+\ln z+\ln^2 z)\} \tag{19}$$

$$\text{при}\quad z\to\infty,$$

где
$$\alpha_1=i\omega\,(\omega>0),$$

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=\alpha_k}\bar{\varphi}_1(\alpha)=\operatorname{Res}\bar{\varphi}_1(\alpha_k)=A_{-1}^{(\alpha_k)},\quad \operatorname{Res}(\bar{\varphi}_1(-\bar{\alpha}_k))=A_{-1}^{(-\bar{\alpha}_k)}$$

$$\operatorname{Res}\varphi_1(\alpha_k+in)=(-\lambda)^n b_{nk}A_{-1}^{(\alpha_k)},\qquad \operatorname{Res}\varphi_1(-\bar{\alpha}_k+in)=(-\lambda)^n\tilde{b}_{nk}A_{-1}^{(-\bar{\alpha}_k)},$$

$$b_{nk}=\prod_{\rho=1}^{n}\frac{1}{K_1(\alpha_k+i\rho)},\quad \tilde{b}_{nk}=\prod_{\rho=1}^{n}\frac{1}{K_1(-\bar{\alpha}_k+i\rho)},$$

$$b_{0k}=\bar{b}_{0k}=1, \qquad A_{-1}^{(\alpha_1)}=-i\,\frac{2\lambda(R_1-\bar{\varphi}_1(\alpha_1-i)\sin\frac{\pi\omega}{2}}{\omega\left(\pi\sin\frac{\pi\omega}{2}+2A\right)},$$

$$A_{-1}^{(\alpha_k)}=\frac{2\lambda(R_1-\bar{\varphi}_1(\alpha_k-i)\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\alpha_k}{2}}{\alpha_k\left(\pi\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\alpha_k}{2}+2iA\right)}, \quad A_{-1}^{(-\bar{\alpha}_k)}=-\frac{\lambda\left(R_1-\bar{\varphi}_1(-\bar{\alpha}_k-i)\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\bar{\alpha}_k}{2}\right)}{\left(\pi\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\bar{\alpha}_k}{2}-2iA\right)\bar{\alpha}_k},$$

$$A_{-1}^{(k)}=\mathrm{Res}\,\bar{\varphi}_1(-ki) \qquad (k=3,4,5,6),$$

$$A_{-2}^{(k)}=\lim_{\alpha\to-ik}[(\alpha+ik)^2\bar{\varphi}_1(\alpha)] \qquad (k=5,6),$$

$$A_{-1}^{(3)}=\frac{4i(1-A)R_1}{\pi\lambda}, \quad A_{-1}^{(4)}=\frac{24i(1-A)AR_1}{\pi\lambda^2}, \quad A_{-1}^{(5)}=\frac{8i(1+3A)A_0^{(4)}}{\pi\lambda}-$$

$$-\frac{2(1+7A)A_{-1}^{(4)}}{\pi\lambda}, \qquad A_{-1}^{(6)}=-\frac{A_{-1}^{(5)}\bar{K}_1(-5i)}{\lambda}-\frac{A_{-2}^{(5)}}{\lambda}\frac{d\bar{K}_1(\alpha)}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=-5i};$$

$$A_{-2}^{(5)}=\frac{8i(1+3A)A_{-1}^{(4)}}{\pi\lambda}, \quad A_{-2}^{(6)}=-\frac{A_{-2}^{(5)}\bar{K}_1(-5i)}{\lambda},$$

$$A_0^{(4)}=\frac{d}{d\alpha}[(\alpha+4i)\bar{\varphi}_1(\alpha)]\bigg|_{\alpha=-4i}.$$

Отметим, что все вышеприведенные коэффициенты вычислены с помощью (4). Осталось вычислить $A_0^{(4)}$. После вычисления $A_0^{(4)}$ вычеты $A_{-1}^{(5)}$ и $A_{-1}^{(6)}$ будут даваться в конечном виде. Приступив к вычислению $A_0^{(4)}$, дифференцируем обе части равенства (4) и поставим $\alpha=-i$. Получим

$$A_1^{(2)}=-\frac{\bar{\varphi}_1(-i)}{\lambda}\frac{d}{d\alpha}\bar{K}_1(\alpha)\bigg|_{\alpha=-i},$$

где

$$A_1^{(2)}=\frac{d\bar{\varphi}_1(\alpha-i)}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=-i}=\frac{d\bar{\varphi}_1(\alpha)}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=-2i}$$

Далее, умножив обе части равенства (4) на $\alpha+ik$ $(k=2,3)$, после чего продифференцировав, положим $\alpha=-ik$ В итоге получим

$$A_0^{(3)}=\frac{1}{\lambda}\left(\lambda R_1-R_1\frac{d}{d\alpha}[(\alpha+2i)\bar{K}_1(\alpha)]_{\alpha=-2i}-A_1^{(2)}[\bar{K}_1(\alpha)(\alpha+2i)]_{\alpha=-2i}\right)$$

$$A_0^{(4)}=\frac{1}{\lambda}\left(\lambda R_1-\bar{K}_1(-3i)A_0^{(3)}-A_{-1}^{(3)}\frac{d}{d\alpha}K_1(\alpha)\bigg|_{\alpha=-3i}\right)$$

где

$$A_0^{(3)}=\frac{d}{d\alpha}[(\alpha+3i)\overline{\varphi}_1(\alpha)]_{\alpha=-3i}$$

Аналогичными рассуждениями, которые были сделаны выше, можно убедиться, что функция $\overline{\varphi}_2(\alpha)$ при $\mathrm{Im}\alpha\leqslant-1$ имеет те же полюса, что и $\overline{\varphi}_1(\alpha)$. При $\mathrm{Im}\alpha\geqslant0$ полюсами функции будут точки $\alpha=\beta_k+in$, $\alpha=-\overline{\beta}_k+in(k=1,2,\ldots,\ n=0,1\ldots)$, где β_k, $-\overline{\beta}_k$ — нули функции $\overline{K}_2(\alpha)$. Причем полюса функции $\overline{\varphi}_2(\alpha)$ имеют те же свойства, что и полюса $\overline{\varphi}_1(\alpha)$. Тогда асимптотические формулы для $\varphi_2(\ln z)$ будут иметь тот же вид, что и формулы (18), (19), только в этих формулах надо заменить α_k, $-\overline{\alpha}_k$ на β_k, $-\overline{\beta}_k$ соответственно, $\overline{K}_1(\alpha)$ на $\overline{K}_2(\alpha)$, а $\overline{\varphi}_1(\alpha)$ на $\overline{\varphi}_2(\alpha)$.

Таким образом, искомые интенсивности контактных напряжений и их асимптотические формулы можно получить элементарным образом, исходя из (14), (17) и (18), (19), что и требовалось при постановке задачи.

В частном случае одного горизонтального бесконечного стрингера, задача сводится к решению функционального уравнения

$$\alpha\,\mathrm{cth}\frac{\pi\alpha}{2}\overline{\tau}(\alpha)+\lambda\overline{\tau}(\alpha-i)=\lambda P_1\quad(-1<\mathrm{Im}\alpha<0)\tag{20}$$

где $\overline{\tau}(\alpha)=\overline{\tau}^{(1)}(\alpha)$.

Решение функционального уравнения (20) можно получить, если в (6) полагать, что $Y_1(\alpha)\equiv1$, то есть

$$\overline{\tau}(\alpha)=\frac{\lambda P_1}{2}\,\mathrm{sh}\frac{\pi\alpha}{2}\,\Gamma(i\alpha)\int\limits_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\frac{\lambda^{-i(\alpha-s)}}{\mathrm{sh}\pi(\alpha-s)\mathrm{ch}\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(1+is)}ds$$

$$(-1<\tau<0)$$

Отсюда, для $\overline{\tau}(-i)$ получим

$$\overline{\tau}(-i)=-\frac{iP_1}{2}\int\limits_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\frac{\lambda^{is}}{\mathrm{sh}\pi s\,\mathrm{ch}\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(1+is)}ds\quad(-1<\tau<0)$$

Здесь опять для исследования аналитических свойств функции $\overline{\tau}(\alpha)$ удобно пользоваться уравнением (20). Рассуждениями, аналогичными тем, которые были сделаны выше, легко убедиться, что только точки $\alpha=i(2n+1)$, $\alpha=-i(2k+1)$ $(n=0,1\ldots,\ k=1,2\ldots)$ являются полюсами функции $\overline{\tau}(\alpha)$ и притом простыми. Исходя из этого, можно получить следующие формулы для $\tau(ax)$:

$$\tau(ax)=i\sum_{n=0}^{\infty}B_{-1}^{(2n+1)}x^{2n+1}\quad(0<x<1)\tag{21}$$

$$\tau(\alpha x) = -i \sum_{k=1}^{m} A_{-1}^{(2k+1)} x^{-2k-1} + O(x^{-2m-3})$$

$$\text{при} \quad x \to \infty,$$

где $A_{-1}^{(2k+1)}$ и $B_{-1}^{(2n+1)}$ — вычеты функции $\overline{\varphi}_1(\alpha)$, соответствующие полюсам $\alpha = -i(2k+1)$, $\alpha = i(2n+1)$, соответственно, которые даются с помощью рекуррентных соотношений

$$B_{-1}^{(2n+1)} = \frac{2i\lambda}{\pi(2n+1)} \left(\frac{i\pi\lambda}{4n} B_{-1}^{(2n-1)} - P_1 \right) \quad (n=1,2,\ldots)$$

$$B_{-1}^{(1)} = \frac{2i\lambda}{\pi} (\overline{\tau}(0) - P_1), \qquad \overline{\tau}(0) = \frac{\lambda\pi}{2} (P_1 - \overline{\tau}(-i))$$

$$A_{-1}^{(2k+1)} = \frac{4ik}{\pi\lambda^2} \left(P_1 + i\pi\left(k - \frac{1}{2}\right) A_{-1}^{(2k-1)} \right) \quad (k=2,3\ldots)$$

$$A_{-1}^{(3)} = \frac{4iP_1}{\pi\lambda}$$

Тот факт, что в точке приложения силы в подобных задачах контактные напряжения имеют логарифмическую особенность, следует из (21) при $x \to 1$, поскольку $B_{-1}^{(2n+1)}$ при $n \to \infty$ имеет порядок $\frac{1}{n}$.

A PROBLEM FOR ELASTIC INFINITE PLATE, ARMED BY CROSS-FORMED INFINITE STRINGER

E. KCH. GRIGORYAN, D. R. TOROSYAN

ԽԱՉԱՁԵՎ, ԱՆՎԵՐՋ ՎԵՐԴՐԱԿՆԵՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ԱՆՎԵՐՋ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԱԼԻ ԽՆԴԻՐԸ

Է. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Դ. Ռ. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է անվերջ սալի և նրան ամրացված խաչաձև վերդրակների փոխազդեցության խնդիրը, երբ սալը ձգվում է անվերջում: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի ձևափոխությունների օգնությամբ: Ստացված են խնդրի փակ լուծումը և կոնտակտային լարումների ասիմպտոտիկ բանաձևերը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Koiter W. T.* On the diffusion of loed from a stiffener into a sheet. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1955, vol. 8, № 2.
2. *Григорян Э. X.* Решение задачи упругого конечного включения, выходящего на границу полуплоскости.—Уч. записки ЕГУ, естеств. науки, 1981, № 3.

3. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости.—М.: Наука, 1981.
4. *Григорян Э. Х.* Об одном подходе к решению задач для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение, выходящее на границу полуплоскости.—Межвуз. сб. науч. трудов, Механика, Ереван, изд. ЕГУ, 1987, № 6.
5. *Григорян Э. Х.* О решении контактной задачи для упругой полуплоскости, граница которой усилена двумя полубесконечными накладками.—Межвуз. сб. науч. трудов, Механика, Ереван, изд. ЕГУ, 1991, № 8.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
5.11.1992