ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մեխանիկա 46, № 3–4, 1993 Механика

О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЕЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ

ГАСПАРЯН А. Е., ХАЧАТРЯН А. А.

Рассматривается свободное продольное колебание стержней с переменными поперечными сечениями. Решены два примера с различными законами изменения площадей поперечных сечений стержней. Показано, что при продольном возмущении стержней переменного поперечного сечения происходит такое движение частиц стержня, что говорить о периоде колебания не приходится.

Стержень переменного поперечного сечения, совершающий свободные продольные колебания, описывается следующим дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{F'(x)}{F(x)}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

Здесь $u(x,t)$—продольное перемещение точки стержня с координатой x в момент времени t; $F(x)$ —площадь поперечного сечения стержня

$$a=\sqrt{E/\rho} \tag{2}$$

E, ρ—модуль упругости и плотность материала стержня.

Для решения конкретных примеров к уравнению (1) присоединяются необходимые граничные и начальные условия.

Ниже приводятся решения двух конкретных примеров, отличающихся друг от друга лишь законами изменения площадей поперечных сечений стержней. В обоих случаях рассматриваются свободные продольные колебания стержня длины l, один конец которого ($x=0$) закреплен, а другой ($x=l$) свободен. Пусть стержень растянут продольной силой P, приложенной к свободному концу, и в момент времени $t=0$ при внезапном освобождении совершает колебательное движение.

I. В качестве первого примера рассмотрим случай, когда

$$F(x)=F_0\exp\left(-\frac{x}{l}\ln k\right) \tag{1.1}$$

где k есть отношение площадей закрепленного конца к свободному.

В этом случае нетрудно найти, что

$$u(x,0)=\frac{Pl}{EF_0\ln k}\left(\exp\left(\frac{x}{l}\ln k\right)-1\right) \tag{1.2}$$

и при этом для данной задачи будем иметь следующие граничные и начальные условия:

1) при $x=0$ $u=0$ 3) при $t=0$ $u=\frac{Pl}{EF_0 \ln k}\left(\exp\left(\frac{x}{l}\ln k\right)-1\right)$

2) при $x=l$ $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ 4) при $t=0$ $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ (1.3)

В силу (1.1) уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\ln k}{l}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

Методом разделения переменных ($u(x,t)=X(x)T(t)$) из (1.4) получаем

$$\frac{a^2}{X}\left(X''-\frac{\ln k}{l}X'\right)=\frac{T''}{T}=-\omega^2 \tag{1.5}$$

или

$$\begin{cases} T''+\omega^2 T=0 \\ X''-\frac{\ln k}{l}X'+\frac{\omega^2}{a^2}X=0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$\begin{gathered} T=A\cos\omega t+B\sin\omega t \\ X=\exp\left(\frac{x}{l}\ln\sqrt{k}\right)\left(C\sin\frac{\xi x}{l}+D\cos\frac{\xi x}{l}\right) \end{gathered} \tag{1.7}$$

где

$$\xi=\sqrt{\frac{\omega^2 l^2}{a^2}-\ln^2\sqrt{k}} \tag{1.8}$$

В силу условий 1) и 4) из (1.3) имеем $B=D=0$ и частное решение уравнения (1.4) принимает вид

$$u(x,t)=A\exp\left(\frac{x}{l}\ln\sqrt{k}\right)\sin\frac{\xi x}{l}\cos\omega t$$

При удовлетворении второго условия (1.3) приходим к следующему трансцендентному уравнению $\mathrm{tg}\,\xi=-\xi/\ln\sqrt{k}$ относительно ξ. Это уравнение имеет неограниченное количество положительных и отрицательных корней. Интересующие нас положительные корни находятся в следующих интервалах:

$$(2n-1)\frac{\pi}{2}<\xi_n<n\pi \quad (n=1,2,\ldots) \tag{1.9}$$

но расположены они гораздо ближе к левому краю и при больших значениях n практически не отличаются от левого значения (1.9).

Таким образом, общее решение уравнения (1.4) представится в виде

$$u(x,t)=\exp\left(\frac{x}{l}\ln\sqrt{k}\right)\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\xi_n x}{l}\cos\omega_n t \tag{1.10}$$

где

$$\omega_n=\frac{a}{l}\sqrt{\xi_n^2+\ln^2\sqrt{k}} \tag{1.11}$$

и ξ_n есть положительные корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}\xi_n=-\xi_n/\ln\sqrt{k} \tag{1.12}$$

Удовлетворив теперь третьему условию (1.3), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\xi_n x}{l}=\frac{2Pl}{EF_0\ln\sqrt{k}}\operatorname{sh}\frac{x\ln\sqrt{k}}{l} \tag{1.13}$$

Для определения величин A_n следует учесть, что функции $\sin\frac{\xi_n x}{l}$ ортогональны в интервале $(0,l)$, то есть

$$\int_0^l\sin\frac{\xi_n x}{l}\sin\frac{\xi_m x}{l}dx=\begin{cases}\left(1-\frac{\sin 2\xi_n}{2\xi_n}\right)\frac{l}{2} & \text{при } m=n\\ 0 & \text{при } m\neq n\end{cases} \tag{1.14}$$

После определения величин A_n и некоторых преобразований решение рассматриваемой задачи можно представить в виде

$$u(x,t)=\frac{2Pl\sqrt{k}}{EF_0}\exp\left(\frac{x}{l}\ln\sqrt{k}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\xi_n}{\ln\sqrt{k}+\ln^2\sqrt{k}+\xi_n^2}\sin\frac{\xi_n x}{l}\cos\omega_n t \tag{1.15}$$

Принимая здесь $\kappa=1$, получим известное решение рассмотренной задачи для стержня постоянного поперечного сечения [1]

$$u(x,t)=\frac{8Pl}{\pi^2 EF_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{2n-1}{2l}\pi x\cos\frac{2n-1}{2l}\pi at \tag{1.16}$$

2. В качестве второго примера рассмотрим случай, когда

$$F(x)=F_0\cos^2\frac{\alpha x}{l},\quad \alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{k}} \tag{2.1}$$

где, как и в первом примере, $k>1$ есть отношение площадей закрепленного конца к свободному.

В силу (2.1) уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{2\alpha}{l}\operatorname{tg}\frac{\alpha x}{l}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.2}$$

Граничные и начальные условия 1), 2) и 4) в (1.3) остаются те же, а начальное условие 3), естественно, заменяется следующим:

$$u(x,0)=\frac{Pl}{\alpha EF_0}\operatorname{tg}\frac{\alpha x}{l} \qquad (2.3)$$

После разделения переменных из (2.2) получим

$$\begin{cases} T''+\Omega T=0 \\ X''-\frac{2\alpha}{l}\operatorname{tg}\frac{\alpha x}{l}X'+\frac{\Omega^2}{a^2}X=0 \end{cases} \qquad (2.4)$$

Второе уравнение (2.4) можно представить в виде

$$\left(X\cos\frac{\alpha x}{l}\right)''+\frac{\gamma^2}{l^2}X\cos\frac{\alpha x}{l}=0, \quad \gamma^2=\frac{\Omega^2 l^2}{a^2}+\alpha^2 \qquad (2.5)$$

и поэтому общие решения уравнений (2.4) имеют вид

$$T=A\cos\Omega t+B\sin\Omega t$$

$$X=\left(C\sin\frac{\gamma x}{l}+D\cos\frac{\gamma x}{l}\right)\Big/\cos\frac{\alpha x}{l} \qquad (2.6)$$

Поступая аналогично первому примеру и удовлетворив условиям 1), 2) и 4) в (1.3) для общего решения уравнения (2.2), получим

$$u(x,t)=\frac{1}{\cos\frac{\alpha x}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\gamma_n x}{l}\cos\Omega_n t \qquad (2.7)$$

где

$$\Omega_n=\frac{a}{l}\sqrt{\gamma_n^2-\alpha^2} \qquad (2.8)$$

и γ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}\gamma_n=-\gamma_n/\alpha\sqrt{k-1} \qquad (2.9)$$

Удовлетворив теперь начальному условию (2.3), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\gamma_n x}{l}=\frac{Pl}{\alpha EF_0}\sin\frac{\alpha x}{l} \qquad (2.10)$$

Пользуясь тем, что функции $\sin\frac{\gamma_n x}{l}$ ортогональны в интервале $(0,l)$, после определения величин C_n и некоторых преобразований, решение рассматриваемой задачи представим в виде

$$u(x,t)=\frac{2Pl\sqrt{k}}{EF_0\cos\frac{\alpha x}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\gamma_n^2+\alpha^2(k-1)]\sin\gamma_n}{(\gamma_n^2-\alpha^2)[\alpha\sqrt{k-1}+\alpha^2(k-1)+\gamma_n^2]}\sin\frac{\gamma_n x}{l}\cos\Omega_n t \qquad (2.11)$$

Здесь также, принимая $k=1$ $(\alpha=0)$, получим указанное вышеизвестное решение (1.16).

3. Ниже приведем значения первых нескольких корней ξ_n и γ_n трансцендентных уравнений (1.12) и (2.9), а также соответствующие им значения $\omega_n l/a$ и $\Omega_n l/a$, для двух значений k: $k=2$ (табл. 1) и $k=10$ (табл. 2).

Табл. 1.

n	ξ_n	$\omega_n l/a$	γ_n	$\Omega_n l/a$
1	1,7647	1,7984	1,9531	1,7882
2	4,7846	4,7971	4,8722	4,8085
3	7,8879	7,8955	7,9525	7,9136
4	11,0250	11,0304	11,0665	11,0386
5	14,1616	14,1658	14,1925	14,1708
6	17,2988	17,3023	17,3240	17,3062

Табл. 2.

n	ξ_n	$\omega_n l/a$	γ_n	$\Omega_n l/a$
1	2,0769	2,3747	2,5450	2,2174
2	4,9413	5,0737	5,3255	5,1769
3	7,9970	8,0794	8,2781	8,1833
4	11,0990	11,1586	11,3154	11,2462
5	14,2181	14,2646	14,3919	14,3376
6	17,3451	17,3833	17,4898	17,4451

Рассматривая полученные решения (1.15) и (2.11), нетрудно заметить, что они принципиально отличаются от соответствующего решения (1.16), полученного для стержня постоянного поперечного сечения.

Дело в том, что перемещения точек стержня постоянного поперечного сечения в аналогичных задачах происходят синхронно и с определенным периодом времени. А именно, как видно из (1.16), в момент времени $t=t_0=l/a$, когда упругая волна пробегает всю длину стержня, перемещения всех точек стержня обращаются в нуль. С этого момента все сечения стержня продолжают свое движение в сторону отрицательных перемещений и в момент времени $t=2t_0$, когда упругая волна от конца $x=0$ доходит до конца $x=l$, принимают свои наиболее сжатые положения и т. д. Таким образом, здесь происходит четкое колебательное движение с периодом колебания, равным $4t_0=4l/a$.

Отметим, что указанная синхронность движения частиц имеет место также и для стержней постоянного поперечного сечения, изготовленных из разномодульного материала [2].

Приведем значение перемещения концевого сечения $x=l$ в момент $t=l/a$ для первого примера

$$u(l,l/a)=\frac{2Plk}{EF_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n^2\cos\frac{\omega_n l}{a}}{(\ln^2\sqrt{k}+\xi_n^2)(\ln\sqrt{k}+\ln^2\sqrt{k}+\xi_n^2)} \tag{3.1}$$

Здесь нетрудно установить, что для практически допустимых значений κ, $\omega_n l/a$, аналогично ξ_n, удовлетворяет неравенству (1.9). Следовательно, ряд в (3.1) является знакопеременным с монотонно убывающими по величине членами и так как первый член отрицателен, то и вся сумма ряда будет меньше нуля, то есть $u(l,l/a)<0$. Это говорит о том, что концевое сечение $x=l$ приходит к своему нулевому положению раньше, чем упругая волна проходит всю длину стержня. Если удастся нам найти время прихода концевого сечения к своему нулевому положению, то все равно очевидно, что другие сечения за это время не придут к своим нулевым положениям.

Анализ показывает, что аналогичное явление имеет место и во втором примере.

Из приведенного выше заключаем, что для стержней переменного поперечного сечения отсутствует синхронность движения частиц. Хотя перемещение любого сечения в любой момент времени можно определить полученными выше формулами, однако говорить здесь о периоде колебания не приходится.

ON THE LONGITUDINAL VIBRATIONS OF BEAMS WITH VARIABLE TRANSVERSE SECTIONS

A. E. GASPARIAN, A. A. KHACHATRIAN

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՆԵՐՈՎ ՁՈՂԵՐԻ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ե. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ, Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է փոփոխական կտրվածքով ձողերի երկայնական ազատ տատանումների խնդիրը։ Բերված են երկու դեպքերի համար լուծումներ, որոնք տարբերվում են մեկը մյուսից ընդլայնական կտրվածքների փոփոխության օրինաչափությամբ։ Ցույց է տրված, որ փոփոխական կտրվածքի դեպքում տատանումները անկանոն բնույթ են կրում և տատանման պարբերությունը պարզապես բացակայում է։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле.—М.: Физматгиз, 1959. 440 с.
2. *Хачатрян А. А.* О продольных колебаниях призматических стержней, изготовленных из разномодульного материала.—Инж. журнал. МТТ, №5. 1967.

Институт Механики
АН Армении

Поступила в редакцию
20.08.1992