ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մեխանիկա 46, № 3—4, 1993 Механика

ИЗГИБ ДВУХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ БАЛОК, ЛЕЖАЩИХ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

ГРИГОРЯН Э. Х.

В работе рассматривается задача об изгибе двух полубесконечных балок, лежащих на упругой полуплоскости, когда на концах балок приложены сила и момент. Как обычно, исследование ведется без учета касательных контактных напряжений и без учета явления отрыва балок от упругой полуплоскости. Задача сводится к решению функциональных уравнений Винера-Хопфа, не допускающих замкнутого решения, а затем к квазивполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, относительно вычетов трансформантов Фурье четной и нечетной частей интенсивности контактных нормальных напряжений.

Пусть на границе упругой полуплоскости лежат две полубесконечные балки с жесткостью D, к концам которых приложены силы $Q^{(-a)}$, $Q^{(a)}$ и моменты $M^{(-a)}$, $M^{(a)}$. Наша цель определить контактные нормальные напряжения, действующие на участках контакта балок с границей полуплоскости.

Отметим, что решение поставленной задачи можно было бы получить методом, предложенным в [1] при решении задачи рассматриваемого рода, при котором контактные напряжения можно выразить через деформации промежуточного интервала между балками, а деформацию определить из сингулярного интегрального уравнения первого рода, которое можно сводить с помощью ортогональных многочленов Чебышева к квазивполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Однако, мы будем пользоваться методом, предложенным в [2, 3], который дает возможность свести задачу к квазивполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно вычетов трансформантов Фурье четной и нечетной частей интенсивности контактных напряжений и, тем самым, определить контактные напряжения непосредственно. При этом ядра бесконечных систем и интенсивность контактных напряжений имеют простую структуру.

Дифференциальные уравнения балок имеют вид:

$$D\frac{d^4v^{(1)}}{dx^4}=q(x),\quad -\infty<x<-a,$$

при условии

$$D\frac{dv^{(1)}}{dx}\bigg|_{x=-a-0}=X^{(-a)},\quad D\frac{d^2v^{(1)}}{dx^2}\bigg|_{x=-a-0}=M^{(-a)},\quad D\frac{d^3v^{(1)}}{dx^3}\bigg|_{x=-a-a}=Q^{(-a)},$$

$$\frac{dv^{(1)}}{dx}\to 0 \quad \text{при} \quad x\to-\infty,$$

и

$$D\frac{d^4v^{(1)}}{dx^4}=q(x), \quad a<x<\infty,$$

при условии

$$D\frac{dv^{(1)}}{dx}\bigg|_{x=a+0}=X^{(a)}, \quad D\frac{d^2v^{(1)}}{dx^2}\bigg|_{x=a+0}=M^{(a)}, \quad D\frac{d^3v^{(1)}}{dx^3}\bigg|_{x=a+0}=-Q^{(a)},$$

$$\frac{dv^{(1)}}{dx}\to 0 \quad \text{при} \quad x\to+\infty,$$

где $v^{(1)}(x)$—вертикальные перемещения точек балок, $X^{(\pm a)}$—неизвестные постоянные, $q(x)$—интенсивность контактных напряжений.

Введем функцию

$$V(x)=\Theta(-x-a)\frac{dv^{(1)}}{dx}+\Theta(x-a)\frac{dv^{(1)}}{dx}, \quad (-\infty<x<\infty)$$

Тогда уравнения равновесия балок с концевыми условиями можно записать одним уравнением

$$D\frac{d^3V}{dx^3}=q_0(x)-X^{(-a)}\delta''(x+a)+X^{(a)}\delta''(x-a)-$$

$$-M^{(-a)}\delta'(x+a)+M^{(a)}\delta'(x-a)-Q^{(-a)}\delta(x+a)-Q^{(a)}\delta(x-a) \qquad (1)$$

где $q_0(x)=\Theta(-x-a)q(x)+\Theta(x-a)q(x)$, $\Theta(x)$—функция Хевисайда.

Не останавливаясь на подробностях, отметим, что решение уравнения (1) имеет вид

$$V(x)=\frac{1}{4D}\int_{-\infty}^{\infty}(x-s)|x-s|q_0(s)ds-$$

$$-\frac{1}{4D}[Q^{(-a)}(x+a)|x+a|+Q^{(a)}(x-a)|x-a|+2M^{(-a)}|x+a|+$$

$$+2M^{(a)}|x-a|+2X^{(-a)}\operatorname{sgn}(x+a)-2X^{(a)}\operatorname{sgn}(x-a)] \qquad (2)$$

С другой стороны известно, что [4]

$$V(x)+[\Theta(x+a)-\Theta(x-a)]\frac{\partial v(x,0)}{\partial x}=-\frac{(1-\nu)}{\mu\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q_0(s)}{s-x}ds \qquad (3)$$

где $v(x,0)$—вертикальные перемещения граничных точек полуплоскости, ν, μ—соответственно коэффициент Пуассона и модуль сдвига материала полуплоскости.

Выше (3) имелось в виду условие контакта

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial x}=V(x) \quad (|x|>a)$$

Отметим, что условия равновесия балки ($|x|>a$) имеют вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_0(s)ds=Q^{(-a)}+Q^{(a)}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} sq_0(s)ds=M^{(a)}-M^{(-a)}+a(Q^{(a)}-Q^{(-a)}) \tag{4}$$

Далее $q_0(x)$ и $\partial v(x,0)/\partial x$ представим в виде суммы своих четных и нечетных частей, то есть

$$q_0(x)=q_0^{(1)}(x)+q_0^{(2)}(x), \quad \frac{\partial v(x,0)}{\partial x}=W_1(x)+W_2(x)$$

где

$$q_0^{(i)}(x)=[\Theta(x-a)+\Theta(-x-a)]q_i(x) \quad (i=1,2)$$
$$q_1(-x)=-q_1(x), \quad q_2(-x)=q_2(x) \tag{5}$$
$$W_1(-x)=-W_1(x), \quad W_2(-x)=W_2(x)$$

Подставляя (5) в (3), и отделяя четные и нечетные части, после учета условия $V(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$, при $0<x<\infty$ получим

$$\frac{1-\nu}{\mu\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{s-x}+\frac{1}{s+x}\right)q_1^+(s)ds=-V_2^+(x)-W_2^-(x)$$

$$\frac{1-\nu}{\mu\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{s+x}\right)q_2^+(s)ds=-V_1^+(x)-W_1^-(x) \tag{6}$$

$$(0<x<\infty)$$

где

$$q_k^+(x)=\Theta(x-a)q_k(x), \quad W_k^-(x)=\Theta(a-x)W_k(x)$$
$$V_k^+(x)=\Theta(x-a)V_k(x), \quad (k=1,2)$$

$$V_k(x)=-\frac{1}{2D}\int_a^{\infty}(s-x)^2\Theta(s-x)q_k(s)ds, \quad (a<x<\infty)$$

Заметим, как это следует из (4), что

$$\int_a^{\infty} q_1(s)ds=\frac{Q^{(a)}-Q^{(-a)}}{2}$$

$$\int_a^\infty s q_2(s)ds = a\frac{Q^{(a)}-Q^{(-a)}}{2}+\frac{M^{(a)}-M^{(-a)}}{2} \tag{7}$$

$$\int_a^\infty q_1(s)ds=\frac{Q^{(a)}+Q^{(-a)}}{2},\quad \int_a^\infty s q_1(s)ds=a\frac{Q^{(a)}+Q^{(-a)}}{2}+\frac{M^{(a)}+M^{(-a)}}{2} \tag{8}$$

Теперь в (6) сделаем замену переменных $x=ae^v$, $s=ae^u$, получим

$$\frac{1-\nu}{\mu\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1-e^{v-u}}+\frac{1}{1+e^{v-u}}\right)P_1^+(u)du=$$

$$=-\Theta(v)V_2(ae^v)-W_2^-(ae^v), \tag{9}$$

$$\frac{1-\nu}{\mu\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1-e^{v-u}}-\frac{1}{1+e^{v-u}}\right)P_2^+(u)du=$$

$$=-\Theta(v)V_1(ae^v)-W_1^-(ae^v)$$

где

$$P_k^+(u)=q_k^+(ae^u)=\Theta(u)q_k(ae^u)$$

$$W_k^-(ae^v)=\Theta(-v)W_k(ae^v)\quad (k=1,2)$$

Далее, применив к (9) преобразования Фурье, при этом имея в виду теорему о свертке, после некоторых преобразований получим

$$\operatorname{cth}\frac{\pi\alpha}{2}\overline{P}_1^+(\alpha)+\lambda\frac{\overline{P}_1^+(\alpha-3i)}{\alpha(\alpha-i)(\alpha-2i)}=\overline{g}_2^-(\alpha) \tag{10}$$

$$\operatorname{th}\frac{\pi\alpha}{2}\overline{P}_2^+(\alpha)+\lambda\frac{\overline{P}_2^+(\alpha-3i)}{\alpha(\alpha-i)(\alpha-2i)}=\overline{g}_1^-(\alpha) \tag{11}$$

где

$$\overline{g}_k^-(\alpha)=-\frac{i\mu}{1-\nu}\overline{W}_k^-(\alpha)-\frac{\lambda\overline{P}_k^+(-3i)}{\alpha}+\frac{\lambda\overline{P}_k^+(-2i)}{\alpha-i}-$$

$$-\frac{\overline{P}_k^+(-i)}{\alpha-2i},\quad \lambda=\frac{\mu a^2}{D(1-\nu)},\quad (k=1,2)$$

Функции $\overline{P}_k^+(\alpha)$, $\overline{W}_k^-(\alpha)$ являются преобразованиями Фурье функций $P_k^+(u)$, $W_k^-(u)$ соответственно. Причем $\overline{P}_k^+(\alpha)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha>-1$, а $\overline{W}_k^-(\alpha)$ — при $\operatorname{Im}\alpha<0$. Кроме того, как известно [5], $P_k^+(u)\sim u^{-\frac{1}{2}}$ при $u\to+0$, $W_k^-(u)\sim|u|^{-\frac{1}{2}}$ при $u\to-0$. Отсюда следует, что $\overline{P}_k^+(\alpha)\sim$ $\sim\alpha^{-\frac{1}{2}}$, $\overline{g}_k^-(\alpha)\sim\alpha^{-\frac{1}{2}}$ при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности.

Заметим, что условия (7), (8) можно записать в виде

$$\overline{P}_1^+(-i)=\frac{Q^{(a)}-Q^{(-a)}}{2}, \quad \overline{P}_1^+(-2i)=a\frac{Q^{(a)}-Q^{(-a)}}{2}+\frac{M^{(a)}-M^{(-a)}}{2} \quad (12)$$

$$\overline{P}_2^+(-i)=\frac{Q^{(a)}+Q^{(-a)}}{2}, \quad \overline{P}_2^+(-2i)=a\frac{Q^{(a)}+Q^{(-a)}}{2}+\frac{M^{(a)}+M^{(-a)}}{2} \quad (13)$$

Таким образом, задача свелась к решению функционального уравнения (10) при условии (12), и уравнения (11)—при условии (13).

Для определенности рассмотрим функциональное уравнение (10) при условии (12). Исследуем аналитические свойства функции $\overline{P}_1^+(\alpha)$. Для этого вспомним, что $\overline{P}^+(\alpha)$ регулярна при $\mathrm{Im}\alpha>-1$, а $\overline{g}_2^-(\alpha)$ при $\mathrm{Im}\alpha<0$, и заметим, что левая и правая части равенства (10) являются аналитическими продолжениями друг друга. Теперь рассмотрим аналитическое продолжение функции $\overline{P}_1^+(\alpha)$ в дополнении области $\mathrm{Im}\alpha>-1$ и с помощью уравнения (10) выявим ее свойства. Поскольку $\overline{P}_1^+(-i)$ и $\overline{g}_2^-(-i)$ конечны, то, как следует из (10), конечна и $\overline{P}_1^+(-4i)$. Из конечности $\overline{P}_1^+(-2i)$ и $\overline{g}_2^-(-2i)$ следует, что $\alpha=-5i$ является простым полюсом для $\overline{P}_1^+(\alpha)$ (здесь под $\overline{P}_1^+(\alpha)$ понимается ее аналитическое продолжение). Так как $\overline{P}_1^+(-3i)$ и $\overline{g}_2^-(-3i)$ конечны, то конечна и $\overline{P}_1^+(-6i)$ (10). Так как $\overline{P}_1^+(-4i)$ и $\overline{g}_2^-(-4i)$ конечны, то отсюда следует (10), что $\alpha=-7i$ может быть простым полюсом для аналитического продолжения функции $\overline{P}_1^+(\alpha)$. Так продолжая, мы убедимся, что полюсами аналитического продолжения функций $\overline{P}_1^+(\alpha)$ могут быть только точки $\alpha=-i(2n+3)$ $(n=1, 2...)$ и притом простые.

Теперь приступим к решению функционального уравнения (10) при условии (12) с помощью метода Винера-Хопфа [6], предполагая $\overline{P}_1^+(\alpha-3i)$ известным. Для этого факторизуем $\mathrm{cth}\frac{\pi\alpha}{2}$, представив ее в виде

$$\mathrm{cth}\frac{\pi\alpha}{2}=\overline{K}^+(\alpha)\overline{K}^-(\alpha) \quad (14)$$

где

$$\overline{K}^+(\alpha)=\sqrt{2}\,\frac{\Gamma\left(1-\frac{i\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{i\alpha}{2}\right)}, \quad \overline{K}^-(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{\alpha}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{i\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{i\alpha}{2}\right)}$$

$\Gamma(z)$ — известная гамма-функция.

Очевидно, что $\overline{K}^+(\alpha)$ регулярна при $\mathrm{Im}\alpha>-1$ и там не имеет нулей, а $\overline{K}^-(\alpha)$ регулярна при $\mathrm{Im}\alpha<0$ и там не имеет нулей. Кроме того, $K^+(\alpha)\sim\alpha^{\frac{1}{2}}$ при $|\alpha|\to\infty$ в своей области регулярности, а $\overline{K}^-(\alpha)\sim$ $\sim\alpha^{-\frac{1}{2}}$ при $\operatorname{Im}\alpha<0$ и $|\alpha|\to\infty$.

Имея в виду (14), уравнение (10) запишем в виде

$$\overline{K}^+(\alpha)\overline{P}_1^+(\alpha)+\lambda\frac{\overline{P}_1^+(\alpha-3i)}{\alpha(\alpha-i)(\alpha-2i)\overline{K}^-(\alpha)}=\frac{\overline{g}_2^-(\alpha)}{\overline{K}^-(\alpha)}$$

$$(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)$$

Далее

$$\frac{\overline{P}_1^+(\alpha-3i)}{\alpha(\alpha-i)(\alpha-2i)\overline{K}^-(\alpha)}=\overline{\varphi}_1(\alpha)=\overline{\varphi}_1^+(\alpha)+\overline{\varphi}_1^-(\alpha)$$

где

$$\overline{\varphi}_1^+(\alpha)=\int\limits_0^\infty\Phi_1(u)e^{i\alpha u}du,\quad \overline{\varphi}_1^-(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^0\Phi_1(u)e^{i\alpha u}du$$

$$\Phi_1(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\overline{\varphi}_1(\alpha)e^{-i\alpha u}d\alpha,\quad -1<\tau<0,$$

$\overline{\varphi}_1^+(\alpha)$ — регулярна при $\operatorname{Im}\alpha>-1$, а $\overline{\varphi}_1^-(\alpha)$ — при $\operatorname{Im}\alpha<0$. Кроме того, поскольку $\Phi_1(u)$ и $d\Phi_1(u)/du$ ограничены при $u\to0$, то отсюда следует, что $\overline{\varphi}_1^\pm(\alpha)=\frac{i}{\alpha}\,\overline{\varphi}_1(0)+O(\alpha^{-2})$ при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности. Нетрудно видеть что аналитическое продолжение функции $\overline{\varphi}_1^+(\alpha)$ при $\operatorname{Im}\alpha\leqslant-1$ имеет полюса только в точках $\alpha=-2in\,(n=1,2\ldots)$ и притом простые. Отсюда следует, что $\overline{\varphi}_1^+(\alpha)$ можно представить в виде разложения по простейшим дробям

$$\overline{\varphi}_1^+(\alpha)=\frac{1}{4i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{-1}^{(2n+3)}}{n(n+1)(2n+1)(\alpha+2in)\overline{K}^-(-2in)}\tag{15}$$

где

$$A_{-1}^{(2n+3)}=\operatorname*{Res}_{\alpha=-i(2n+3)}\overline{P}_1^+(\alpha)=\operatorname*{Res}_{\alpha=-2in}\overline{P}_1^+(\alpha-3i),\quad n=1,2\ldots$$

Следовательно, можно записать

$$\overline{K}^+(\alpha)\overline{P}_1^+(\alpha)+\lambda\overline{\varphi}_1^+(\alpha)=\overline{g}_2^-(\alpha)[\overline{K}^-(\alpha)]^{-1}-\lambda\overline{\varphi}_1^-(\alpha)\tag{16}$$

Имея в виду асимптотические свойства функций $\overline{K}^\pm(\alpha)$, $\overline{P}_1^+(\alpha)$, $\overline{g}_2^-(\alpha)$, $\overline{\varphi}_1^\pm(\alpha)$, о чем говорилось выше, в силу теоремы об аналитическом продолжении и теоремы Лиувилля, будем иметь (16)

$$\overline{P}_1^+(\alpha)+\lambda\frac{\overline{\Phi}_1^+(\alpha)}{K^+(\alpha)}=\frac{a_0}{K^+(\alpha)} \tag{17}$$

$$\frac{\overline{g_2}(\alpha)}{K^-(\alpha)}-\lambda\overline{\Phi}_1^-(\alpha)=a_0$$

Постоянная α_0 определяется от первого из условий (12).

Далее будем останавливаться на исследовании $\overline{P}_1^+(\alpha)$.

Так как $\alpha=-i(2n+3)(n=1,2...)$ являются простыми полюсами функции $\overline{P}_1^+(\alpha)$, то из (15) и (17) получим

$$A_{-1}^{(2m+3)}+\frac{\lambda}{4\pi}\overline{K}^-(-i(2m+3))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{-1}^{(2n+3)}}{n(n+1)(2n+1)\left(m+\frac{3}{2}-n\right)\overline{K}^-(-2in)}=$$

$$=\frac{2}{\pi}a_0\overline{K}^-(-i(2m+3)),\quad m=1,2,... \tag{18}$$

Поскольку

$$\lambda A_{-1}^{(5)}=-\frac{12i}{\pi}\overline{P}_1^+(-2i)$$

которое легко получить из (10), то бесконечную систему (18) можно записать в виде

$$Y_m^{(1)}+\frac{\lambda}{8}\beta_m^{(1)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Y_n^{(1)}}{n(n+1)(2n+1)\left(m+\frac{3}{2}-n\right)}= \tag{19}$$

$$=a_0\beta_m^{(1)}-\lambda\frac{\beta_m^{(1)}Y_1^{(1)}}{24(2m+1)},\quad m=2,3,...$$

где

$$\beta_m^{(1)}=\frac{1}{\pi}\frac{2m+1}{m(m+1)}\frac{\Gamma^2\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(m)}\quad(\beta_m^{(1)}\sim O(1);\quad m\to\infty)$$

$$Y_n^{(1)}=\frac{A_{-1}^{(2n+3)}}{\overline{K}^-(-2in)},\qquad Y_1^{(1)}=-\frac{48\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\lambda\pi}\overline{P}_1^+(-2i)$$

Итак, решение функционального уравнения (10) с условиями (12) свелось к решению квазивполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (19). Квазиполная регулярность системы (19) следует из равенства

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)\left|n-m-\frac{3}{2}\right|}=2f_m \tag{20}$$

где

$$f_m=\frac{1}{2m+3}\left[2\Psi(m+2)+\Psi\left(m+\frac{3}{2}\right)-\Psi(1)-2\Psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2m+5}\left[2\Psi(m+3)+\Psi\left(m+\frac{3}{2}\right)-2\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi(2)\right]-$$

$$-\frac{1}{m+2}\left[2\Psi\left(m+\frac{5}{2}\right)+\Psi\left(m+\frac{1}{2}\right)-\frac{4m}{2m+1}-3\Psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{6(2m+1)},$$

$\Psi(z)$ —функция пси, для которой имеет место асимптотическая формула [7]

$$\Psi(z)=\ln z-\frac{1}{2z}-\frac{1}{12z^2}+\ldots,(|z|\to\infty, |\arg z|<\pi) \tag{21}$$

С помощью (21) легко убедиться, что $f_m\sim\frac{1}{m}$ при $m\to\infty$, чем и утверждается квазиполная регулярность системы (19) при любом конечном λ.

Равенство (20) можно получить, если использовать следующее [8]:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\left[\Psi(n+a+1)-\Psi(a)-\Psi(n+b+1)+\Psi(b)\right]$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\left[\Psi(b)-\Psi(a)\right]$$

После определения $Y_n^{(1)}$ из (19), $q_1(ax)$ будет даваться в следующих видах:

$$q_1(ax)=-\frac{48\overline{P}_1^-(-2i)}{\pi\lambda}x^{-5}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(n)Y_n^{(1)}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}x^{-(2n+3)}$$

$$q_1(ax)=a_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n)(Y_n^{(1)}-a_0\beta_n^{(1)})}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}x^{-(2n+3)}$$

$$(\lambda>0,\quad 1<x<\infty)$$

Теперь приступим к исследованию (11), (13). Опять аналогичными рассуждениями, как это было сделано выше, можно утверждать, что полюсами функции $\overline{P}_2^+(\alpha)$ могут быть только точки $\alpha=-2i(n+1)$, $n=1,2$ и притом простые. Это дает возможность в дальнейшем после применения к функциональному уравнению (11) метода Винера-Хопфа, ее решение свести к решению квазиполне регулярной бесконечной системы алгебраических уравнений:

$$Y_m^{(2)}+\frac{\lambda}{4}\beta_m^{(2)}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{Y_n^{(2)}}{n(2n-1)(2n+1)\left(m+\frac{3}{2}-n\right)}=$$

$$=-\frac{\lambda}{6}\beta_m^{(2)}\left[\frac{Y_1^{(2)}}{2m+1}+\frac{Y_2^{(2)}}{10(2m-1)}\right],\quad m=3,4,\ldots \tag{22}$$

где

$$A_{-1}^{(2m+2)}\overline{K}^-(-i(2m-1))=Y_m^{(2)},\quad A_{-1}^{(2m+2)}=\operatorname*{Res}_{\alpha=-i(2m+2)}\overline{P}_2^+(\alpha),\quad m=1,2\ldots$$

$$\beta_m^{(2)}=\frac{2}{\pi}\frac{2m+1}{m(2m-1)}\frac{\Gamma^2\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(m)}\quad Y_1^{(2)}=\frac{6}{\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\overline{P}_2^+(-i)$$

а постоянная $Y_2^{(2)}$ определяется от второго из условий (13).

Квазиполная регулярность системы (22) следует из равенства

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)(2n+1)\left|m+\frac{3}{2}-n\right|}=f_m^{(2)}$$

где

$$f_m^{(2)}=\frac{1}{2(m+1)}\left[2\Psi\left(m+\frac{3}{2}\right)+\Psi\left(m+\frac{1}{2}\right)-2-3\Psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2(m+2)}\left[2\Psi\left(m+\frac{5}{2}\right)+\Psi\left(m+\frac{1}{2}\right)-3\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{8}{3}\right]-$$

$$-\frac{2}{2m+3}\left[2\Psi(m+2)+\Psi\left(m+\frac{1}{2}\right)-\Psi(2)-2\Psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]-\frac{1}{15(2m+1)}$$

поскольку $\beta_m^{(2)}\sim O(1)$ при $m\to\infty$, а $f_m^{(2)}\sim\frac{1}{m}$ при $m\to\infty$.

После определения $Y_n^{(2)}$, $q_2(ax)$ определится в виде

$$q_2(ax)=-\frac{12\overline{P}_2^+(-i)}{\pi\lambda}x^{-4}-\sqrt{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(n)Y_n^{(2)}}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}x^{-2(n+1)} \tag{23}$$

$$(\lambda>0,\quad 1<x<\infty)$$

Далее представим $q_2(ax)$ в виде с выделенной в точке $x=1$ присущей ей особенностью. Для этого заметим, что $\overline{P}_2^+(\alpha)=\Phi_2(0)\frac{i}{\alpha}+O(\alpha^{-2})$ при $|\alpha|\to\infty$ в своей области регулярности, где

$$\Phi_2(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\frac{\overline{P}_2^+(\alpha-3i)}{\alpha(\alpha-i)(\alpha-2i)}d\alpha=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n^{(2)}}{n(4n^2-1)}$$

Тогда нетрудно видеть (23), что $q_2(ax)$ можно представить в некомом виде

$$q_2(ax)=-\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Phi_2(0)\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-1-\frac{1}{2x^2}\right]+$$

$$+\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda\Phi_2(0)}{\pi}\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)}-\frac{\Gamma(n)Y_n^{(2)}}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}\right]x^{-2(n+1)}$$

$$(1<x<\infty)$$

BENDING OF TWO SEMI-INFINITE BEAMS, LAYING ON A BOUNDARY OF ELASTIC HALF-PLANE

E. KH. GRIGORIAN

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵԶՐԻՆ ԴՐՎԱԾ ԵՐԿՈՒ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ ԾՌՈՒՄԸ

Է. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է կիսահարթության եզրին դրված երկու կիսաանվերջ հեծանների ծռման խնդիրը, երբ հեծանների ծայրերին կիրառված են ուժ և մոմենտ։ Շփումը և պոկումը հաշվի չի առնվում։ Խնդիրը բերվում է Վիներ-Հոփֆի հավասարման, այնուհետև, քվազիլիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի, որոնց անհայտները նորմալ լարումների Ֆուրյեի ձևափոխության մնացքներն են։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорян Э. Х.* Об одном эффективном методе решения одного класса смешанных задач теории упругости.—Уч. записки ЕГУ, естеств. науки, 1979, №2.
2. *Григорян Э. Х.* Об одном подходе к решению задач для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение, выходящее на границу полуплоскости.—Межвуз. сб. науч. трудов. Механика. Ер.: изд. ЕГУ, 1987, №6.
3. *Григорян Э. Х.* О решении контактной задачи для упругой полуплоскости, граница которой усилена двумя полубесконечными накладками.—Межвуз. сб. науч. трудов; Механика. Ер.: изд. ЕГУ, 1991, №8.
4. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.—М.: Наука. 1989.
5. *Попов Г. Я., Тихоненко Л. Я.* Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином. ПММ, 1974, 38, вып. 2.
6. *Нобл Б.* Метод Винера-Хопфа.—М.: ИЛ, 1962.
7. Справочник по специальным функциям.—М.: Наука, 1979.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды.—М.: Наука, 1981.

Ереванский университет

Поступила в редакцию
11.06.1992