ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մեխանիկա 46, № 3—4, 1993 Механика

УДК 539.3

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ МАГНИТОУПРУГОСТИ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ АНИЗОТРОПНЫХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

САРКИСЯН С. О.

В данной работе рассматриваем проблему построения двумерной теории магнитоупругости анизотропных оболочек методом гипотез и представляем основы общей двумерной теории магнитоупругости анизотропных тонких оболочек.

1. Рассмотрим анизотропную оболочку постоянной толщины $2h$ как трехмерное, упругое, электропроводящее, немагнитное тело и отнесем его к принятой в теории оболочек триортогональной неподвижной системе координат.

Пусть оболочка находится во внешнем магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{B}_0=(B_{0\alpha}, B_{0\beta}, B_{0\gamma})$ и что она находится в среде, электропроводящие свойства которой отождествляются со свойствами вакуума.

Будем исходить из основных уравнений линейной теории магнитоупругости для трехмерной анизотропной немагнитной среды. Эти уравнения составляют три группы уравнений и имеют вид:

первая группа уравнений—дифференциальные уравнения теории упругости анизотропного тела, которые можем записать так.

Векторное уравнение движения оболочки с учетом массовых пондеромоторных сил [1]

$$\frac{\partial H_2\vec{\sigma}_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial H_1\vec{\sigma}_\beta}{\partial\beta}+\frac{\partial H_1H_2\vec{\sigma}_\gamma}{\partial\gamma}+H_1H_2\left(-\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}+\vec{F}\right)=0, \tag{1.1}$$

где $\vec{\sigma}_\alpha$, $\vec{\sigma}_\beta$, $\vec{\sigma}_\gamma$—векторы упругих напряжений, соответственно, на площадках, нормали которых проходят вдоль линий α, β и γ; $\vec{u}=(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$—вектор перемещения точек оболочки; ρ—плотность материала оболочки, $\vec{F}$—вектор объемных сил электромагнитного происхождения (пондеромоторные силы)

$$\vec{F}=\frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}_0, \tag{1.2}$$

$\vec{j}$—вектор плотности электрического тока проводимости.

Считаем, что рассматриваемое сплошное упругое тело испытывает малые деформации и подчиняется обобщенному закону Гука [2], когда в каждой точке тела имеется плоскость упругой симметрии (число независимых упругих постоянных a_{ik} —тринадцать).

В первой же группе уравнений, корме уравнений движения (1.1), обобщенного закона Гука [2] следует присоединять уравнения, связывающие составляющие тензора деформации с компонентами вектора перемещений [2].

Вторая группа уравнений—уравнения электродинамики в области движущейся оболочки, которую запишем так:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{h}=\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}, & \operatorname{rot}\vec{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{h}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{E}=4\pi\rho_e, & \operatorname{div}\vec{h}=0 \end{cases} \tag{1.3}$$

где $\vec{E}$—вектор напряженности возбужденного в оболочке электрического поля; $\vec{h}$—вектор напряженности возбужденного в оболочке магнитного поля; ρ_e—объемная плотность электрических зарядов.

Плотность электрического тока проводимости $\vec{j}$ определяется законом Ома [3] следующим образом (в случае, когда имеется плоскость симметрии для физических свойств материала оболочки):

$$\vec{j}=\hat{\sigma}\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\times\vec{B}_0\right) \tag{1.4}$$

где $\hat{\sigma}$—тензор электрической проводимости материала оболочки

$$\hat{\sigma}=\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Отметим, что на основе уравнений (1.3) электрический ток проводимости будет удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div}\vec{j}=0 \tag{1.6}$$

Третья группа уравнений—уравнения электродинамики во внешней от оболочки области (вакууме).

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{h}^{(e)}=0, & \operatorname{rot}\vec{E}^{(e)}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{h}^{(e)}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{h}^{(e)}=0, & \operatorname{div}\vec{E}^{(e)}=0 \end{cases} \tag{1.7}$$

где $\vec{E}^{(e)}$ и $\vec{h}^{(e)}$—соответственно, векторы индуцированных электрических и магнитных полей в окружающей оболочку области (вакууме).

К системе уравнений (1.1)—(1.7), определяющих поведение движущейся упругой оболочки в заданном магнитном поле, должны быть присоединены механические и электродинамические граничные условия на поверхности оболочки, начальные условия и условия на бесконечности [1, 3].

2. Основной предпосылкой для построения теории магнитоупруго-

сти анизотропных тонких оболочек являются гипотезы магнитоупругости тонких тел, которые формируем так:

а) нормальный к срединной поверхности прямолинейный элемент оболочки после деформации остается прямолинейным, нормальным к деформированной срединной поверхности и сохраняет свою длину. Нормальными напряжениями σ_{γ} на площадках, параллельных срединной поверхности, можем пренебречь;

б) тангенциальные компоненты вектора напряженности возбуждаемого электрического поля и нормальная компонента вектора напряженности возбуждаемого магнитного поля по толщине оболочки остаются неизменными;

в) нормальной компонентой j_{γ} электрического тока проводимости можем пренебрегать;

г) для определения электромагнитного поля в окружающем оболочку пространстве (бесконечное трехмерное пространство с исключением области тонкой оболочки) трехмерную область, занимаемую тонкой оболочкой, можем представлять как математический разрез по срединной поверхности оболочки, по которому будут течь поверхностные токи электропроводимости, представляющие собой усредненные токи по толщине оболочки.

Допущения (а) по сути дела сводятся к классической гипотезе о неизменяемости нормального элемента (гипотезе Кирхгофа-Лява).

Гипотезы (б) впервые были сформулированы в работе [1], которые определяют поведение по толщине оболочки величин, характеризующие электромагнитное поле в тонкой области оболочки.

Гипотезы группы (а) и (б), которые в [1] были названы гипотезами магнитоупругости тонких тел, полностью не решают проблемы сведения трехмерной проблемы магнитоупругости (1.1)—(1.7) к двумерной [1, 4—6]. Указанный недостаток стал причиной для различного рода допущений [1,7] относительно процесса электромагнитного поля в окружающем оболочку пространстве, не базирующихся на тонкостенности самой оболочки.

Гипотезы групп (в) и (г) представляют собой те дополнительные гипотезы к группам гипотез (а) и (б), которые базируются на тонкостенности самой оболочки, и которые решают полностью проблему приведения трехмерной теории магнитоупругости к общей двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек.

В работах [4—6], базируясь на асимптотическом методе интегрирования всех трех групп уравнений трехмерной магнитоупругости, для изотропного случая, а в работах [4,8,9]—для ортотропного случая, математически были обоснованы все группы гипотез (а)—(г) и этим путем впервые построена общая двумерная теория магнитоупругости тонких изотропных и ортотропных оболочек.

Отметим, что гипотеза (в) общепринята в теории электромагнетизма в тонкой трехмерной материальной среде [10,11].

В отличие от монографии [1], здесь гипотезами магнитоупругости тонких оболочек будут названы совместно все изложенные группы гипотез (а), (б), (в) и (г).

В настоящей работе на основе гипотез (а)—(г) будем излагать основные положения общей двумерной теории магнитоупругости анизотропных тонких оболочек.

Пользуясь гипотезой группы (а), по известным формулам [2] определяем: распределение по толщине оболочки компонентов вектора перемещений; составляющие тензора деформированного напряженного состояния; усредненные по толщине оболочки усилия и моменты; уравнения, связывающие компоненты тензора деформированного состояния срединной поверхности оболочки через компоненты перемещений точек срединной поверхности; уравнения неразрывности и соотношения упругости теории тонких оболочек.

На основе гипотезы (в) будем иметь следующее приближенное равенство:

$$j_\gamma=0 \tag{2.1}$$

Пользуясь выражениями (1.4), (1.5), из (2.1) легко определяем E_γ:

$$E_\gamma=-\frac{1}{c}\left[B_{0\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\vartheta_1}{\partial t}\right)-B_{0\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\vartheta_2}{\partial t}\right)\right] \tag{2.2}$$

где ϑ_1 и ϑ_2—углы поворота нормали к срединной поверхности оболочки [2].

Гипотезы группы (б) аналитически представляем следующими приближенными выражениями [1]:

$$E_\alpha=E_{\alpha 0}(\alpha,\ \beta,\ t),\quad E_\beta=E_{\beta 0}(\alpha,\ \beta,\ t),\quad h_\gamma=h_{\gamma 0}(\alpha,\ \beta,\ t) \tag{2.3}$$

Тангенциальные компоненты вектора плотности электрического тока проводимости определяем на основе формул (1,4), (1.5), (2.3):

$$\begin{aligned}
j_\alpha&=\sigma_{11}\left\{E_{\alpha 0}+\frac{1}{c}\left[B_{0\gamma}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\vartheta_2}{\partial t}\right)-B_{0\beta}\frac{\partial w}{\partial t}\right]\right\}+\\
&+\sigma_{12}\left\{E_{\beta 0}+\frac{1}{c}\left[B_{0\alpha}\frac{\partial w}{\partial t}-B_{0\gamma}\left(\frac{du}{dt}+\gamma\frac{d\vartheta_1}{dt}\right)\right]\right\}\\
j_\beta&=\sigma_{21}\left\{E_{\alpha 0}+\frac{1}{c}\left[B_{0\gamma}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\vartheta_2}{\partial t}\right)-B_{0\beta}\frac{\partial w}{\partial t}\right]\right\}+\\
&+\sigma_{22}\left\{E_{\beta 0}+\frac{1}{c}\left[B_{0\alpha}\frac{\partial w}{\partial t}-B_{0\gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\vartheta_1}{\partial t}\right)\right]\right\}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Тангенциальные компоненты вектора напряженности возбужденного в оболочке магнитного поля будем определять на основе первого векторного уравнения (1.3) с учетом (2.4), (2.3) (везде последовательно пренебрегаем величинами порядка h/R_i, $i=1,2$ относительно единицы, выражающей условие тонкостенности оболочки):

$$
\begin{aligned}
h_\alpha = h_{\alpha 0}(\alpha,\beta,t) + \frac{4\pi}{c}\gamma\Big\{\sigma_{21}\Big[E_{\alpha 0} + \frac{1}{c}\Big(B_{0\gamma}\frac{\partial v}{\partial t} - B_{0\beta}\frac{\partial w}{\partial t}\Big)\Big] + \\
+ \sigma_{22}\Big[E_{\beta 0} + \frac{1}{c}\Big(B_{0\alpha}\frac{\partial w}{\partial t} - B_{0\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}\Big)\Big]\Big\} + \frac{4\pi}{c}\frac{\gamma^2}{2}\Big(\sigma_{21}B_{0\gamma}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial t} - \sigma_{22}B_{0\gamma}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial t}\Big) \\
h_\beta = h_{\beta 0}(\alpha,\beta,t) - \frac{4\pi}{c}\gamma\Big\{\sigma_{11}\Big[E_{\alpha 0} + \frac{1}{c}\Big(B_{0\gamma}\frac{\partial v}{\partial t} - B_{0\beta}\frac{\partial w}{\partial t}\Big)\Big] + \\
+ \sigma_{12}\Big[E_{\beta 0} + \frac{1}{c}\Big(B_{0\alpha}\frac{\partial w}{\partial t} - B_{0\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}\Big)\Big]\Big\} - \frac{4\pi}{c^2}\frac{\gamma^2}{2}\Big(\sigma_{11}B_{0\gamma}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial t} - \sigma_{12}B_{0\alpha}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial t}\Big)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Объемная плотность электрического заряда получим из третьего уравнения (1.3) при помощи выражений и формул (2.3), (2.2):

$$
\rho_e = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{1}{A}\frac{\partial E_{\alpha 0}}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial E_{\beta 0}}{\partial\beta} - \frac{1}{c}B_{0\beta}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial t} + \frac{1}{c}B_{0\alpha}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial t}\Big) \tag{2.6}
$$

Из третьего скалярного уравнения второго векторного уравнения системы (1.3) можем получить также следующее уравнение:

$$
\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}(BE_{\beta 0}) - \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}(AE_{\alpha 0}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial h_{30}}{\partial t} \tag{2.7}
$$

Итак, на основе гипотез магнитоупругости тонких тел по приведенным формулам определяются все механические и электродинамические переменные в области тонкой оболочки.

На основе формул (2.4) можем определить компоненты осредненного (поверхностного) электрического тока проводимости по срединной поверхности оболочки.

$$
\begin{aligned}
j_{\alpha 0} = \gamma_{11}\Big[E_{\alpha 0} + \frac{1}{c}\Big(B_{0\gamma}\frac{\partial v}{\partial t} - B_{0\beta}\frac{\partial w}{\partial t}\Big)\Big] + \gamma_{12}\Big[E_{\beta 0} + \frac{1}{c}\Big(B_{0\alpha}\frac{\partial w}{\partial t} - B_{0\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}\Big)\Big] \\
j_{\beta 0} = \gamma_{21}\Big[E_{\alpha 0} + \frac{1}{c}\Big(B_{0\gamma}\frac{\partial v}{\partial t} - B_{0\beta}\frac{\partial w}{\partial t}\Big)\Big] + \gamma_{22}\Big[E_{\beta 0} + \frac{1}{c}\Big(B_{0\alpha}\frac{\partial w}{\partial t} - B_{0\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}\Big)\Big]
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

где γ_{11}; $\gamma_{12}=\gamma_{21}$, γ_{22} представляют собой коэффициенты поверхностной электропроводимости срединной поверхности оболочки и определяются выражениями

$$
\gamma_{ij} = 2h\sigma_{ij}, \quad i,j=1,2 \tag{2.9}
$$

И, наконец, легко придти к выводу, что поверхностный электрический ток проводимости $\vec{j}=\{j_{\alpha 0}, j_{\beta 0}, 0\}$ будет удовлетворять уравнению

$$
\mathrm{div}_2\vec{j}=0 \tag{2.10}
$$

где div_2 — двумерный оператор дивиргенции по срединной поверхности оболочки.

Если с помощью четырех сечений, нормальных к координатной поверхности оболочки, выделим малый криволинейный прямоугольник, стороны которого совпадают с координатными линиями $\alpha=\mathrm{const}$, $\beta=\mathrm{const}$, тогда из условия равенства нулю главного вектора и главного момента всех сил (на основе принципа Даламбера), действующих на указанный элемент срединной поверхности оболочки, получим уравнения движения элемента оболочки

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial BT_1}{\partial\alpha}-\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2+\frac{1}{AB}\frac{\partial AS_{21}}{\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}S_{12}+\frac{N_1}{R_1}=$$
$$=-X-\frac{1}{c}B_{0\gamma}j_{\beta 0}+\rho_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$\frac{1}{AB}\frac{\partial AT_2}{\partial\beta}-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}T_1+\frac{1}{AB}\frac{\partial BS_{12}}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}S_{21}+\frac{N_2}{R_2}=$$
$$=-Y+\frac{1}{c}B_{0\gamma}j_{\alpha 0}+\rho_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{2.11}$$
$$-\left(\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}\right)+\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial BN_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial AN_2}{\partial\beta}\right)=-Z-\frac{1}{c}\left(B_{0\beta}j_{\alpha 0}-B_{0\alpha}j_{\beta 0}\right)+\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$
$$\frac{1}{AB}\frac{\partial BM_1}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial AH_{21}}{\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}H_{12}-\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}M_2-N_1=0$$
$$\frac{1}{AB}\frac{\partial AM_2}{\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial BH_{12}}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}H_{21}-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}M_1-N_2=0$$

где X, Y, Z—компоненты приведенных внешних заданных сил, приложенных к срединной поверхности оболочки; $\rho_1=2h\rho$ —поверхностная плотность материала срединной поверхности оболочки.

Теперь для внешней от оболочки области (в вакууме) мы будем иметь систему дифференциальных уравнений (1.7), где на основе гипотезы (г) следует учесть, что по срединной поверхности оболочки текут поверхностные электрические токи проводимости $\vec{j}=(j_{\alpha 0}, j_{\beta 0}, 0)$, компоненты которого определяются выражениями (2.8).

Определяющие уравнения электромагнитного поля при указанных обстоятельствах можем представить следующим образом:

$$\mathrm{rot}\vec{h}^{(e)}=\frac{4\pi}{c}\delta(\gamma)\cdot\theta(\alpha,\beta\in\Omega)\vec{j}, \qquad \mathrm{rot}\vec{E}^{(e)}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}^{(e)}}{\partial t}$$
$$\mathrm{div}\vec{h}^{(e)}=0, \qquad \mathrm{div}\vec{E}^{(e)}=0, \tag{2.12}$$

где $\delta(\gamma)$ —дельта-функция Дирака; $\theta(\alpha,\beta\in\Omega)$—двумерная функция Хевисайда; Ω—область срединной поверхности оболочки.

Для системы уравнений (2.12), которая должна выполняться во всем трехмерном пространстве R_3, необходимо присоединить условия на бесконечности и нулевые начальные условия для компонентов векторов электромагнитного поля.

Система уравнений (2.12) представляет собой дифференциальные уравнения в частных производных с сингулярными коэффициентами типа дельта-функций, эта та наиболее простейшая система уравнений, которую можно было бы заменить второй—(1.3) и третьей—(1.7) системой уравнений трехмерной магнитоупругости на основе группы гипотез (а), (б), (в) и (г). Итак, задача целостного определения электромагнитного поля и в области трехмерной оболочки и в окружающем ее пространстве приведена к решению системы уравнения (2.12) с коэффициентами типа дельта-функций и что эту систему уравнений необходимо рассматривать во всем трехмерном пространстве R_3. Система уравнений (2.12) будет представлять упрощенную, но не двумерную, математическую модель для описания магнитоупругого процесса в тонкой оболочке.

Полученные качественные результаты позволяют окончательно решать проблему приведения трехмерной проблемы магнитоупругости (1.1)—(1.7) к двумерной и построить общую двумерную теорию магнитоупругости анизотропных тонких оболочек.

Если взять оператор ротации из обеих частей второго уравнения из (2.12) и использовать первое уравнение из этой же системы, на основе фундаментального решения для векторного уравнения Лапласа во всем трехмерном пространстве, решение векторного уравнения (2.12) можем представить в виде следующего интегрального равенства:

$$\vec{E}^{(e)}(P)=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{R_{PQ}}\vec{j}(Q,t)\,d\Omega, \qquad Q\in\Omega, \quad P\in R_3^{(3)} \tag{2.13}$$

где $-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{QP}}$ —фундаментальное решение уравнения Лапласа; R_{PQ}— трехмерное расстояние между точкой $Q\in\Omega$ и произвольной точкой P трехмерного пространства.

В силу непрерывности поверхностного потенциала простого слоя [12] можем, во-первых, в интегральном равенстве положить $P\in R^{(2)}$ (бесконечная двумерная область, содержащая срединную поверхность оболочки Ω) и далее изменить точку P только по срединной поверхности Ω, имея в виду, что при этом граничные условия электродинамики с учетом (2.3) позволяют написать

$$E_{\alpha}^{(e)}=E_{\alpha 0}, \quad E_{\beta}^{(e)}=E_{\beta 0} \tag{2.14}$$

И тогда из (2.13) будем иметь интегральные равенства для величин $E_{\alpha 0}(P,t)$ и $E_{\beta 0}(P,t)$. Если теперь при помощи выражений (2.8) $E_{\alpha 0}(P,t)$ и $E_{\beta 0}(P,t)$ определяем с помощью $\bar{j}_{\alpha 0}$ и $\bar{j}_{\beta 0}$, тогда после некоторых преобразований, относительно компонентов электрической поверхностной токи проводимости приходим к следующим интегро-дифференциальным уравнениям:

$$j_{\alpha 0}(P,t)=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega}\frac{j_{\alpha 0}(Q,t)[\gamma_{11}\vec{e}_1(P)\vec{e}_1(Q)+\gamma_{12}\vec{e}_2(P)\vec{e}_1(Q)]d\Omega}{R_{PQ}}-$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega}\frac{j_{\beta 0}(Q,t)[\gamma_{11}\vec{e}_1(P)\vec{e}_2(Q)+\gamma_{12}\vec{e}_2(Q)\vec{e}_2(P)]}{R_{PQ}}d\Omega+$$

$$+\frac{1}{c}\gamma_{11}\left(B_{0\gamma}\frac{\partial v(P,t)}{\partial t}-B_{03}\frac{w(P,t)}{\partial t}\right)+\frac{1}{c}\gamma_{12}\left(B_{0\alpha}\frac{\partial w(P,t)}{\partial t}-B_{0\gamma}\frac{\partial u(P,t)}{\partial t}\right)$$

$$P\in\Omega \qquad (2.15)$$

$$j_{\beta 0}(P,t)=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega}\frac{j_{\alpha 0}(Q,t)[\gamma_{11}\vec{e}_1(P)\vec{e}_1(Q)+\gamma_{22}\vec{e}_1(Q)\vec{e}_2(P)]}{R_{PQ}}d\Omega-$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega}\frac{j_{\beta 0}(Q,t)[\gamma_{12}\vec{e}_1(P)\vec{e}_2(Q)+\gamma_{22}\vec{e}_2(Q)\vec{e}_2(P)]}{R_{PQ}}d\Omega+$$

$$+\frac{1}{c}\gamma_{12}\left(B_{0\gamma}\frac{\partial v(P,t)}{\partial t}-B_{03}\frac{\partial w(P,t)}{\partial t}\right)+\frac{1}{c}\gamma_{22}\left(B_{0\alpha}\frac{\partial w(P,t)}{\partial t}-B_{0\gamma}\frac{\partial u(P,t)}{\partial t}\right)$$

$$P\in\Omega$$

Таким образом, проблема приведения трехмерной теории магнитоупругости к двумерной теории анизотропных тонких оболочек полностью решена и в лице уравнений (2.11), и (2.15) (которым следует присоединить соотношения упругости и уравнения, связывающие компоненты тангенциальной и изгибной деформации, выражающиеся через компоненты перемещения срединной поверхности оболочки [2]) построена общая теория двумерной магнитоупругости анизотропных тонких оболочек.

В работе построено вариационное уравнение, получено уравнение баланса энергии и доказана теорема единственности в двумерной теории магнитоупругости анизотропных тонких оболочек. Ввиду ограниченности статьи эти результаты здесь не приводятся [13—18].

Из вариационного уравнения можем получить приведенные выше основные уравнения теории магнитоупругости анизотропных тонких оболочек, канонические граничные условия теории тонких оболочек [2], а также следующие граничные условия для компонентов поверхностного электрического тока проводимости [15]

$$j_{\alpha 0}(\alpha,\beta,t)/_{r}=0, \quad j_{\beta 0}(\alpha,\beta,t)/_{r}=0 \qquad (2.16)$$

Если нам удастся решить разрешающую систему общей двумерной теории магнитоупругости анизотропных тонких оболочек, этим самым определим компоненты перемещений u, v, w срединной поверхностиности оболочки, компоненты индуцированного электрического тока проводимости $j_{\alpha 0}$ и $j_{\beta 0}$ в области срединной поверхности оболочки. Имея значения указанных основных величин, характеризующих задачу, далее по соответствующим формулам легко можем определить компоненты деформированного состояния срединной поверхности оболочки, распределение перемещений, деформаций и напряжений, компоненты векторов индуцированного электромагнитного поля как в области трехмерной оболочки, так и в окружающем его пространстве.

3. В некоторых случаях изменяемости по времени индуцированного в оболочке магнитного поля, можем получить уравнения двумерной теории магнитоупругости анизотропных тонких оболочек (упрощенную систему), минуя задачу (2.12).

Упрощение разрешающей системы уравнений общей двумерной теории магнитоупругости анизотропных тонких оболочек основывается на том допущении, что величиной $\frac{\partial h_{30}}{\partial t}$ в уравнении (2.7) в определенных случаях можем пренебречь.

Следует отметить, что это допущение уже давно принято в теории электромагнитного поля для тонких пластин и оболочек [10].

Итак, принимая указанное допущение, уравнение (2.7) принимает вид

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \alpha}(BE_{\beta 0}) - \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \beta}(AE_{\alpha 0})=0 \tag{3.1}$$

Следующее уравнение, которое присоединим к уравнению (3.1), это уравнение (2.10), которое имеет вид

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \alpha}(Bj_{\alpha 0}) + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \beta}(Aj_{\beta 0})=0 \tag{3.2}$$

Вихревой поверхностный ток ($j_{\alpha 0}$, $j_{\beta 0}$), возбуждаемый в срединной поверхности, будем характеризовать функцией тока F [10,11]

$$j_{\alpha 0}=-\frac{1}{B}\frac{\partial F}{\partial \alpha}, \quad j_{\beta 0}=\frac{1}{A}\frac{\partial F}{\partial \beta} \tag{3.3}$$

Если компоненты поверхностной плотности электрического тока будут определяться через функции тока по формулам (3.3), тогда уравнение (3.2) тождественно удовлетворим, а уравнение (3.1) приводим к следующему разрешающему относительно функции виду:

$$\lambda_{11}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)+2\lambda_{12}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta}+\lambda_{22}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)= \tag{3.4}$$

$$=\frac{1}{c}\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[B\left(B_{03}\frac{\partial w}{\partial t}-B_{0\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial \beta}\left[A\left(B_{0\gamma}\frac{\partial v}{\partial t}-B_{03}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right]\right\}$$

где

$$\lambda_{11}=\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}, \quad \lambda_{12}=\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}\gamma_{12}-\gamma_{12}^2}, \quad \lambda_{22}=\frac{\gamma_{22}}{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2} \tag{3.5}$$

Уравнения (2.11), (3.5), (3.3), на основании принятого выше допущения, будут представлять разрешающую систему уравнений общей двумерной теории магнитоупругости анизотропных тонких оболочек.

На основании граничных условий (2.16) из (3.3) легко получим, что на граничащем контуре Γ срединной поверхности оболочки Ω, функция тока будет постоянной. Но, так как постоянное значение функции F не влияет на величину поверхностного тока (см. (3.3)), следовательно, на контуре Γ можем поставить следующее граничное условие:

$$F(\alpha,\beta,t)|_{\Gamma}=0 \tag{3.6}$$

FOUNDATIONS OF A GENERAL THEORY OF MAGNETOELASTICITY OF ELECTROCONDUCTING THIN ANISOTROPIC SHELLS

S. O. SARKISIAN

ԷԼԵԿՏՐԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԲԱՐԱԿ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ամփոփում

Տվյալ աշխատանքում դիտարկվում է հիպոթեզների մեթոդով անիզոտրոպ թաղանթների մագնիսաառաձգականության երկչափ տեսության կառուցման խնդիրը և ներկայացվում է անիզոտրոպ բարակ թաղանթների մագնիսաառաձգականության ընդհանուր երկչափ տեսության հիմունքները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.—М.: Наука, 1977. 272 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек.—М.: Наука, 1974. 445 с.
3. *Гузь А. Н., Махорт Ф. Г.* Акустоэлектромагнитоупругость. Механика связанных полей в элементах конструкций.—Киев: Наукова думка, 1988. 286 с.
4. *Саркисян С. О.* Магнитоупругость проводящих тонких оболочек и пластин. Докторская диссертация.—Казань: Казанский гос. ун-т, 1986. 405 с.
5. *Саркисян С. О.* К построению в целом двумерной теории колебаний проводящей тонкой оболочки методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1985, т. 38, №6, с. 21—34.
6. *Саркисян С. О.* Построение асимптотических двумерной теории магнитоупругости

проводящих тонких оболочек, находящихся в неоднородном и нестационарном магнитном поле // Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1989, т. 42, №5, с. 25—34.
7. *Багдасарян Г. Е.* О приведении трехмерной задачи магнитоупругости тонких пластин к двумерной // Уч. зап. Ереванск. ун-та, ест. науки. 1977, №2, с. 43—48.
8. *Саркисян С. О.* К построению в целом двумерной теории колебаний тонкой анизотропной оболочки, методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости // В кн.: Материалы второй Всесоюз. конф. «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов».—Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984, т. 3, с. 130—135.
9. *Саркисян С. О.* Построение асимптотической двумерной теории магнитоупругости ортотропных тонких оболочек, находящихся в неоднородном и нестационарном магнитном поле // Механика. Межвуз. сб. науч. трудов.—Ереван: 1991, Изд-во ЕГУ, №9, с. 25—36.
10. *Цейтлин Л. А.* Вихревые токи в тонких пластинах и оболочках // Журнал технической физики. 1969, т. 39, вып. 10, с. 1733—1741.
11. *Астахов В. И., Грудский И. М.* Расчет низкочастотных вихревых токов в тонкостенном параллелепипеде // Изв. высших учеб. заведений. Электромеханика. 1989, №2, с. 5—14.
12. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1972. 736 с.
13. *Саркисян С. О.* Вариационное уравнение магнитоупругости проводящих тонких оболочек // Доклады АН Арм. ССР. 1989. т. 89. №4. с. 181—186.
14. *Саркисян С. О.* Уравнение энергии и теорема единственности в магнитоупругости тонких оболочек // Учен. зап. Ереванск. ун-та, естеств. науки.—1985, т. 2, с. 41—46.
15. *Саркисян С. О.* Уравнение энергии и теорема единственности в магнитоупругости ортотропных тонких оболочек. Механика // Меж-вуз. сб. науч. трудов.—Ереван. Изд-во ЕГУ, 1989, вып. 7, с. 56—61.
16. *Саркисян С. О.* Уравнение энергии, теоремы единственности и взаимности в двумерной теории магнитоупругости ортотропно упругих и ортотропно проводящих тонких оболочек. Шестой Всесоюз. съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов.—Ташкент: 1986, с. 557.
17. *Саркисян С. О.* Теорема взаимности в магнитоупругости тонких оболочек. Механика // Межвуз. сб. науч. трудов.—Ереван: Изд-во ЕГУ, 1987, вып. 6, с. 102—110.
18. *Саркисян С. О.* Теорема взаимности в магнитоупругости тонких ортотропных оболочек // Докл. АН Арм. ССР, 1987, т. 85, №3, с. 112—116.

Ленинаканский политехнический
институт

Поступила в редакцию
12.07.1991