ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մեխանիկա 46, № 3–4, 1993 Механика

УДК 531.36:62–50

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЯМИ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ

СААКЯН Л. С.

Рассматривается задача об оптимальном управлении осесимметричными колебаниями круглой пластинки при помощи внешних сил, распределенных по всей ее площади. Предполагается, что пластинка зажата по контуру, и ее динамический прогиб мал по сравнению с толщиной.

Решение задачи строится в виде ряда по собственным функциям однородной задачи и сводится к бесконечной системе моментных равенств, решаемых в пространстве $L_2(0,T)$.

Определяется вид управляющей функции при условии минимума энергии управляющего воздействия и рассматриваются условия сходимости рассмотренных рядов.

§ 1. Пусть на пластинку, которая зажата по контуру, действует внешняя нагрузка, распределенная по всей ее площади с плотностью $f(t,r)$. Предположим, что динамический прогиб $W(t,r)$ мал по сравнению с толщиной h, а толщина, в свою очередь, мала по сравнению с радиусом $r=a$ пластинки. Тогда прогиб произвольной точки пластинки определится путем решения неоднородного дифференциального уравнения упругой поверхности [1]

$$b^4\Delta\Delta W+\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=f(t,r),\quad \Delta=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) \tag{1.1}$$

при соответствующих однородных граничных

$$W(t,r)\Big|_{r=a}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial r}\Big|_{r=a}=0,\quad t\geqslant 0 \tag{1.2}$$

и заданных начальных условиях

$$W(t,r)|_{t=0}=\varphi(r),\quad \frac{\partial W}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(r),\quad 0\leqslant r\leqslant a \tag{1.3}$$

В (1.1) $b^4=D/\gamma h$, $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$ — цилиндрическая жесткость, γ=const — плотность.

В задаче о собственных колебаниях круглой пластинки $(f(t,r)=0)$ при условиях (1.2), (1.3) решение определяется методом Фурье [1, 2]

$$W(t,r)=F(t)\cdot R(r)$$

где $F(t)$ и $R(r)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\ddot{F}+\lambda b^2 F=0;\quad \Delta\Delta R-\lambda R=0,\quad |R(0)|<\infty,\quad R(a)=0,\quad \left.\frac{dR}{dr}\right|_{r=a}=0$$

Собственные функции данной краевой задачи имеют следующий вид:

$$R_m(r)=I_0(\gamma_m)\cdot J_0\left(\frac{r}{a}\gamma_m\right)-J_0(\gamma_m)\cdot I_0\left(\frac{r}{a}\gamma_m\right),\quad m=1,2,\ldots \tag{1.4}$$

а собственные числа $\lambda_m=(\gamma_m/a)^4$ являются корнями трансцендентного уравнения

$$R'_m(a)=I_0(\gamma_m)\cdot J_0'(\gamma_m)-J_0(\gamma_m)\cdot I_0'(\gamma_m)=0,\quad m=1,2,\ldots$$

Функции (1.4) ортогональны в области $((0,a);\ (0,2\pi))$ с весом r и имеют следующую норму:

$$\|R_m(r)\|^2=\int_0^a\int_0^{2\pi}[R_m(r)]^2 r\,dr\,d\varphi=2a^2\pi J_0^2(\gamma_m)\cdot I_0^2(\gamma_m)$$

Таким образом, система функций $\{R_m(r)/\|R_m\|\}_{m=1}^{\infty}$ представляет собой ортонормальную систему собственных функций для бигармонического оператора в пространстве L_2 с условиями (1.2) на границе контура.

§2. Решение уравнения (1.1) будем искать в форме ряда

$$W(t,r)=\sum_{m=1}^{\infty} W_m(t)\frac{R_m(r)}{\|R_m\|},\quad W_m(t)=\frac{1}{\|R_m\|}\int_0^a W(t,r)R_m(r)r\,dr \tag{2.1}$$

Подставляя решение (2.1) в уравнение (1.1), умножая последнее на $rR_m(r)/\|R_m\|$ и интегрируя по r от нуля до a, получим для определения функций $W_m(t)$ следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{W}_m+b^2\lambda_m W_m=\frac{1}{\|R_m\|}\int_0^a f(t,r)R_m(r)r\,dr=u_m(t),\quad m=1,2,\ldots \tag{2.2}$$

с начальными условиями

$$\varphi_m=W_m(0)=\frac{1}{\|R_m\|}\int_0^a\varphi(r)R_m(r)r\,dr,\quad \psi_m=\dot{W}_m(0)=\frac{1}{\|R_m\|}\int_0^a\psi(r)R_m(r)r\,dr \tag{2.3}$$

Предполагается, что функция $f(t,r)\in L_2((0,T)\times(0,a))$ и допускает разложение

$$f(t,r)=\sum_{m=1}^{\infty} u_m(t)\frac{R_m(r)}{\|R_m\|}, \quad t\in[0,T] \tag{2.4}$$

Задача. Определить внешнюю нагрузку $f(t,r)$ так, чтобы при некотором конечном $t=T>0$, пластинку из заданного начального состояния (1.3) перевести в состояние

$$W(T,r)=0, \quad W_t(T,r)=0 \tag{2.5}$$

с соблюдением граничных условий (1.2), минимизировав при этом функционал

$$\int_0^T\int_0^a [f(t,r)]^2 r\,dr\,dt=\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^T u_m^2(t)dt=\sum_{m=1}^{\infty} J_m(u_m) \tag{2.6}$$

имеющий смысл энергии управляющего воздействия. Так как минимизация функционала (2.6) эквивалентна минимизации каждого из функционалов J_m, $m=1, 2,\ldots$, то для определения функций $W_m(t)$ приходим к следующей задаче оптимального управления в пространстве $L_2(0,T)$.

Заданы уравнения движения (2.2), отрезок времени $[0, T]$, начальное состояние (2.3) и конечное состояние

$$W_m(T)=0, \quad \dot{W}_m(T)=0 \tag{2.7}$$

фазового вектора $(W_m, \dot{W}_m)$. Выбран функционал

$$J_m=\int_0^T u_m^2(t)dt=\rho^2[u_m] \tag{2.8}$$

оценивающий управление и имеющий смысл нормы элемента $u_m\in L_2(0,T)$. Среди возможных управлений $u_m(t)$ требуется найти оптимальное управление $u_m^0(t)$, переводящее систему из состояния (2.3) в состояние (2.7) и имеющее минимальную норму [3].

§ 3. Общее решение уравнения (2.2), (2.3) имеет вид

$$W_m(t)=\varphi_m\cos\mu_m t+\frac{1}{\mu_m}\psi_m\sin\mu_m t+\frac{1}{\mu_m}\int_0^t u_m(\tau)\sin\mu_m(t-\tau)d\tau \tag{3.1}$$

где $\mu_m=\left(\frac{h}{a}\nu_m\right)^2$, $m=1,2,\ldots$. Условия (2.7) приводят к следующим моментным равенствам:

$$\int_0^T u_m(\tau)\sin\mu_m\tau d\tau=\mu_m\varphi_m, \quad \int_0^T u_m(\tau)\cos\mu_m\tau d\tau=-\psi_m, \quad m=1,2,\ldots \tag{3.2}$$

Оптимальное управление, решающее задачу (3.2), (2.8), имеет следующий вид [3]:

$$a_m^0(t)=\frac{1}{T^2-\left(\frac{\sin\mu_m T}{\mu_m}\right)^2}\left[\left(2\psi_m\frac{\sin^2\mu_m T}{\mu_m}+2\mu_m T\cdot\varphi_m+\varphi_m\sin 2\mu_m T\right)\sin\mu_m t+\right.$$

$$\left.+\left(\psi_m\frac{\sin 2\mu_m T}{\mu_m}-2\varphi_m\sin^2\mu_m T-2T\psi_m\right)\cos\mu_m t\right] \tag{3.3}$$

Выясним теперь условия равномерной сходимости следующих рядов:

$$W(t,r)=\sum_{m=1}^{\infty} W_m(t)\frac{R_m(r)}{\|R_m\|},\quad \dot W_t(t,r)=\sum_{m=1}^{\infty}\dot W_m(t)\frac{R_m(r)}{\|R_m\|},$$

$$\ddot W_{tt}=\sum_{m=1}^{\infty}\ddot W_m(t)\frac{R_m(r)}{\|R_m\|} \tag{3.4}$$

$$\Delta\Delta W=\frac{1}{a^4}\sum_{m=1}^{\infty}\nu_m^4 W_m(t)\frac{R_m(r)}{\|R_m\|},\quad f(t,r)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(t)\frac{R_m(r)}{\|R_m\|}$$

Для коэффициентов при $R_m(r)/\|R_m\|$ в рядах (3.4) справедливы следующие оценки:

$$|W_m(t)|<N_1\left(|\varphi_m|+\frac{1}{\nu_m^2}|\psi_m|\right),\quad |\dot W_m(t)|<N_2(\nu_m^2|\varphi_m|+|\psi_m|)$$

$$|\ddot W_m(t)<N_3(\nu_m^4|\varphi_m|+\nu_m^2|\psi_m|),\quad |\nu_m^4 W_m(t)|<N_3(\nu_m^4|\varphi_m|+\nu_m^2|\psi_m|) \tag{3.5}$$

$$|u_m(t)|<N_4(\nu_m^2|\varphi_m|+|\psi_m|),\quad N_i=\text{const},\quad i=\overline{1,4}$$

При больших значениях r для функций $J_0(r)$ и $I_0(r)$ справедливы неравенства [4]:

$$M_1\leqslant|J_0(r)\sqrt{r}|\leqslant M_2,\quad M_1'\leqslant\sqrt{r}\cdot e^{-r}\cdot I_0(r)\leqslant M_2'$$

$$\left|J_0\left(\frac{r}{a}\nu_m\right)\right|\leqslant\frac{M_2\sqrt{a}}{\sqrt{r}}\frac{1}{\sqrt{\nu_m}},\quad |J_0(\nu_m)|\geqslant\frac{M_1}{\sqrt{\nu_m}} \tag{3.6}$$

$$\left|I_0\left(\frac{r}{a}\nu_m\right)\right|\leqslant\frac{M_2'\sqrt{a}}{\sqrt{r}}\frac{e^{\frac{\nu_m}{a}r}}{\sqrt{\nu_m}},\quad I_0(\nu_m)\geqslant\frac{M_1'}{\sqrt{\nu_m}}e^{\nu_m},\quad M_i,\ M_i'\text{—const}$$

Оценим теперь $|R_m(r)|/\|R_m\|$ при $r\in(0,a]$ и $|R_m(0)|/\|R_m\|$:

$$\frac{|R_m(r)|}{\|R_m\|}=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\left|\frac{J_0\left(\frac{r}{a}\nu_m\right)}{J_0(\nu_m)}-\frac{I_0\left(\frac{r}{a}\nu_m\right)}{I_0(\nu_m)}\right|\leqslant\frac{(\sqrt{r})^{-1}}{\sqrt{2a\pi}}\left(\frac{M_2}{M_1}+\frac{M_2'}{M_1'}\right)=\frac{M}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{|R_m(0)|}{\|R_m\|}=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\left|\frac{1}{J_0(\nu_m)}-\frac{1}{I_0(\nu_m)}\right|\leqslant\frac{\sqrt{\nu_m}}{a\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_1'e^{\nu_1}}\right)=N\cdot\sqrt{\nu_m} \tag{3.7}$$

Следовательно, как это следует из (3.5), (3.7), сходимость мажорантных рядов

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{m=1}^{\infty}(\nu_m^4|\varphi_m|+\nu_m^2|\psi_m|), \quad r\in(0,a]$$
(3.8)
$$\sum_{m=1}^{\infty}(\sqrt{\nu_m}(\nu_m^4|\varphi_m|+\nu_m^2|\psi_m|), \quad (r=0)$$

обеспечит равномерную сходимость рядов (3.4).

Выясним условия, которым должны удовлетворять функции $\varphi(r)$ и $\psi(r)$, чтобы их соответствующие коэффициенты разложения φ_m и ψ_m имели порядок по отношению к ν_m необходимый для сходимости рядов (3.8).

Пусть производные функции $\varphi(r)$ до пятого порядка включительно непрерывны, а шестая производная кусочно-непрерывна, кроме того,

$$|\varphi_{1\alpha}(0)|=\left|\frac{1}{r^{6-\alpha}}\frac{d^\alpha\varphi}{dr^\alpha}\right|_{r=0}<k_1=\text{const}, \quad \alpha=\overline{1,5}$$

а функция $\sqrt{r}\cdot\varphi_{1\alpha}(r)$ абсолютно интегрируема при $\alpha=\overline{1,5}$. Тогда нетрудно показать, что для φ_m справедлива оценка

$$|\varphi_m|<\frac{c_1}{\nu_m^6}+\frac{c_2}{\nu_m^6}\sum_{\alpha=1}^{5}\int_0^a|\sqrt{r}\,\varphi_{1\alpha}(r)|dr<\frac{c}{\nu_m^6} \tag{3.9}$$

Аналогично, пусть производные функции $\psi(r)$ до третьего порядка включительно непрерывны, а четвертая производная кусочно-непрерывна, кроме того,

$$|\psi_{1\beta}(0)|=\left|\frac{1}{r^{3-\beta}}\frac{d^\beta\psi}{dr^\beta}\right|_{r=0}<k_2=\text{const}, \quad \beta=\overline{1,3}$$

а функция $\sqrt{r}\psi_{1\beta}(r)$ абсолютно интегрируема при $\beta=\overline{1,3}$. Тогда для ψ_{km} справедлива оценка

$$|\psi_m|<\frac{a^3M}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\nu_m^4}\sum_{\beta=1}^{3}\int_0^a|\sqrt{r}\psi_{1\beta}(r)|dr<\frac{d}{\nu_m^4} \tag{3.10}$$

Полученные оценки (3.9), (3.10) позволяют построить для (3.8) следующие мажорантные ряды

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}(\nu_m^4|\varphi_m|+\nu_m^2|\psi_m|)<\frac{c+d}{\sqrt{r}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_m^2}, \quad r\in(0,a]$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{\nu_m}(\nu_m^4|\varphi_m|+\nu_m^2|\psi_m|)<(c+d)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_m^{\frac{3}{2}}}, \quad r=0$$

сходимость которых обеспечит равномерную сходимость рядов (3.4).

ABOUT OPTIMAL CONTROL OF VIBRATIONS OF ROUND PLATE

L. S. SAHAKYAN

ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՂԵԿԱՎԱՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Լ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է ամրացված եզրերով կլոր սալի առանցքասիմետրիկ տատանումների Օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը նրա վերին մակերևույթի վրա բաշխված արտաքին ուժերի միջոցով։ Խնդրի լուծումը կառուցված է շարքի տեսքով Համասեռ խնդրի սեփական ֆունկցիաների օգնությամբ։ Որոշված է օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունը ստացված յուրաքանչյուր հավասարման համար L_2 *դասում։*

Ուսումնասիրված է զուգամիտության հարցեր։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки.—М.: Гостехиздат, 1947.
2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1977.
3. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением.—М.: Наука, 1968.
4. *Ватсон Г. Н.* Теория Бесселевых функций, ч. 1.—М.: Изд. ИЛ, 1949.

Ереванский политехнический
институт

Поступила в редакцию
20.06.1991