ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մեխանիկա 46, № 3–4, 1993 Механика

УДК 539.3:534.1

К УСТОЙЧИВОСТИ МОДУЛЯЦИОННЫХ ВОЛН В ТЕРМОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

БАГДОЕВ А. Г., МОВСИСЯН Л. А.

Изучается устойчивость квазимонохроматической волны цилиндрического изгиба в нелинейно упругой пластинке в связанной задаче термоупругости. Задача решается в рамках классической теории.

Получено уравнение модуляции.

Эффект связанности по сути приводит к явлениям типа вязкости.

Получено, что возможна устойчивость и для «мягких» материалов при определенных условиях.

Изучается устойчивость квазимонохроматической волны цилиндрического изгиба в нелинейно упругой пластинке [1] в связанной задаче термоупругости [2].

Для упругой и вязкоупругой задач подобный анализ сделан в [3—5] и др.

Эффект связанности по сути приводит к явлениям типа вязкости [5].

В рамках классической теории пластин для нелинейно упругого материала [1] с учетом температурных напряжений [2] и уравнения теплопроводности в форме [6], при условии, что температуры одинаковые на внешних плоскостях пластинки, связанная система уравнений теплопроводности и изгибных колебаний имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t}-\varkappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\left(\frac{12\varkappa}{h^2}+\frac{6k}{\rho h c_p}\right)T-\varkappa\eta\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}=0$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+D_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3+\alpha_t(1+\nu)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{1.1}$$

Здесь, в основном, сохранены обычные обозначения величин для пластин и [2, 6], отметим только, что для нелинейного коэффициента имеем [4]

$$D_1=\frac{4}{45}\gamma_2 h^2\frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^3}$$

Решение (1.1) будем искать в виде

$$T=b_1e^{i\tau}+\bar{b}_1e^{-i\tau},\quad w=a_1e^{i\tau}+\bar{a}_1e^{-i\tau}$$

$$\tau=\alpha x-\omega t \tag{1.2}$$

которое дает следующее дисперсионное соотношение:

$$\left(\alpha^4-\frac{\rho h}{D}\omega^2+D_2a_1\bar{a}_1\alpha^8\right)(\varkappa_1-i\omega)-i\alpha_t(1+\nu)\varkappa\gamma_t\omega\alpha^4=0 \tag{1.3}$$

где

$$\varkappa_1=\frac{12\varkappa}{h^2}+\frac{6k}{\rho hc_p}, \quad D_2=3D_1e^{2\omega_2t}$$

а ω_2 — мнимая часть линейной частоты $\omega_0=\omega_1+i\omega_2$.

Дифференциальное уравнение, соответствующее (1.3), имеет вид

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+D_2a_1\bar{a}_1\frac{\partial^8}{\partial x^8}\right)\left(\varkappa_1+\frac{\partial}{\partial t}\right)W+\alpha_t(1+\nu)\varkappa\gamma_t\frac{\partial^5 W}{\partial x^4\partial t}=0 \tag{1.4}$$

где

$$W=a_1e^{i\theta}$$

Уравнение модуляции получим из (1.4), записывая W в виде $W=A(x,t)\exp[i(\alpha x-\omega_0t)]$ и удерживая производные от медленно изменяющейся амплитуды A до второго порядка включительно. Тогда получится следующее уравнение модуляции:

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\left(\frac{d\omega_1}{d\alpha}+i\alpha_1\omega_2\right)\frac{\partial A}{\partial x}-\left(\frac{i}{2}\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}+\alpha_2\omega_2\right)\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+(i\alpha_3-\alpha_4)A|A|^2=0 \tag{1.5}$$

При выводе (1.5) учтено, что $\frac{\partial}{\partial t}\approx-\frac{d\omega_1}{d\alpha}\frac{\partial}{\partial x}$ [7], где для малой „диссипации" (ω_2) имеем

$$\omega_1^2=\frac{D}{\rho h}\alpha^4\left(1-\frac{2\omega_2}{\varkappa_1}\right), \quad \frac{2\omega_2}{\varkappa_1}=\frac{D\alpha_t(1+\nu)\varkappa\gamma_t\alpha^4}{D\alpha^4+\rho h\varkappa_1^2}$$

$$\alpha_1=-\frac{2}{\alpha(1+\beta^2)}, \quad \alpha_2=\frac{1+3\beta^2}{\alpha^2(1+\beta^2)}, \quad \alpha_3=\frac{1}{2}D_2\omega_1\alpha^4 \tag{1.6}$$

$$\alpha_4=\frac{D_2\omega_2\alpha^4(\beta^2-1)}{2(1+\beta^2)}, \quad \beta=\frac{\omega_1}{\varkappa_1}$$

Полагая в (1.5) $A=ae^{i\varphi}$ и отделяя действительную и мнимую части, можно получить систему

$$\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{d\omega_1}{d\alpha}\frac{\partial a}{\partial x}-\alpha_1\omega_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\alpha_2\omega_2\left[\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}-\right.$$

$$\left.-a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}\left(2\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)-\alpha_4a^3=0 \tag{1.7}$$

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{d\omega_1}{d\alpha}a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\alpha_1\omega_2\frac{\partial a}{\partial x}-\alpha_2\omega_2\left(2\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}\left[\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}-a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]+\alpha_3a^3=0$$

Для исследования на устойчивость следует полагать

$$a=a_0(t)+a'(x,t), \quad \varphi=\varphi_0(t)+\varphi'(x,t) \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в (1.7), для невозмущенной задачи получим

$$\frac{da_0}{dt}=\alpha_4 a_0^3, \quad \frac{d\varphi_0}{dt}=-\alpha_3 a_0^2 \tag{1.9}$$

а если решение возмущенной задачи в линейном приближении искать в виде

$$a'=F\exp[i(Kx-\Omega t)], \quad \varphi'=\Phi\exp[i(Kx-\Omega t)] \tag{1.10}$$

для Ω получим уравнение

$$z^2-3\alpha_4 a_0^2 z+z_1(z_1+2\alpha_3 a_0^2)=0 \tag{1.11}$$

где

$$z=-i\Omega+iK\frac{d\omega_1}{d\alpha}+\alpha_2\omega_2 K^2$$

$$z_1=\frac{1}{2}K^2\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}+i\alpha_1\omega_2 K \tag{1.12}$$

Условие устойчивости волн модуляции будет $\Omega_2\leqslant 0$, $\Omega=\Omega_1+i\Omega_2$

Анализ (1.11) приводит к следующему выводу: имеется устойчивость:

I случай—при $\gamma_2<0$ $(\alpha_3<0,\ \alpha_4<0)$, когда

$$\omega_2\alpha_2K^2+\frac{3}{2}|\alpha_4|a_0^2\geqslant\frac{\omega_2\alpha_1\left(K^3\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}+2|\alpha_3|a_0^2K\right)}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}K^2\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}\right)^2+\alpha_3 a_0^2K^2\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}}} \tag{1.13}$$

если $\left(\frac{1}{2}K^2\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}\right)^2>|\alpha_3|a_0^2K^2\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}$ и

$$\omega_2\alpha_2K^2+\frac{3}{2}|\alpha_4|a_0^2\geqslant\sqrt{-\left(\frac{1}{2}K^2\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}\right)^2|\alpha_3|a_0^2K^2\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}} \tag{1.14}$$

если $\left(\frac{1}{2}K^2\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}\right)^2<|\alpha_3|a_0^2K^2\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}$

II случай—при $\gamma_2>0$ устойчивость будет, если

$$\omega_2\alpha_2K^2\geqslant\frac{3}{2}\alpha_4a_0^2+ \tag{1.15}$$

$$+\frac{\omega_2\alpha_1\left(K^3\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}+2\alpha_3a_0^2K\right)}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}K^2\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}\right)^2+\alpha_3a_0^2K^2\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}}}$$

Но учитывая, что K — малая величина, последнее неравенство трудно достижимо.

Условия (1.13) — (1.15) получат более обозримый вид, если довольствоваться адиабатическим приближением. Как известно, для пластинки модуляционная волна устойчива при $\gamma_2>0$ и неустойчива при $\gamma_2<0$ [4]. Здесь в адиабатическом приближении при $\gamma_2<0$ устойчивость будет, когда

$$\omega_2\alpha_2K^2+\frac{3}{2}|\alpha_4|a_0^2\geqslant Ka_0\sqrt{\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}|\alpha_3|} \tag{1.16}$$

а при $\gamma_2>0$, когда

$$\omega_2\alpha_2K^2\geqslant\frac{3}{2}\alpha_4a_0^2+\frac{\omega_3\alpha_1}{a_0\sqrt{\alpha_3\frac{d^2\omega_1}{d\alpha^2}}} \tag{1.17}$$

Для несвязанной задачи $\omega_2=\alpha_4=0$ и условие устойчивости (1.16) и (1.17) превращается в $(d^2\omega_1/d\alpha^2)\alpha_3>0$ [7].

В полученных выводах интересно то, что если для несвязанной задачи ($\alpha_1=\alpha_4=0$) в зависимости от знака γ_2 имеем устойчивость или неустойчивость, то теперь неустойчивость может превратиться в устойчивость и наоборот.

ABOUT STABILITY OF MODULATION WAVES IN THERMOELASTIC PLATE

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԱԼՈՒՄ ՄՈԴՈՒԼԱՑԻՈՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է ոչ գծային առաձգական սալում միաչափ ալիքների տարածումը և նրա մոդուլացիոն կայունությունը, երբ հաշվի է առնվում ջերմային էֆեկտները։ Վերջինս բերում է մածուցիկության նման երևույթի։ Ստացված է, որ «փափուկ» նյութերի համար էլ հնարավոր է կայունություն

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каудерер Г.* Нелинейная механика.—М.: ИЛ, 1961. 777 с.
2. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости.—М.: Мир, 1970. 256 с.
3. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Квазимонохронологические волны изгиба в нелинейноупругих пластинах.—Изв. АН СССР. МТТ, 1981, №4, с. 169—176.
4. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Некоторые вопросы распространения квазимонохроматических волн в пластинках и оболочках.—Тр. XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ереван, 1980, т. 1, с. 106—112.
5. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.*, К вопросу распространения нелинейных волн в вязкоупругой пластине.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1988, т. 36, №2, с. 3—9.
6. *Болотин В. В.* Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла.—ПММ, 1960, т. 24, вып. 2, с. 361—363.
7. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.—М.: Мир, 1977. 622 с.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию
24.07. 1992