

К ЦИЛИНДРИЧЕСКОМУ ИЗГИБУ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ
 ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Արեւշատյան Ն.Գ., Կիրակոսյան Բ.Մ.

Արևշատյան Ն.Գ., Կիրակոսյան Բ.Մ. Ընդլայնական սահրերի հաշվառմամբ, փոփոխական հաստության, օրթոտրոպ շերտի գլանային ծածան ճախին

Կատարվում է սալերի ճշգրտված տեսության և դրա ամրագրված տարրերակի հիման վրա հաստատուն հաստության օրթոտրոպ շերտի գլանային ծածան խնդրի համար ստացված լուծումների համեմատական վերլուծություն: Տրվում է գծային օրենքով փոխվող հաստության օրթոտրոպ շերտի խնդրի փակ լուծում: Առաջված արդյունքները համեմատվում են սալերի դասական տեսության համապատասխան լուծումների հետ:

Arevshatian N.G., Kirakosian R.M. On the Cylindrical Bending of Orthotropic Strip Variable Thickness with Calculation Cross Displacements

Делается сравнительный анализ решений задачи цилиндрического изгиба ортотропных полос постоянной толщиной, полученных на основе уточненной теории [1] и ее упрощенного варианта [2]. Далее, по теории [2] дается замкнутое решение ортотропной полосы, толщиной которой вдоль ширины меняется по линейному закону. Полученные результаты для случая защемления длинных сторон полосы сравниваются с соответствующими результатами классической теории пластинок.

1. Рассмотрим полосу из упругого ортотропного материала постоянной толщины h и ширины l . Красные условия на длинных сторонах полосы произвольны. Не вдаваясь в подробности, приведем окончательные решения задачи цилиндрического изгиба полосы при некоторых типах нагрузок и граничных условий на основе уточненных теорий [1] и [2] снабдив их соответственно индексами "1" и "2".

а) Полоса вдоль длинных сторон $x=0$, $x=l$ жестко защемлена и несет равномерно распределенную нагрузку интенсивности q . Теория [1] приводит к различным решениям, смотря в каких точках $z = \pm z_0$, симметричных относительно срединной плоскости полосы, удовлетворяется условие заделки $u_x = 0$. Эти решения представим в виде

$$w_1 = \frac{qx(l-x)}{24D_{11}} \left[x(l-x) + 6\frac{B_{11}}{B_{55}}h^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{z_0^2}{3h^2} \right) \right] \quad (1.1)$$

$$M_1 = -\frac{ql}{12} \left[6x^2 - 6lx + l^2 - \frac{6B_{11}}{5B_{55}}h^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{5z_0^2}{3h^2} \right) \right] \quad (1.2)$$

Здесь w_1 - прогиб, M_1 - изгибающий момент, x - координата по ширине,

$D_{11} = B_{11}h^3/12$ - цилиндрическая жесткость полосы, а B_{11} и B_{55} выражаются через упругие постоянные материала по известным формулам [1]

Теория же [2] позволяет условие $u_x = 0$ удовлетворить во всех точках заземленного сечения полосы, в силу чего она приводит к одному решению

$$w_2 = \frac{qx(l-x)}{24D_{11}} \left[x(l-x) + \frac{3B_{11}}{2B_{55}}h^2 \right] \quad (1.3)$$

$$M_2 = -\frac{ql}{12} [6x^2 - 6lx + l^2] \quad (1.4)$$

б) Сторона полосы $x = 0$ закреплена, а сторона $x = l$ свободна и несет нагрузку интенсивности Q . Из [1] имеем

$$w_1 = \frac{Qx}{6D_{11}} \left[x(3l-x) + \frac{1}{2} \frac{B_{11}}{B_{55}} h^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{2x}{h} \right) \right] \quad (1.5)$$

Решение же по теории [2] имеет вид

$$w_2 = \frac{Qx}{6D_{11}} \left[x(3l-x) + \frac{3}{4} \frac{B_{11}}{B_{55}} h^2 \right] \quad (1.6)$$

в) Полоса шарнирно оперта вдоль длинных сторон и несет равномерно распределенную нагрузку интенсивности q . В этом случае к единственному решению приводит и теория [1]

$$w_1 = -\frac{qx}{24D_{11}} \left[x^3 - 2lx^2 + l^3 + \frac{6}{5} \frac{B_{11}}{B_{55}} h^2 (l-x) \right] \quad (1.7)$$

Решение теории [2] имеет вид

$$w_2 = -\frac{qx}{24D_{11}} \left[x^3 - 2lx^2 + l^3 + \frac{3}{2} \frac{B_{11}}{B_{55}} h^2 (l-x) \right] \quad (1.8)$$

Отметим, что для случаев б) и в) не имеет смысла привести выражения изгибающего момента, поскольку из-за статической определенности задач они по обеим теориям совпадают.

Решения (1.1)-(1.8) приводят к следующим заключениям:

1. Поправки к классическим значениям прогибов теории [1], полученные при удовлетворении условиям заделки $u_x = 0$ в точках срединной плоскости полосы $z_0 = 0$, совпадают с соответствующими поправками теории [2]. В остальных же случаях поправки теории [2] получаются незначительно большими.

2. Теория [1] при статической неопределенности задачи (случай а) приводит к ничтожно малым поправкам изгибающего момента. При этом эти поправки в зависимости от положения точек закрепления (значения z_0) имеют разные знаки: при $z_0 > h\sqrt{3/20}$ они положительны, при $z_0 < h\sqrt{3/20}$ отрицательны, а при $z_0 = h\sqrt{3/20}$ превращаются в нуль.

Теория же [2] для изгибающего момента полосы поправок не даст. Очевидно, что появление незначительных поправок неустойчивого знака для изгибающего момента по теории [1] является следствием того, что в рамках этой теории выражения основных напряжений пластинки содержат члены, кубические по поперечной координате z .

Таким образом, для рассмотренных полос постоянной толщины решения задач по двум уточненным теориям [1] и [2] в количественном смысле существенно не отличаются друг от друга.

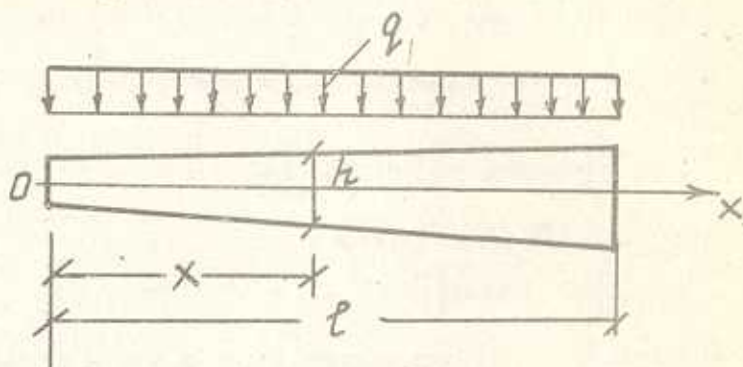
II. Рассмотрим ортогонную полосу ширины l , толщина которой h вдоль длины постоянна, а по ширине меняется линейно (фиг.1). Полоса несет равномерно распределенную нагрузку интенсивности q , приведенной к единице

площади срединной плоскости.

Пусть

$$h = h_0 + h_1 x \quad (2.1)$$

где h_0 и h_1 - постоянные. Полагая, что условия крепления сторон $x=0$, $x=l$ по длине не меняются, можно считать, что все расчетные величины от продольной координаты x не зависят и поперек деформируется по цилиндрической поверхности.



Фиг.1.

Переходим к безразмерным величинам:

$$h = h_0 t, \quad u = h_0 \bar{u}, \quad v = h_0 \bar{v}, \quad w = h_0 \bar{w}, \quad q = B_{11} \bar{q},$$

$$\varphi = B_{11} \bar{\varphi}, \quad \psi_1 = B_{11} \bar{\psi}_1, \quad \varphi_2 = \frac{B_{11}}{h_0} \bar{\varphi}_2, \quad \psi_2 = \frac{B_{11}}{h_0} \bar{\psi}_2,$$

$$\varphi_3 = \frac{B_{11}}{h_0^2} \bar{\varphi}_3, \quad \psi_3 = \frac{B_{11}}{h_0^2} \bar{\psi}_3, \quad T_x = B_{11} h_0 \bar{T}_x, \quad T_y = B_{11} h_0 \bar{T}_y,$$

$$S = B_{11} h_0 \bar{S}, \quad N_x = B_{11} h_0 \bar{N}_x, \quad N_y = B_{11} h_0 \bar{N}_y,$$

$$M_x = B_{11} h_0^2 \bar{M}_x, \quad M_y = B_{11} h_0^2 \bar{M}_y, \quad H = B_{11} h_0^2 \bar{H} \quad (2.2)$$

Здесь t - безразмерная координата, w - прогиб, u, v - тангенциальные перемещения срединной плоскости, T_x, T_y, S, N_x, N_y , и M_x, M_y, H - внутренние усилия и моменты поперечности. Черточкой наверху обозначены безразмерные значения соответствующих величин.

На основе уточненной теории пластинок переменной толщины [2] с учетом обозначений (2.2) для плоской задачи и задачи изгиба полосы имеем:

а) плоская задача

$$\frac{d}{dt} \left(t \frac{d\bar{u}}{dt} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(t \frac{d\bar{v}}{dt} \right) = 0 \quad (2.3)$$

$$\bar{\varphi}_2 = \frac{h_1^2}{t} \frac{d\bar{u}}{dt}, \quad \bar{\psi}_2 = \frac{B_{66} h_1^2}{B_{11} t} \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (2.4)$$

$$\bar{T}_x = h_1 t \frac{d\bar{u}}{dt}, \quad \bar{T}_y = \frac{B_{12}}{B_{11}} \bar{T}_x, \quad \bar{S} = \frac{B_{66} h_1 t}{B_{11}} \frac{d\bar{v}}{dt} \quad (2.5)$$

б) задача изгиба

$$t \frac{d\bar{\varphi}}{dt} + 2\bar{\varphi} = -\frac{3\bar{q}}{2h_1}$$

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d^2 \bar{w}}{dt^2} \right) - \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{1}{h_1} \left(r^2 \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \right) + \frac{8\bar{\varphi}}{h_1^3} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\bar{\psi}_1}{dt} \right) - \frac{8B_{44}}{B_{66}} \frac{1}{h_1^2} \bar{\psi}_1 = 0$$

$$\bar{\varphi}_3 = -\frac{1}{r^2} \left[4\bar{\psi}_1 + h_1^2 t \left(h_1 \frac{d^2 \bar{w}}{dt^2} - \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \right) \right]$$

$$\bar{\psi}_3 = -\frac{1}{r^2} \left(4\bar{\psi}_1 + h_1^2 t \frac{B_{66}}{B_{44}} \frac{d\bar{\psi}_1}{dt} \right)$$

$$\bar{N}_x = \frac{t}{12} (12\bar{\varphi}_1 + r^2 \bar{\varphi}_3), \quad \bar{N}_y = \frac{t}{12} (12\bar{\psi}_1 + r^2 \bar{\psi}_3)$$

$$\bar{M}_x = -\frac{h_1 r^3}{12} \left(h_1 \frac{d^2 \bar{w}}{dt^2} - \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \right), \quad \bar{M}_y = \frac{B_{12}}{B_{11}} \bar{M}_x,$$

$$\bar{H} = \frac{B_{66}}{12B_{44}} h_1 r^3 \frac{d\bar{\psi}_1}{dt}$$

Решения этих задач имеют вид:

а) плоская задача

$$\bar{u} = C_1 \ln t + C_2, \quad \bar{v} = C_3 \ln t + C_4$$

$$\bar{\varphi}_2 = h_1^2 \frac{C_1}{r^2}, \quad \bar{\psi}_2 = \frac{B_{66} h_1^2 C_3}{B_{11} r^2}, \quad \bar{T}_x = h_1 C_1,$$

$$\bar{T}_y = \frac{B_{12}}{B_{11}} h_1 C_1, \quad \bar{S} = \frac{B_{66}}{B_{11}} h_1 C_3$$

б) задача изгиба

$$\bar{\varphi} = C_5 \frac{1}{r^2} - \frac{3\bar{q}}{4h_1}$$

$$\bar{w} = \frac{6\bar{q}}{h_1^3} t (\ln t - 1) + \frac{C_5}{h_1} \left(\frac{4}{h_1^2} - \frac{B_{11}}{B_{55}} \right) \frac{1}{t} + C_6 \ln t + C_7 t + C_8$$

$$\bar{\psi}_1 = C_9 t^{n_1} + C_{10} t^{n_2}, \quad n_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{32B_{44}}{h_1 B_{11}}}$$

$$\bar{\varphi}_3 = \frac{1}{r^2} \left(\frac{C_6 h_1^3}{t} - 12 \frac{C_5}{r^2} - \frac{3\bar{q}}{h_1} \right)$$

$$\bar{\psi}_3 = C_9 \left(\frac{B_{66} h_1^2 n_1 - 4}{B_{44}} \right) t^{n_1 - 2} + C_{10} \left(\frac{B_{66} h_1^2 n_2 - 4}{B_{44}} \right) t^{n_2 - 2}$$

$$\bar{M}_x = \frac{h_1 r^2}{12} \left(\frac{8C_5}{h_1^2 r^2} + \frac{6\bar{q}}{h_1^3} - \frac{C_6 h_1}{t} \right), \quad \bar{M}_y = \frac{B_{12}}{B_{11}} \bar{M}_x,$$

$$\bar{H} = \frac{B_{66} h_1}{12B_{44}} (C_9 n_1 t^{n_1 + 2} + C_{10} n_2 t^{n_2 + 2})$$

Постоянные интегрирования C_i подлежат определению из граничных

на краях полосы $x=0, x=l$.

3. Пусть полоса жестко закреплена вдоль сторон $x=0, x=l$. Граничные условия в этом случае принимают вид:

$$\text{при } t_1 = 1 \text{ и } t_1 = 1 + \frac{h_1 l}{h_0}$$

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{v} = 0 \quad (3.1)$$

$$\bar{w} = 0, \quad -h_1 \frac{d\bar{w}}{dt} + \frac{B_{11}}{B_{55}} \bar{\varphi}_1 = 0, \quad \bar{\psi}_1 = 0 \quad (3.2)$$

С учетом (3.1) и (2.13) нетрудно убедиться, что в данном случае плоская задача имеет тривиальное решение

$$\bar{u} = \bar{v} = 0, \quad \bar{\varphi}_2 = \bar{\psi}_2 = 0, \quad \bar{T}_x = \bar{T}_y = \bar{\Sigma} = 0 \quad (3.3)$$

Удовлетворив последним условиям (3.2) с учетом (2.17), находим

$$C_9 + C_{10} = 0$$

$$C_9 t_1^{\eta_1} + C_{10} t_1^{\eta_2} = 0 \quad (3.4)$$

Поскольку определитель этой системы отличен от нуля, то

$$C_9 = C_{10} = 0 \quad (3.5)$$

Следовательно,

$$\psi_1 = 0 \quad (3.6)$$

С учетом (2.15) и (2.16) первые два условия (3.2) принимают вид:

$$\frac{4}{h_1^2 t_i} C_5 - \frac{h_1}{t_i} C_6 - h_1 C_7 = \frac{\bar{q}}{h_1} \left(\frac{6 \ln t_i}{h_1^2} + \frac{3 B_{11}}{4 B_{55}} \right),$$

$$\frac{1}{h_1 t_i} \left(\frac{4}{h_1^2} - \frac{B_{11}}{B_{55}} \right) C_5 + \ln t_i C_6 + t_i C_7 + C_8$$

$$= \frac{6 \bar{q}}{h_1^2} t_i (1 - \ln t_i), \quad (i = 1, 2) \quad (3.7)$$

Это и есть система алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования $C_5 - C_8$.

С целью сравнения приведем решение рассматриваемой задачи еще и в рамках классической теории пластинок, не учитывающей влияния поперечных сдвигов. Эти решения имеют вид:

$$\bar{u}^0 = \bar{v}^0 = 0 \quad (3.8)$$

$$\bar{w}^0 = \frac{6 \bar{q}}{h_1^2} t_i (\ln t_i - 1) + \frac{12 C_1^0}{h_1^2} \ln t_i - \frac{6 C_2^0}{h_1^2} \frac{1}{t_i} + C_3^0 t_i + C_4^0$$

$$\bar{M}_x^0 = -\frac{\bar{q} t_i^2}{2 h_1^2} + C_1^0 t_i + C_2^0 \quad (3.9)$$

Постоянные интегрирования C_1^0 определяются из граничных условий, которые приводятся к системе

$$\frac{12}{h_1^2 t_i} C_1^0 + \frac{6}{h_1^2 t_i^2} C_2^0 + C_3^0 = -\frac{6 \bar{q}}{h_1^2} \ln t_i$$

$$\frac{12}{h_1^3} \ln t_i C_1^0 - \frac{6}{h_1^2 t_i} C_2^0 + t_i C_3^0 + C_4^0 = \frac{6\bar{q}}{h_1^2} t_i (1 - \ln t_i), \quad (i=1,2) \quad (3.10)$$

4. Пусть

$$h_0/l = 0,05, \quad \bar{q} = 10^3 \quad (4.1)$$

Будем рассматривать случай ортотропной и изотропной полос, защемленных вдоль длинных сторон. Для материала ортотропной полосы положим:

$$\begin{aligned} E_2 = 0,5E_1, \quad E_3 = 0,2E_1, \quad \nu_{12} = 0,3, \quad \nu_{23} = 0,5\nu_{12}, \\ \nu_{31} = 0,5\nu_{12}, \quad G_{12} = 0,2E_1, \quad G_{13} = 0,1E_1, \quad G_{23} = 0,2E_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Пусть материал изотропной полосы характеризуется модулем упругости E и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$.

Пользуясь общеизвестными формулами [1] вычислим отношение B_{11}/B_{55} . Для рассмотренных случаев оно принимает значение:

$$\begin{aligned} \text{для ортотропной полосы} - 12,195 \\ \text{для изотропной} - 2,857 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таблица 2

Классическая теория

h_1	$\bar{M}_1 \times 10^3$	\bar{x}_M	$\bar{M}_2 \times 10^3$	$\bar{M}_3 \times 10^3$	\bar{x}_w	\bar{w}_{\max}
0,05	-21,18	0,43	16,05	-48,60	0,43	1,64
0,10	-15,66	0,39	15,16	-58,63	0,38	0,78
0,15	-12,46	0,37	14,36	-69,98	0,35	0,45
0,20	-10,36	0,34	13,66	-71,75	0,33	0,29
0,25	-8,85	0,33	13,04	-81,90	0,31	0,20

Уточненная теория (изотропная полоса)

h_1	$\bar{M}_1 \times 10^3$	\bar{x}_M	$\bar{M}_2 \times 10^3$	$\bar{M}_3 \times 10^3$	\bar{x}_w	\bar{w}_{\max}
0,05	-21,23	0,43	16,06	-48,49	0,43	1,77
0,10	-15,73	0,39	15,20	-58,41	0,37	0,89
0,15	-12,56	0,37	14,44	-65,58	0,35	0,54
0,20	-10,48	0,35	13,80	-71,10	0,33	0,37
0,25	-9,01	0,33	13,26	-73,88	0,31	0,27

Уточненная теория (ортотропная полоса)

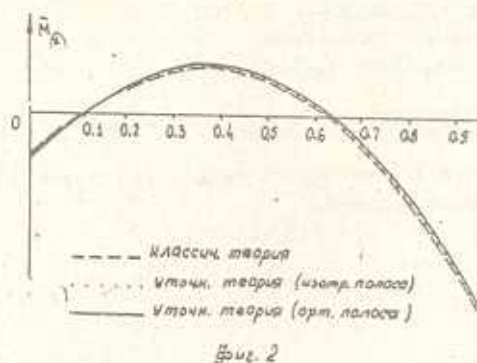
h_1	$\bar{M}_1 \times 10^3$	\bar{x}_M	$\bar{M}_2 \times 10^3$	$\bar{M}_3 \times 10^3$	\bar{x}_w	\bar{w}_{\max}
0,05	-21,35	0,43	16,10	-48,26	0,42	2,56
0,10	-15,93	0,39	15,31	-57,83	0,38	1,26
0,15	-12,83	0,37	14,66	-64,52	0,35	0,85
0,20	-10,81	0,35	14,16	-70,78	0,32	0,63
0,25	-9,38	0,34	13,77	-73,28	0,31	0,49

В табл.2 представлены безразмерные значения некоторых расчетных величин изотропной и ортотропной полос различных переменных толщин, полученные на основе классической и уточненной теории пластинок. При этом через \bar{M}_1 и \bar{M}_3 обозначены опорные моменты, а через \bar{M}_2 - экстремум изгибающего момента, который возникает в сечении с координатой x_M . Как и следовало ожидать, наибольший изгибающий момент получается на толстом краю полосы.

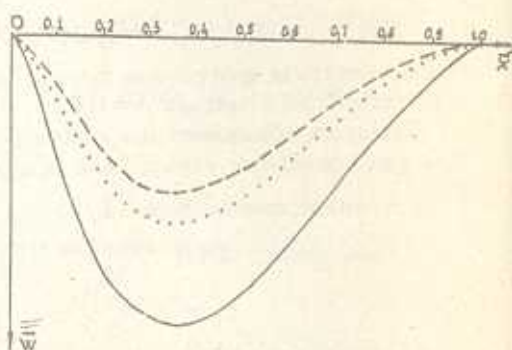
$$\bar{x} = 1.$$

В последнем столбце табл.2 приведены безразмерные значения максимального прогиба \bar{w}_{\max} получаемых в сечениях полосы \bar{x}_m . На фиг.2 и 3 построены графики изгибающих моментов и прогибов полосы при $h_1 = 0,15$.

Из этих графиков видно, что изгибающие моменты полосы по классической и уточненной теориям, как и следовало ожидать, практически совпадают. Поправка, вносимая уточненной теорией, заметна лишь для прогибов полосы.



фиг. 2



фиг. 3

В зависимости от характера анизотропии она может оказаться весьма существенной. Например, поправка к максимальному значению прогибов изотропной полосы составляет примерно 20%, а для рассматриваемой ортотропной полосы она доходит до 85%.

Таблица 3

$$\tau_{xz}/B_{11} \times 10^3$$

z/h	$\bar{x} = 0$		$\bar{x} = 0,367$		$\bar{x} = 1$	
	изотр.	ортотр.	изотр.	ортотр.	изотр.	ортотр.
0	13,85	14,01	-0,73	-0,77	-3,82	-3,81
0,05	13,66	13,81	-0,70	-0,75	-3,80	-3,79
0,10	13,07	13,22	-0,64	-0,68	-3,74	-3,73
0,15	12,09	12,23	-0,53	-0,57	-3,64	-3,63
0,20	10,73	10,84	-0,37	-0,41	-3,51	-3,49
0,25	08,97	09,06	-0,18	-0,21	-3,33	-3,31
0,30	06,83	06,89	0,07	0,04	-3,11	-3,09
0,35	04,29	04,32	0,35	0,33	-2,85	-2,83
0,40	01,37	01,35	0,68	0,66	-2,56	-2,53
0,45	-01,95	-02,01	1,06	1,04	-2,22	-2,19
0,50	-05,65	-05,77	1,47	1,47	-1,84	-1,81

Таблица 4 $\sigma_{\max}/\tau_{\max}$

h_1	изотр.	ортотр.
0,05	8,67	8,78
0,06	8,22	8,25
0,07	7,76	7,79
0,08	7,35	7,39
0,09	6,99	7,03
0,10	6,67	6,67
0,11	6,37	6,42
0,12	6,11	6,15
0,13	5,87	5,91
0,14	5,65	5,70
0,15	5,44	5,49
0,16	5,25	5,31
0,17	5,08	5,13
0,18	4,92	4,97
0,19	4,77	4,82
0,20	4,62	4,68
0,21	4,49	4,55
0,22	4,37	4,43
0,23	4,25	4,31
0,24	4,14	4,20
0,25	4,04	4,10

В табл.3 приведены значения безразмерного касательного напряжения $\bar{\tau}_{xz} = \tau_{xz}/B_{11}$ в опорных сечениях $\bar{x} = 0, \bar{x} = 1$ и в сечении максималь

В табл.4 представлены отношения максимальных значений нормальных значений нормального и касательного напряжения. Оба эти напряжения свои наибольшие значения принимают в тонком сечении полосы $\bar{x} = 0$. Причем, наибольшее нормальное напряжение получается в крайних точках, а наибольшее касательное напряжение - в середине этого сечения. Как видно из данных табл.4, с увеличением толщины (параметра h_1) отношение $\sigma_{\max}/\tau_{\max}$ убывает. В рассмотренных пределах изменения h_1 оно доходит до 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1987. 360 с.
2. Киракосян Р.М. Об одной уточненной теории анизотропных пластин переменной толщины. - Изв. АН РА, Механика, 1991, т. 44, №3.

Институт механики АН Армении
Поступила в редакцию 8.07.1992