ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 46, № 1-2, 1993 Механика

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЯМИ ОРТОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ УСЛОВИИ МИНИМУМА ЕЕ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ

Саакян Л. С.

Սահակյան Լ.Ս. Ուղղանկյուն, օրթոտրոպ սալի տատանումների օպտիմալ ղեկավարման մասին նրա լրիվ էներգիայի մինիմիզացման դեպքում

Դիտարկված է եզրերը հոդակապորեն ամրակցված ուղղանկյուն, օրթոտրոպ սալի տատանումների օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը, որը վերին մակերևույթի վրա բաշխված արտաքին ուժերի միջոցով: Որպես օպտիմալության հայտանիշ վերցված է սալի ամբողջ էներգիան: Ղեկավարման խնդիրը բերված է վարիացիոն խնդրի, որի համար կատարված են ուժեղ մինիմումի բավարար պայմանները:

Sahakyan L.S. About Optimal Control of Orthotropic Right-angler Plate Vibrations on Conditions of Minimum of its Full Energy

Рассматривается задача об оптимальном управлении колебаниями шарнирно опертой по краям прямоугольной ортотропной пластинки при помощи внешних сил нормально распределенных по всей ее поверхности. В процессе управления минимизируется полная энергия пластинки. Задача управления сводится к вариационной задаче, для которой, как показано, выполнены достаточные условия сильного минимума.

1.Прямоугольная однородная ортотропная пластинка, у которой главные направления упругости параллельны направлениям сторон, оперта (шарнирно закреплена) по всем сторонам и колеблется нормальной нагрузкой $f(t,x,y)$, распределенной по всей ее поверхности. Направляя оси ox и oy вдоль сторон $(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b)$ и рассматривая малые поперечные колебания, уравнения движения пластинки можно записать в виде ([1], с.244):

$$\frac{g}{h\gamma}\left(D_1\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right)+\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=\frac{g}{h\gamma}f(t,x,y) \tag{1.1}$$

где $W(t,x,y)$ - поперечное отклонение точки (x,y) пластинки в момент t; h-толщина; γ - удельный вес материала; D_i, $i=\overline{1,3}$ - постоянные. Прогиб $W(t,x,y)$ должен удовлетворять следующим граничным условиям:

$$W(t,0,y)=W(t,a,y)=0,\quad M_x(t,0,y)=M_x(t,a,y)=0,$$

$$W(t,x,0)=W(t,x,b)=0,\quad M_y(t,x,0)=M_y(t,x,b)=0 \tag{1.2}$$

M_x, M_y - изгибающие моменты вдоль осей ox и oy соответственно.

Потенциальная и кинетическая энергия пластинки будут ([1],с.240)

$$V=\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^a\int_0^b\left[D_1\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2+2\nu_2 D_1\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right.$$

$$\left.+D_2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2+4D_0\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\,dt$$

$$T=\frac{h\gamma}{2g}\int_0^T\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 dx\,dy\,dt \tag{1.3}$$

Количество энергии, затраченное на формирование управляющего воздействия $f(t,x,y)$, можно охарактеризовать (оценить) функционалом

$$J=\int_0^T\int_0^a\int_0^b[f(t,x,y)]^2 dx\,dy\,dt \tag{1.4}$$

Пусть усилия $f(t,x,y)$ сообщают в момент $t=0$ следующие прогибы и скорости:

$$W(0,x,y)=\varphi(x,y),\quad \frac{\partial W(t,x,y)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x,y) \tag{1.5}$$

Задача 1.1. Требуется определить внешнюю нагрузку $f(t,x,y)$ так, чтобы при некотором конечном $t=T>0$ пластинку из заданного начального состояния (1.5) перевести в состояние

$$W(T,x,y)=0,\quad \frac{\partial W(t,x,y)}{\partial t}\bigg|_{t=T}=0 \tag{1.6}$$

с соблюдением граничных условий (1.2), минимизировав при этом функционал (1.3)-(1.4)

$$H=T+V+J \tag{1.7}$$

характеризующий полную энергию системы.

Вводя независимую переменную τ по формуле $\tau=t\sqrt{\frac{g}{h\gamma}}$ и сохраняя за новой переменной старое обозначение, уравнение (1.1) приведем к виду:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\Delta\Delta W=f(t,x,y),\ \Delta\Delta=D_1\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4}{\partial y^4} \tag{1.8}$$

В случае, когда $f(t,x,y)=0$, собственные числа и собственные функции краевой задачи (1.8), (1.2) известны

$$\lambda_{km}^2=\pi^4\left(D_1\frac{k^4}{a^4}+2D_3\frac{k^2m^2}{a^2b^2}+D_2\frac{m^4}{b^4}\right),$$

$$\theta_{km}(x,y)=\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right),\ k,m=1,2,3,\ldots$$

Эта система собственных функций является полной в пространстве $L_2((0,a)\times(0,b))$.

Исходя из граничных условий (1.2), решение уравнения (1.8), а также задачи 1.1 целесообразно искать в виде

$$W(t,x,y)=\sum_{k,m=1}^{\infty}W_{km}(t)\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

$$W_{km}(t)=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b W(t,x,y)\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dxdy$$

$$f(t,x,y)=\sum_{k,m=1}^{\infty}u_{km}(t)\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

$$u_{km}(t)=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(t,x,y)\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dxdy \qquad (1.9)$$

Подставив теперь разложение (1.9) в уравнение (1.8), для неизвестных коэффициентов $W_{km}(t)$ и $u_{km}(t)$ получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2W_{km}}{dt^2}+\lambda_{km}^2W_{km}=u_{km}, \quad k,m=1,2,3,\ldots \qquad (1.10)$$

Из начальных условий (1.5) следует, что

$$W_{km}(0)=\varphi_{km}, \quad \frac{dW_{km}(0)}{dt}=\psi_{km}$$

$$\varphi_{km}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b \varphi(x,y)\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dxdy$$

$$\psi_{km}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b \psi(x,y)\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dxdy, \quad k,m=1,2,3,\ldots \qquad (1.11)$$

Условия (1.6), с учетом полноты системы собственных функций, приводят к следующим равенствам:

$$W_{km}(T)=0, \quad \frac{dW_{km}(T)}{dt}=0, \quad k,m=1,2,3,\ldots \qquad (1.12)$$

Подставив теперь в (1.7) разложения (1.9), получим

$$H=T+V+J=\frac{ab}{8}\sum_{k,m=1}^{\infty}\int_0^{T_0}\left[\left(\frac{dW_{km}}{dt}\right)^2+\lambda_{km}^2W_{km}^2+u_{km}^2\right]dt$$

$$=\frac{ab}{8}\sum_{k,m=1}^{\infty}H_{km} \qquad (1.13)$$

Возможность почленного дифференцирования и интегрирования рассмотренных рядов будет установлена ниже. Ввиду того, что каждое уравнение системы (1.10) не зависит от других уравнений этой системы, а функционал

$$H_{km}=\int_0^{T_0}\left[\left(\frac{dW_{km}}{dt}\right)^2+\lambda_{km}^2W_{km}^2+u_{km}^2\right]dt\geq 0 \qquad (1.14)$$

зависит только от управления $u_{km}(t)$, то минимизация функционала (1.13) эквивалента минимизации каждого из независимых функционалов (1.14). Таким образом, задача I.I приводится к задаче оптимального управления системы (1.10), (1.14) с начальными и конечными условиями (1.11), (1.12) в пространстве $L_2(0,T_0)$.

2.Посколькузадачаоптимальногоуправлениясистемы(1.10),(1.4)впространстве $L_2(0,T_0)$неразрешима,тозаменимееэквивалентнойвариационнойзадачей.

Подставим выражение (1.10) для $_{km}(t)$ в функционал

$$H_{km} = \int_0^{T_0} \left[\left(\frac{dW_{km}}{dt}\right)^2 + \lambda_{km}^2 W_{km}^2 + u_{km}^2 \right] dt$$

$$= \int_0^{T_0} F_{km}\left(W_{km}, \frac{dW_{km}}{dt}, \frac{d^2 W_{km}}{dt^2}\right) dt \tag{2.1}$$

и вместо соответствующей задачи оптимальоного управления рассмотрим задачу на экстремум функционала (2.1) при следующих закрепленных граничных условиях:

$$W_{km}(0) = \varphi_{km}, \quad \frac{dW_{km}(0)}{dt} = \psi_{km},$$

$$W_{km}(T_0) = 0, \quad \frac{dW_{km}(T_0)}{dt} = 0 \tag{2.2}$$

Необходимое условие экстремума приводит к уравнению Эйлера-Пуассона ([2], с.345)

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{dF_{km}}{dW_{km}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{dF_{km}}{dW_{km}}\right) + \frac{dF_{km}}{dW_{km}} = 0$$

$$W'_{km} + (2\lambda_{km}^2 - 1) W_{km} + \lambda_{km}^2(\lambda_{km}^2 + 1) W_{km} = 0 \tag{2.3}$$

а его интегральные кривые являются экстремалями рассматриваемой вариационной задачи (2.1), (2.2).

Рассмотрим выражение

$$\theta(\nu E G a b h) =$$

$$= \frac{6(1-\nu_1\nu_2)}{h^3\pi^4\left[E_1\left(\frac{1}{a^4} + \frac{\nu_2}{a^2 b^2}\right) + \frac{4G(1-\nu_1\nu_2)}{a^2 b^2} + E_2\left(\frac{1}{b^4} + \frac{\nu_1}{a^2 b^2}\right)\right]} \tag{2.4}$$

Пусть параметры, характеризующие пластинку, таковы, что $\theta(\nu E G a b h) < 1$. Тогда корни характеристического уравнения, соответствующей (2.3), будут иметь следующий вид:

$$\mu_{km} = \pm\frac{1}{2}\Big(\sqrt{1 - 2\lambda_{km}^2 + 2\lambda_{km}\sqrt{\lambda_{km}^2 + 1}}$$

$$\pm i\sqrt{-1 + 2\lambda_{km}^2 + 2\lambda_{km}\sqrt{\lambda_{km}^2 + 1}}\Big) = \pm\frac{1}{2}(\alpha_{km} \pm i\beta_{km}) \tag{2.5}$$

Очевидно, что $\frac{\alpha_{km}}{\beta_{km}} < 1$, а $\lim\limits_{km\to\infty}\frac{\alpha_{km}}{\beta_{km}} = 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{1 - 2x^2 + 2x\sqrt{x^2+1}}$ при $x \in [0, +\infty)$. Для всех $x \in [0, +\infty)$, $f'(x) > 0$, а $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \sqrt{2}$, то есть функция $f(x)$ в $[0; +\infty)$, монотонно возрастая, стремится к пределу $\sqrt{2}$, $1 \le f(x) < \sqrt{2}$. Теперь нетрудно заметить, что при $x \ne 0$, $x = \lambda_{km}$ $f(\lambda_{km}) = \alpha_{km}$, то есть $\lim\limits_{km\to\infty}\alpha_{km} = \sqrt{2}$, $1 < \alpha_{km} < \sqrt{2}$, при любых $k, m = 1, 2, 3, \ldots$

Общее решение уравнения (2.3) имеет вид:

$$W_{km}(t) = \exp(\alpha_{km} t)\left(c_1^{(km)}\cos(\beta_{km} t) + c_2^{(km)}\sin(\beta_{km} t)\right)$$

$$+\exp(-\alpha_{km}t)\left(c_3^{(k,m)}\cos(\beta_{km}t)+c_4^{(k,m)}\sin(\beta_{km}t)\right) \tag{2.6}$$

где $c_j^{(k,m)}$, $(j=\overline{1,4})$ определяются из граничных условий (2.2).

Вычислим определитель системы линейных неоднородных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять постоянные $c_j^{(k,m)}$:

$$\Delta_{km}=2(ch(2T_0\alpha_{km})-1)-4\frac{\alpha_{km}^2}{\beta_{km}^2}\sin^2(\beta_{km}T_0)$$

$$-\frac{\alpha_{km}}{\beta_{km}}\sin(2\beta_{km}T_0)\exp(-2\alpha_{km}T_0) \tag{2.7}$$

Покажем, что всегда можно добиться, чтобы $\Delta_{km}\neq 0$ для любых $k,m=\overline{1;+\infty}$. Для этого оценим выражение (2.7):

$$\Delta_{km}>\bar{\Delta}_{km}=2(ch(2T_0\alpha_{km})-1)-2\left(\frac{\alpha_{km}}{\beta_{km}}+2\frac{\alpha_{km}^2}{\beta_{km}^2}\right)$$

Последовательность $\left\{\bar{\Delta}_{km}\right\}_{k,m=1}^{\infty}$ является монотонно-возрастающей и ограниченной сверху, а

$$\lim_{k,m\to\infty}\bar{\Delta}_{km}=2(ch(2\sqrt{2}T_0)-1)>0$$

Теперь, если выполнено условие $\bar{\Delta}_{11}\geq 0$, то очевидно, что $\Delta_{km}\neq 0$ для любых $k,m=\overline{1;+\infty}$, а если нет, то потребуем его выполнения

$$ch(2T_0\alpha_{11})\geq 1+\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}}+2\frac{\alpha_{11}^2}{\beta_{11}^2} \tag{2.8}$$

Условию (2.8) всегда можно удовлетворить соответствующим выбором времени управления T_0.

Итак,

$$c_1^{(k,m)}=-[(1-\exp(-2\alpha_{km}T_0))\beta_{km}^2+2\alpha_{km}^2\sin^2(\beta_{km}T_0)$$

$$+\alpha_{km}\beta_{km}\sin(2\beta_{km}T_0)]\frac{\varphi_{km}}{\beta_{km}^2\Delta_{km}}-2\alpha_{km}\sin^2(\beta_{km}T_0)\frac{\psi_{km}}{\beta_{km}^2\Delta_{km}},$$

$$c_2^{(k,m)}=-[\alpha_{km}^2\sin(2\beta_{km}T_0)-\alpha_{km}\beta_{km}\exp(-2\alpha_{km}T_0)$$

$$+\alpha_{km}\beta_{km}\cos(2\beta_{km}T_0)]\frac{\varphi_{km}}{\beta_{km}^2\Delta_{km}},$$

$$+[\alpha_{km}\sin(2\beta_{km}T_0)-\beta_{km}(1-\exp(-2\alpha_{km}T_0))]\frac{\psi_{km}}{\beta_{km}^2\Delta_{km}},$$

$$c_3^{(k,m)}=\varphi_{km}-c_1^{(k,m)},$$

$$c_4^{(k,m)}=\frac{1}{\beta_{km}}[\alpha_{km}\varphi_{km}+\psi_{km}-2\alpha_{km}c_1^{(k,m)}-\beta_{km}c_2^{(k,m)}] \tag{2.9}$$

$$W_{km}(t)=[(\exp(\alpha_{km}t)-\exp(-\alpha_{km}t))\cos(\beta_{km}t)-$$

$$-2\frac{\alpha_{km}}{\beta_{km}}\sin(\beta_{km}t)\exp(-\alpha_{km}t)]c_1^{(k,m)}+\varphi_{km}\exp(-\alpha_{km}t)\cos(\beta_{km}t)$$

$$[(\exp(\alpha_{km}t)-\exp(-\alpha_{km}t))\sin(\beta_{km}t)]c_2^{(k,m)}$$

$$+\frac{\alpha_{km}\varphi_{km}+\psi_{km}}{\beta_{km}}\exp(-\alpha_{km}t)\sin(\beta_{km}t) \qquad (2.10)$$

Таким образом, функция (2.10) является экстремалью задачи (2.1), (2.2).

Для проверки достаточных условий минимума функционала (2.1) составим уравнение Якоби и функцию Вейерштрасса ([2], с.375). Вычислим вторую вариацию функционала (2.1)

$$\delta^2 H_{km}=\int_0^{T_0}\Phi(h_{km},h_{km},h'_{km})\,dt=$$

$$=2\int_0^{T_0}[\lambda_{km}^2(1+\lambda_{km}^2)h_{km}^2+2\lambda_{km}^2 h_{km}h'_{km}+h_{km}^2+h'^2_{km}]\,dt$$

составим уравнение Якоби

$$\frac{\partial\Phi}{\partial h_{km}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial h_{km}}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\Phi}{\partial h'_{km}}=0$$

или

$$h''_{km}+(2\lambda_{km}^2-1)h'_{km}+\lambda_{km}^2(\lambda_{km}^2+1)h_{km}=0 \qquad (2.11)$$

Общее решение уравнения (2.11) имеет тот же вид (2.6), однако постоянные интегрирования будут определяться из следующих начальных и граничных условий:

$$h_{km}(0)=0,\ h_{km}(0)=1,\ h'_{km}(0)=0,\ h_{km}(T_0)=0.$$

Из первых трех условий имеем:

$$d_1^{(km)}+d_3^{(km)}=0,\quad \alpha_{km}d_1^{(km)}+\beta_{km}d_2^{(km)}=\frac{1}{2},$$

$$(d_2^{(km)}-d_3^{(km)})\,\alpha_{km}\beta_{km}=0 \qquad (2.12)$$

Общее решение уравнения (2.11), с учетом (2.12) будет

$$h_{km}(t)=2d_1^{(km)}ch(\alpha_{km}t)+\cos(\beta_{km}t)[\ th(\alpha_{km}t)-\frac{\alpha_{km}}{\beta_{km}}tg(\beta_{km}t)]$$

$$+\frac{1}{\beta_{km}}ch(\alpha_{km}t)\sin(\beta_{km}t)$$

где $d_1^{(km)}$ определяется из условия $h_{km}(T_0)=0$ и имеет вид

$$d_1^{(km)}=\frac{tg(\beta_{km}T_0)}{2[\alpha_{km}tg(\beta_{km}T_0)-\beta_{km}th(\alpha_{km}T_0)]}$$

Если функция $h_{km}(t)$ обращается в нуль где-то между нулем и T_0, то для определения $d_1^{(km)}$ в качестве T_0 нужно взять именно это значение, а вместо времени управления значение $T_0-\varepsilon$, где ε - достаточно малое положительное число.

Таким образом, если параметр T_0 выбран согласно указанным условиям, то для всех $t\in[0,T_0-\varepsilon]$ будет выполнено усиленное условие Якоби.

Для составления функции Вейерштрасса функционал (2.1) представим в виде:

$$H_{km}=\int_0^{T_0}\left[x_{1km}^2(\lambda_{km}^4+\lambda_{km}^2)+2\lambda_{km}^2x_{1km}\dot{x}_{2km}+x_{2km}^2+\dot{x}_{2km}^2\right]dt \tag{2.13}$$

где $x_{1km}=W_{km}$, $x_{2km}=\dot{x}_{1km}$. Так как переменные x_{1km}, x_{2km} связаны дифференциальной связью $x_{2km}=\dot{x}_{1km}$, то в переменных x_{1km}, x_{2km} мы имеем вариационную задачу на условный экстремум, поэтому вместо функционала (2.13) рассмотрим функционал

$$H_{km}^*=\int_0^{T_0}\left[x_{1km}^2(\lambda_{km}^4+\lambda_{km}^2)+2\lambda_{km}^2x_{1km}\dot{x}_{2km}+x_{2km}^2+\dot{x}_{2km}^2\right.$$

$$\left.+\mu(t)(\dot{x}_{1km}-x_{2km})\right]dt=\int_0^{T_0}F^*(t,x_{1km},x_{2km},\dot{x}_{1km},\dot{x}_{2km})dt$$

Теперь составим функцию Вейерштрасса:

$$E(t,x_{1km},x_{2km},\dot{x}_{1km},\dot{x}_{2km},p(t,x_{1km}),q(t,x_{1km}))=$$

$$-F^*(t,x_{1km},x_{2km},p(t,x_{1km}),q(t,x_{1km}))-(\dot{x}_{1km}-p)F_p^{*}$$

$$+F^*(t,x_{1km},x_{2km},\dot{x}_{1km},\dot{x}_{2km})-(\dot{x}_{2km}-q)F_q^{*}=(\dot{x}_{2km}-q)^2\geq 0$$

Следовательно, во всех точках (t,x_{1km},x_{2km}) и для произвольных $\dot{x}_{1km}$, $\dot{x}_{2km}$, $E\geq 0$, то есть выполнены достаточные условия сильного минимума.

Таким образом, функция (2.10) доставляет сильный минимум функционалу (2.1).

3. Рассмотрим вопрос о равномерной сходимости рядов (1.9). Для этого достаточно рассмотреть равномерную сходимость следующих рядов:

$$\sum_{k,m=1}^{\infty}W_{km}^2(t),\quad \sum_{k,m=1}^{\infty}u_{km}^2(t) \tag{3.1}$$

Из (2.9), (2.10) следует

$$|c_1^{(km)}|\leq\frac{2}{\Delta_0}(2|\varphi_{km}|+|\psi_{km}|),$$

$$|c_2^{(km)}|\leq\frac{1}{\Delta_0}(3|\varphi_{km}|+2|\psi_{km}|),$$

$$|W_{km}(t)|\leq\frac{1}{\Delta_0}(14ch(\alpha_{km}T_0)+2\Delta_0+8)|\varphi_{km}|$$

$$+\frac{1}{\Delta_0}(8ch(\alpha_{km}T_0)+\Delta_0+4)|\psi_{km}|$$

где $\Delta_0=\min\limits_{k,m}\Delta_{km}$. Учитывая ограниченность Δ_0, будем иметь

$$|W_{km}(t)|\leq M(|\varphi_{km}|+|\psi_{km}|),\ M=const.$$

Для $u_{km}(t)$ имеем

$$u_{km}(t)=\ddot{W}_{km}(t)+\lambda_{km}(t)^2W_{km}(t)=$$

$$=(\lambda_{km}^2+\alpha_{km}^2-\beta_{km}^2)W_{km}(t)$$

$$-2\lambda_{km}\beta_{km}\left[\exp(\alpha_{km}t)(c_1^{(km)}\sin(\beta_{km}t)-c_2^{(km)}\cos(\beta_{km}t))\right.$$

$$+ \exp(-\alpha_{km}t)(-c_3^{(km)}\sin(\beta_{km}t) + c_4^{(km)}\cos(\beta_{km}t))\Big]$$

$$|u_{km}(t)| \le [\lambda^2_{km} + (\alpha_{km}+\beta_{km})^2]\, |W_{km}(t)|$$

или учитывая, что λ^2_{km} и $(\alpha_{km}+\beta_{km})^2$ имеют одинаковый порядок относительно k, m, получим

$$|u_{km}(t)| \le N\lambda^2_{km}(\,|\varphi_{km}| + |\psi_{km}|\,),\ N = const$$

Теперь, для равномерной сходимости рядов (3.1) достаточно, чтобы сходились ряды

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} \lambda^4_{km}\varphi^2_{km}, \quad \sum_{k,m=1}^{\infty} \lambda^4_{km}\psi^2_{km} \tag{3.2}$$

для чего, естественно, предположить

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^{4-\alpha}\partial y^{\alpha}} \in L_2,\ \frac{\partial^4 \dot W}{\partial x^{4-\alpha}\partial y^{\alpha}} \in L_2,\ \alpha = \overline{0,4} \tag{3.3}$$

Тогда из условий (3.3) следует как сходимость рядов ([3], с.144)

$$\sum_{k,m=1}^{\infty}\left(k^{4-\alpha}m^{\alpha}\varphi_{km}\right)^2, \quad \sum_{k,m=1}^{\infty}\left(k^{4-\alpha}m^{\alpha}\psi_{km}\right)^2, \quad \alpha = \overline{0,4}$$

так и сходимость рядов (3.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. -ОГИЗ, М.: Гостехиздат, 1947.*
2. *Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. -М.: Наука, 1969.*
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функционального анализа. М.: Наука, 19*

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 20.06.1991