

## ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В ЭЛЕКТРОТЕХНОЛОГИИ

Гонтаровский П.П., Пантелеят М.Г.

Գոնտարովսկի Պ.Պ., Պանտելյատ Մ.Գ. Հոնծ միջավայրի մեխանիկայի խնդիրները էլեկտրոտեխնոլոգիայում

Այս աշխատանքում քննարկվում են էլեկտրոտեխնոլոգիական գործընթացների ժամանակ հանդիպող ֆիզիկա-մեխանիկական երևույթների մաթեմատիկական նորոգները: Աշխատանքում է առաջադրվում է առաջնային մասերի խնդիրների լուծման մեթոդական: Խնդիրները լուծվում են վերջավոր էլեմենտների մեթոդով:

Gontarovskiy P.P., Pantelyat M.G. Solid Mechanics Problems in Electrotechnology

В работе представлены математические модели физико-механических процессов (изменение электромагнитного, теплового и механического состояния), имеющих место при осуществлении ряда электротехнологических процессов. Описана методика численного решения задач в осесимметричной постановке. Три связанные краевые задачи (моделирование электромагнитного поля, теплопроводности и термоупругопластичности) решаются единым универсальным численным методом - методом конечных элементов.

В современном машиностроительном производстве широкое применение получили прогрессивные технологические процессы обработки металла: индукционный нагрев [1], магнито-импульсная обработка [2], термообработка сериями коротких затухающих импульсов электромагнитного поля [3], контактная сварка [4]. В обрабатываемых изделиях и в рабочих узлах оборудования (индукторах, электродах) протекают взаимосвязанные физико-механические процессы (изменение электромагнитного, теплового и напряженно-деформированного состояния), определяющие ход и результат технологической операции. Исследование связанных полей в данных объектах является актуальной задачей механики электромагнитных сплошных сред и представляет значительный научный и практический интерес.

Задача расчета связанных нелинейных физико-механических процессов в осесимметричной постановке может быть успешно решена с помощью метода конечных элементов (МКЭ) - эффективного численного метода решения задач математической физики [5]. МКЭ представляет собой вариационный метод с кусочно-полиномиальными пробными функциями, позволяющий достаточно точно учитывать сложные криволинейные границы области и краевые условия.

1. Моделирование электрических и магнитных полей

В простейшем случае, осесимметричная индукторная система индукционных и магнито-импульсных установок (фиг.1) включает индуктор 1, обрабатываемую заготовку 2 и диэлектрические подобласти (воздух) 3.

Математическое описание электродинамических процессов в общем случае представляет собой систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (1.1)$$

дополненную материальными уравнениями

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (1.2)$$

где  $\vec{H}$  - вектор напряженности магнитного поля;  $\vec{E}$  - вектор напряженности электрического поля;  $\vec{B}$  - вектор индукции магнитного поля;  $\vec{D}$  - вектор электрической индукции;  $\vec{j}$  - вектор плотности токов проводимости;  $\rho$  - объемная плотность электрических зарядов;  $\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость;  $\mu$  - магнитная проницаемость;  $\gamma$  - удельная электрическая проводимость.

Можно показать, что при анализе процессов в устройствах обработки металлических изделий можно пренебречь плотностью токов смещения  $\partial \vec{D} / \partial t$ . Система уравнений (1.1) упрощается также вследствие отсутствия в индукторной системе объемных электрических зарядов ( $\rho = 0$ ).

При исследовании осесимметричных индукторных систем решение системы уравнений (1.1), (1.2) осуществляется в терминах векторного магнитного потенциала  $A$ , который вводится соотношением

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (1.3)$$

и имеет одну окружную составляющую  $\vec{A}(r, z, t)$ .

Из уравнений (1.1)-(1.3) с учетом сделанных упрощений можно получить уравнение в частных производных, описывающее пространственное и временное распределение электромагнитного поля

$$\gamma \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} rA \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \gamma E_0 \quad (1.4)$$

где  $E_0$  - напряженность стороннего электрического поля, создаваемого генератором установки.

Уравнение (1.4) решается при следующих граничных условиях:  $\partial A / \partial z = 0$  в плоскости симметрии;  $A = 0$  при  $r = 0$ , на достаточно удаленной от индуктора границе  $\Gamma$  (фиг.1)

$$\frac{\partial A}{\partial n} = \alpha_A (A - A_\infty)$$

где  $n$  - нормаль к границе  $\Gamma$ ;  $\alpha_A$  - штрафной множитель;  $A_\infty$  заданное распределение векторного магнитного потенциала вдоль границы  $\Gamma$ . В качестве последнего может быть использовано, например, известное аналитическое решение для соленоида на достаточно больших расстояниях от его центра [6]. Такие смягченные граничные условия принимать предпочтительнее, чем полагать  $A = 0$  или использовать неточно вычисленные значения  $A_\infty$ . Следует отметить, что влияние погрешности граничных условий на удаленной границе не существенно.

Уравнение (1.4) с приведенными выше граничными условиями решается МКЭ при использовании простейшего элемента в виде произвольного четырехугольника с узлами в вершинах с полилинейной аппроксимацией потенциальной функции [5].

Решение уравнения (1.4) является необходимым условием локального экстремума функционала

$$J = \frac{1}{2} \int \int_S \left[ \frac{1}{\mu r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} rA \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 + 2\gamma A \frac{\partial A}{\partial t} - 2\gamma A E_0 \right] r ds + \int_L \alpha_A \left( \frac{A}{2} - A_\infty \right) r dL \quad (1.5)$$

в произвольный момент времени.

Применяя к функционалу (1.5) известную процедуру МКЭ [5] получаем системы разрешающих уравнений для одних элементов, из которых формируем систему для всей расчетной области. При этом для решения нестационарной задачи электродинамики используется неявная конечно-разностная схема Крэнка-Николсона

$$\frac{\partial A(t+\Delta t)}{\partial t} = [A(t+\Delta t) - A(t)] \frac{2}{\Delta t} - \frac{\partial A(t)}{\partial t} \quad (1.6)$$

где  $\Delta t$  - величина шага по времени.

Неявная конечно-разностная схема (1.6) является абсолютно устойчивой и обеспечивает квадратичный закон изменения решения в пределах временного шага.

Полученная система разрешающих уравнений в общем случае является существенно нелинейной, так как магнитная проницаемость  $\mu$  ферромагнитных материалов зависит от напряженности магнитного поля  $H$ . При выполнении численных расчетов реализована кусочно-линейная аппроксимация основной кривой намагничивания  $B(H)$ , обеспечивающая требуемую точность описания магнитных свойств материалов. Для учета зависимости магнитной проницаемости от температуры используется аппроксимация:

$$\mu(H, T) = \mu_0 + \mu(H) - \mu_0 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_k} \right)^m \right], \quad T \leq T_k,$$

$$\mu = \mu_0, \quad T \geq T_k$$

где  $\mu_0$  - магнитная проницаемость вакуума,  $T_k$  - температура точки Кюри ферромагнетика,  $m=2,4$

Для решения нелинейной задачи электродинамики используется эффективный итерационный процесс, заключающийся в уточнении магнитной проницаемости в каждом узле интегрирования. Для ускорения сходимости итерационного процесса  $n$ -е приближение для магнитной проницаемости представляется в виде

$$\frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{\mu_{n-1}} \alpha + \frac{H_{n-1}}{B_{n-1}} (1-\alpha) \quad (1.7)$$

где  $\alpha$  - коэффициент демпфирования итерационного процесса. Выполненные численные эксперименты показали, что оптимальная величина коэффициента  $\alpha$  в формуле (1.7) находится в пределах 0,5-0,75. Указанный итерационный процесс выполняется на каждом временном шаге нелинейной нестационарной задачи электродинамики.

Рассмотрим процесс контактной точечной сварки с использованием сварочной машины переменного тока [4]. Расчетная область для задачи моделирования электрического поля представляет собой сплошное неоднородное цилиндрическое пространство (фиг.2), включающее электрод 1, деталь 2, диэлектрические подобласти (воздух) 3, подобласти контакта электрод-деталь 5.

Задача расчета электрического поля сводится к получению пространственного распределения амплитудного значения потенциала  $U(r, z)$ .

Из уравнения непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = 0$$

с учетом соотношений

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}, \quad \vec{E} = -\nabla U$$

легко получить уравнение, описывающее распределение  $U(r,z)$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial U}{\partial r} \gamma \right) + \frac{1}{r} \gamma \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) должно быть решено при следующих граничных условиях (фиг.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{\Gamma_1} = 0, \\ U \Big|_{\Gamma_2} = U_m \Big|_{\Gamma_2}, \quad U \Big|_{\Gamma_3} = \frac{1}{2} U_m \Big|_{\Gamma_3} \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $U_m$  — амплитудное значение разности потенциалов между электродами.

Решение уравнения (1.8) с граничными условиями (1.9) является необходимым условием локального экстремума функционала

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_S \int_S \left[ \gamma \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] r ds \quad (1.10)$$

Применяя к функционалу (1.10) процедуру МКЭ [5], получаем систему разрешающих уравнений для одного элемента и формируем систему для всей расчетной области.

## 2. Исследование тепловых процессов

Распределение температуры в рассматриваемых рабочих узлах электротехнологического оборудования описывается нестационарным уравнением теплопроводности

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k_r \frac{\partial T}{\partial r} + r k_{rz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{rz} \frac{\partial T}{\partial r} + k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q \quad (2.1)$$

где  $c$  — объемная теплоемкость материала;  $\rho$  — плотность;  $k_r, k_z, k_{rz}$  — компоненты тензора теплопроводности анизотропного материала;  $Q$  — мощность внутренних источников тепла.

Пространственное и, в общем случае, временное распределение величины  $Q$  определяется по результатам расчета электрических и магнитных полей.

После расчета распределения электромагнитного поля в индукторной системе определяется плотность тока в проводящих подобластях конструкции:

$$\delta(t) = \gamma \left( E_0(t) - \frac{\partial A}{\partial t} \right) \quad - \text{ в индукторе}$$

$$\delta(t) = -\gamma \frac{\partial A}{\partial t} \quad - \text{ в заготовке} \quad (2.2)$$

Далее, определяется величина

$$Q = \frac{1}{\gamma} \delta^2 \quad (2.3)$$

в каждом узле проводящих подобластей на всех временных шагах нестационарной задачи электродинамики.

При моделировании процесса обработки заготовки серией коротких затухающих импульсов магнитного поля вычисляется усредненная по периоду следования импульсов  $T_m$  величина

$$Q_{\text{ф}} = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} Q dt \quad (2.4)$$

При исследовании процесса контактной сварки после решения уравнения

(1.8) рассчитываются распределения величин

$$\vec{\sigma} = \gamma \vec{E}, \quad \vec{E} = -\nabla U \quad Q_m = \frac{1}{\gamma} \delta^2 \quad (2.5)$$

где  $Q_m$  — максимальная мощность внутренних источников тепла. Усредняя величину

$$Q(r, z, t) = Q_m(r, z) \sin^2(\omega t + \beta)$$

по периоду колебаний  $T = 2\pi/\omega$ , получаем величину

$$Q_{cp} = \frac{1}{2} Q_m \quad (2.6)$$

которая подставляется в уравнение (2.1).

Обрабатываемые изделия, индукторы и электроды находятся в сложных условиях теплообмена. Уравнение (2.1) в общем случае должно быть решено с граничными условиями 1-го, 2-го или 3-го рода и с учетом теплообмена излучением по закону Стефана-Больцмана. Красная задача сводится к линеаризованному функциональному уравнению [7], которое решается в соответствии с процедурой МКЭ [5,7].

### 3. Задача термоупругопластичности

Задача термоупругопластичности решается с учетом геометрической нелинейности и истории нагружения на той же конечно-элементной сетке, что и задача теплопроводности. В общем случае, рассматриваются анизотропные объекты сложной конфигурации с учетом объемного и поверхностного силового, а также температурного нагружения.

Для определения напряженно-деформированного состояния в конце шага используется линеаризованное вариационное уравнение Лагранжа в приращениях

$$\begin{aligned} & \int_S (\Delta \sigma_{ij}^j \delta \Delta \epsilon_{ij} + {}^{(i)}J^j \delta \Delta \eta_{ij} - \Delta F^j \delta \Delta u_i) r dS - \int_L \Delta P^j \delta \Delta u_i r dL \\ & + \int_S ({}^{(i)}J^j \theta \delta \Delta \epsilon_{ij} - {}^{(i)}F^j \delta \Delta u_i) r dS - \int_L ({}^{(i)}P^j \delta \Delta u_i) r dL = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $S, L$  — площадь меридионального сечения и его граница в исходном (недеформированном) состоянии  $C_0$ ;  ${}^{(i)}J^j$ ,  $\Delta \sigma_{ij}^j$  — компоненты полного тензора и тензора приращений напряжений Пiola, отнесенные к размерам объемного элемента до деформаций;  ${}^{(i)}F^j$ ,  $\Delta P^j$  — компоненты объемной нагрузки в начале шага (состояние  $C_1$ ) и на шаге приращения,  ${}^{(i)}P^j, \Delta P^j$  — компоненты поверхностной нагрузки в состоянии  $C_1$  и на шаге приращения;  $\Delta u_i$  — компоненты приращения перемещений.

Пондеромоторные силы, необходимые для решения уравнения (3.1), рассчитываются по формулам

$$\vec{F} = \vec{F}_j + \vec{F}_I, \quad \vec{F}_j = \vec{\sigma} \cdot \vec{x} \vec{B},$$

$$\vec{F}_I = \frac{1}{\mu_0} [(\vec{I} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{I} \cdot r \alpha \vec{B}], \quad \vec{I} = \vec{B} - \mu_0 \vec{H} \quad (3.2)$$

При решении уравнения (3.1) параметры начала шага считаются известными. Физические соотношения предполагают представление тензора приращений деформаций в виде суммы приращений упругой, температурной и пластической деформаций:

$$\Delta \epsilon_{ij} = \Delta \epsilon_{ij}^e + \Delta \epsilon_{ij}^t + \Delta \epsilon_{ij}^p \quad (3.3)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij} = {}^{(2)}A_{ijk} \Delta \sigma^{km} + \Delta A_{ijk} {}^{(1)}\sigma^{km} \quad (3.4)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij}^T = {}^{(2)}\alpha_i {}^{(2)}T - {}^{(1)}\alpha_i {}^{(1)}T, \quad \text{и} \quad \Delta \varepsilon_{ij}^T = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{ij} = & \left( \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_i} \right)^2 \left( \frac{1}{E_k^2} - \frac{1}{E^2} \right) {}^{(i)}S_{ij} {}^{(i)}S_{km} \Delta \sigma^{km} \\ & + \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_i} \left( \frac{1}{E_k^2} - \frac{1}{E^2} \right) ({}^{(i)}\sigma_i - {}^{(i)}\sigma_T) \end{aligned} \quad (3.6)$$

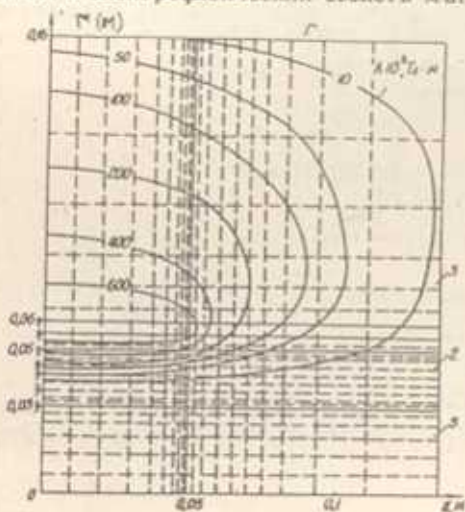
где  $\Delta A_{ijk} = {}^{(2)}A_{ijk} - {}^{(1)}A_{ijk}$  приращение коэффициента закона Гука вследствие изменения температуры на шаг;  $E_k^2, E^2$  - модуль Юнга и касательный модуль к диаграмме деформирования изотропного материала в начале шага при температуре  $\alpha_i$ ;  ${}^{(2)}\alpha_i, {}^{(1)}\alpha_i$  - коэффициенты линейного температурного расширения;  $S_{ij}$  - девиатор напряжений;  $\sigma_i$  - интенсивность напряжений;  $\sigma_T$  - предел текучести, соответствующий началу шага. Левые верхние индексы в круглых скобках 1 и 2 означают, что величина относится к началу и к концу временного шага соответственно.

При решении задачи используется теория типа течения с изотропным упрочнением [7] в соответствии с которой приращения компонент пластической деформации вычисляются по формуле (3.6). Данная теория удовлетворительно описывает поведение материала при деформациях до нескольких процентов в случае активного нагружения и упругой разгрузки.

Применяя процедуру МКЭ к управлению (3.1) с учетом (3.3)-(3.6), получаем систему алгебраических уравнений, решение которой определяет значение вектора приращений смещений  $\Delta u_i$  на временном шаге. Результирующее решение получается накоплением величин  $\Delta u_i, \Delta \sigma^{ij}, \Delta \varepsilon_{ij}$  от шага к шагу. Перемещения вычисляются в узлах конечных элементов, а деформации и напряжения - в центрах конечных элементов, где они имеют наибольшую точность.

#### 4. Алгоритм анализа связанных физико-механических полей

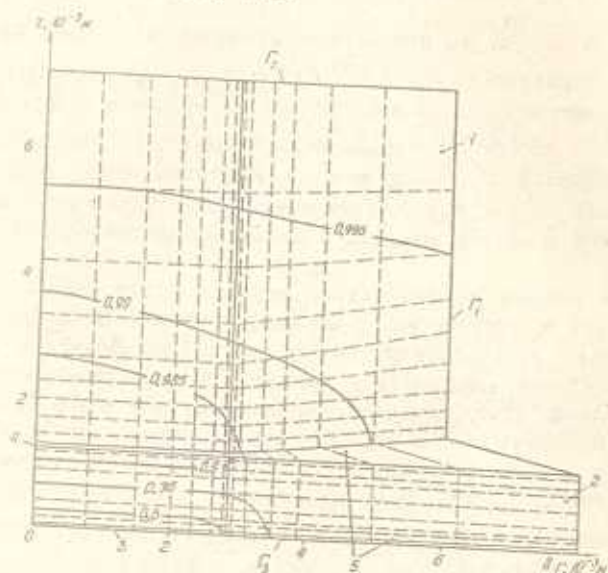
Для решения связанной задачи реализован специальный итерационный процесс, заключающийся в многократном расчете магнитного (электрического), температурного и механического полей. При этом, на каждой итерации функционал (1.5) или (1.10) минимизируется с учетом распределения температуры, полученного на предыдущей итерации. Это позволяет учесть влияние температурного поля на магнитное (электрическое) поле путем учета температурной зависимости электрофизических свойств материалов.



Фиг. 1.

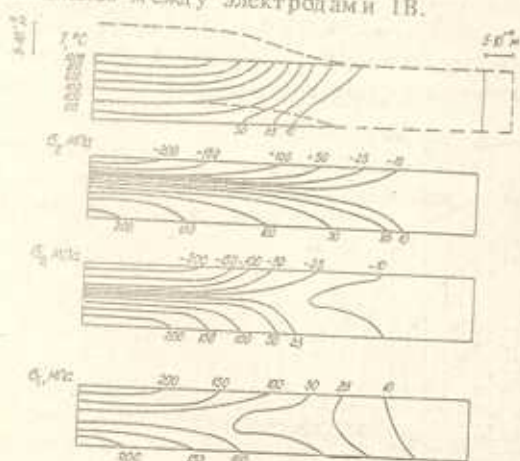
Описанная методика решения задач механики электромагнитных сплошных сред реализована в виде программного комплекса на ЭВМ Единой серии. Выполнено исследование ряда реальных технологических процессов. Некоторые из полученных результатов можно проиллюстрировать фиг.1-4.

На фиг.1 представлена индукторная система установки для термобработки м-стали с серией затухающих синусоидальных импульсов магнитного поля, привнесена разбивка на конечные элементы. Индуктор 1 выполнен из меди, заготовка 2 - из стали 12Х18Н10Т. Сила тока в индукторе - 111,6 кА, частота колебаний - 8 кГц. На фиг.1 показаны изолинии векторного магнитного потенциала в момент времени 37,5 мкс.



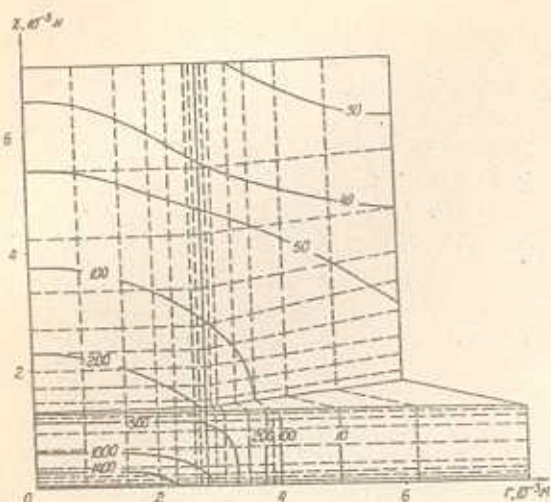
фиг. 2

На фиг.2 показана расчетная область задачи о точечной сварке, разбивка на конечные элементы и изолинии амплитудного значения потенциала  $\psi$ . Электрод 1 изготовлен из меди, деталь 2 - из стали 12Х12Н10Т. Разность потенциалов между электродами 1В.



фиг.3

На фиг.3 представлены изотермы, линии равного уровня напряжений в заготовке, а также деформированное состояние последней через 9 с после начала обработки.



Фиг.4 иллюстрирует изотермы для момента выключения сварочного тока (0,128 с).

Разработанные методики и программное обеспечение позволяют определять рациональные режимы ведения технологических процессов и конструктивные решения оборудования без использования дорогостоящего натурального эксперимента.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кувалдин А.Б. Индукционный нагрев ферромагнитной стали. - М.: Энергоатомиздат, 1988. 200с.
2. Белый И.В., Фертик С.М., Хименко Л.Т. Справочник по магнитоимпульсной обработке металлов. - Харьков: Вицшашкола, 1977. 168с.
3. Карпенко И.В., Матвейчук В.А. Индукционная техника соединения деталей и машин // Первый Всесоюзный Съезд технологов-машинистов: Тезисы докладов. - М.: Внешторгиздат, 1989, с.69.
4. Технологии и оборудование контактной сварки / Под редакцией Б.Д. Орлова. - М.: Машиностроение, 1975. 536с.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. 541с.
6. Шнейерсон Г.А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. - Л.: Энергия, 1981. 200с. 7. Подгорный А.Н., Гонтаровский П.П., Киркач Б.Н. и др. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. - Киев: Наукова думка, 1989. 232с.

Институт проблем машиностроения АН Украины  
Поступила в редакцию 21.04.1992г.



Технический редактор А. С. АВЕТИСЯН

---

Сдано в набор 20.02.1993 г. Подписано к печати 14.03.1993 г.

Формат 70 × 108  $\frac{1}{16}$  . Бумага номер 1 сыктывкарская. Высокая печат. Печ. лист  
4,25

Усл. печ. л. 5,95. Усл. кр. отт. 5,95. Тираж 150. заказ 13

---

375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 12-Б,

Типография " "