ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 46, № 1-2, 1993 Механика

О ТЕПЛОВОМ МЕХАНИЗМЕ ДИССИПАЦИИ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ ПРИ КВАЗИИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ГАЗА В ПУЗЫРЬКАХ

Оганян Г. Г.

Օհանյան Գ.Գ. Գազահեղուկ խառնուրդում ցրման ջերմային մեխանիզմի մասին, պղպջակներում գազի գրեթե իզոթերմ վարքի դեպքում

Արտածված է Բուսինեսկու տիպի հավասարում, որում պարունակվում են ջերմափոխանակության և մածուցիկության հաշվին ցրումը նկարագրող անդամներ: Առանձնացված է ալիքի էվոլուցիան նկարագրող հավասարումը:

Ohanyan G.G. On termal dissipation mechanism of gaso-liquidal mixture with quasi- isotermical behaviour of the gas in bubbles

В настоящей работе получено линейное уравнение типа Буссинеска, содержащего в себе, помимо двух различных волновых операторов, члены, характеризующие диссипацию за счет вязкости и теплообмена. Выделение из него уравнения, описывающего эволюцию распространяющейся лишь в одном направлении волны, приводит его к полному совпадению с линейной частью соответствующего нелинейного уравнения из [7]. Тем самым, доказывается обоснованность использованного в [7] метода коротких волн для применения его к исследованию волновых процессов в газожидкостной смеси.

Влияние тепловых эффектов на волновую динамику пузырьковых систем исследовано в рамках механики сплошной среды в [1-3]. В этих работах методом численного моделирования впервые показано, что в ряде случаев главным механизмом диссипации может явиться межфазный теплообмен газовых пузырьков с окружающей их жидкостью. При этом кинетическая энергия жидкости, проходя стадию преобразования в тепловую энергию газа, необратимо рассеивается обратно в жидкость. Подтверждением выводов работ [1-3] служат результаты экспериментальных исследований, приведенных в [4]. За основу принята модель односкоростной двухтемпературной газожидкостной смеси со схемой эффективной вязкости [5,6]. В рамках той же модели, не без принятия схемы, в [7] выведены нелинейные эволюционные уравнения, описывающие квазиизотермический и квазиадиабатический режимы распространения волн слабой интенсивности. В каждом из этих промежуточных режимов получена аналитическая зависимость тепловой составляющей коэффициента от физических параметров смеси.

Показано, что при распространении звукового сигнала его высокочастотная часть, называемая предвестником [5,6], распространяется со скоростью, близкой по величине к скорости звука в чистой жидкости. За предвестником следует распространяющаяся с изотермической скоростью звука в смеси основная часть сигнала, которая соответствует низким частотам.

I. Исходные уравнения. Систему одномерных уравнений, описывающую течение односкоростной монодисперской газожидкостной смеси с учетом эффектов вязкости, межфазного теплообмена и сжимаемости жидкости, возьмем в виде [5-7]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x} \tag{1.1}$$

$$\rho\frac{du}{dt}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1\beta\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right] \tag{1.2}$$

$$P_2-P=(1-\varphi_1)\rho_1 R\frac{d^2R}{dt^2}+(1-\varphi_2)\frac{3}{2}\rho_1\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{4}{R}\mu\frac{dR}{dt} \tag{1.3}$$

$$\frac{\rho_2\beta}{\rho_1(1-\beta)}=const,\ \rho_2R^3=const,\ P_2=c_{V2}(\gamma-1)\rho_2T_2 \tag{1.4}$$

$$\rho=\rho_1(1-\beta)+\rho_2\beta,\ P=P_1(1-\beta)+P_2\beta \tag{1.5}$$

$$\frac{dP_2}{dt}+\frac{3\gamma P_2}{R}\frac{dR}{dt}+\frac{3(\gamma-1)k_2Nu}{2R^2}(T_2-T_0)=0 \tag{1.6}$$

$$\rho_1T_0\frac{ds_1}{dt}=\frac{4}{3}\frac{\mu}{1-\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{12\beta}{R^2}\mu\left(\frac{dR}{dt}\right)^2,\ T_1=T_0$$

$$\varphi_1=\frac{1}{1-\beta}(1{,}1\beta^{1/3}-\beta),\ \varphi_2=\frac{1}{1-\beta}(1{,}5\beta^{1/3}-1{,}3\beta) \tag{1.7}$$

Здесь индексы 1 и 2 отнесены соответственно к параметрам жидкой и газовой фаз, а параметры, характеризующие течение смеси в целом, индексов не имеют; β - объемное газосодержание, R - радиус пузырька, T - температура, γ - показатель адиабаты газа, c_{V2} - удельная теплоемкость при постоянном объеме, k_2- коэффициент теплопроводности, Nu - число Нуссельта, остальные обозначения общепринятые. В принимаемой модели смеси полагается, что, ввиду подавляющего превосходства массы и величины теплоемкости жидкости над соответствующими параметрами газовой фазы, а также отсутствия внешних источников тепла, температура несущей жидкости не меняется ($T_1=T_0=const$).

Предположим, что величины избыточных параметров течения малы ($i=1{,}2$)

$$u=\varepsilon a_0u',\ P=P_0(1+\varepsilon P'),\ P_i=P_0(1+\varepsilon P_i')$$

$$\rho=\rho_0(1+\varepsilon\rho'),\ \rho_i=\rho_{i0}(1+\varepsilon\rho_i'),\ \beta=\beta_0(1+\varepsilon\beta'),$$

$$R=R_0(1+\varepsilon R'),\ T_2=T_0(1+\varepsilon T'),\ s_1=s_{10}(1+\varepsilon s_1') \tag{1.8}$$

Здесь индекс 0 отнесен к невозмущенному состоянию, являющимся состоянием покоя, ε - малый безразмерный параметр, a - скорость звука в смеси. Линеаризуя уравнение (1.7), находим, что в этом приближении $s_1'=0$. Более точная оценка указывает, что $s_1'\sim\varepsilon^2$. Тогда, разлагая функцию $P_1=P_1(\rho_1,s_1)$ в ряд Тейлора в окрестности состояния локального термодинамического равновесия жидкой фазы и ограничиваясь линейными членами, будем иметь

$$P_1' = \frac{\rho_{10} a_{f0}^2}{P_0} \rho_1', \quad a_{f0}^2 = \left(\frac{\partial P_1}{\partial \rho_1}\right)_0$$

Комбинируя последнюю формулу с линейными соотношениями, получаемыми, согласно (1.8), из алгебраических соотношений (1.4) и (1.5), находим

$$P' = (1-\beta_0)P_1' + \beta_0 P_2', \; \rho' = (1-\beta_0)\rho_1' + \beta_0 \rho_2', \; \rho_2' = -3R',$$

$$P_2' = T' - 3R', \; \rho' = \frac{P_0}{\rho_{10} a_{f0}^2}(P' - \beta_0 T') - 3\beta_0 \left(1 - \frac{P_0}{\rho_{10} a_{f0}^2}\right) R' \qquad (1.9)$$

2. Определяющие уравнения. Примем, что избыточная температура является величиной первого порядка малости в сравнении с величинами возмущений остальных параметров течения, то есть $T' \quad \varepsilon$. Тем самым подчеркивается, что исследуется режим, в котором термодинамическое поведение газа в пузырьках хотя и близко к изотермическому, однако не совпадает с ним. Исследование, проведенное в [8], показало, что для характеристики межфазного теплообмена удобно ввести в рассмотрение безразмерное число Пекле

$$Pe = \frac{2R_0^2}{\lambda_2} \omega_{ir}, \; \lambda_2 = \frac{k_2}{c_{p2} \rho_{20}}, \; \omega_{ir} = \frac{1}{R_0} \left(\frac{3P_0}{\rho_{10}}\right)^{1/2}$$

где ω_{ir} - изотермическая резонансная частота Миннаерта, λ_2 - коэффициент температуропроводности. При этом в исследуемом режиме имеет место оценка

$$Pe / \quad Nu \quad \varepsilon \qquad (2.1)$$

Линеаризуя уравнение (1.6) и используя четвертое соотношение из (1.9), получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + 3(\gamma - 1)\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{3\gamma Nu}{Pe} \omega_{ir} T = 0 \qquad (2.2)$$

Здесь и далее штрихи над возмущениями параметров течения опускаются. Линеаризация уравнения Рэлея-Лэмба и последующее его комбинирование с третьим соотношением из (1.9) дает

$$P = T - 3R - \frac{3(1-\beta_0)}{\omega_{ir}^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - \frac{4\mu}{P_0} \frac{\partial R}{\partial t} \qquad (2.3)$$

Линеаризуя уравнения (1.1) и (1.2), придем к системе, которая путем исключения возмущения скорости сведется к одному уравнению. Исключая в этом промежуточном уравнении избыточную плотность посредством последнего соотношения из (1.9), будем иметь

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0}\frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2}\right)\left[P - \beta_0 T - 3\beta_0 \left(1 - \frac{\rho_{10} a_{f0}^2}{P_0}\right) R\right] -$$

$$\frac{\rho_{10} a_{f0}^2}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \qquad (2.4)$$

Замкнутая система уравнений (2.2)-(2.4) полностью описывает волновое движение газожидкостной смеси с учетом эффектов вязкости и межфазного теплообмена. Она отличается от системы, исследуемой в [6], где принята схема течения смеси с эффективной вязкостью. Решение системы будем искать в виде бегущих волн, которые определяются волновым числом k и частотой ω

$$P = P_* \exp[i(kx - \omega t)], \; T = T_* \exp[i(kx - \omega t)], \; R = R_* \exp[i(kx - \omega t)]$$

Из условия существования ненулевых решений для системы однород-ных уравнений относительно амплитуд P_*, R_*, T_* и учета оценки (2.1), характеризующей исследуемый волновой режим, находим

$$\omega^2-a_{T0}^2k^2-\frac{1-\varphi_0}{\omega_{ir}^2}\frac{\rho_0 a_{T0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\omega^2\left(\omega^2-\frac{\rho_{10}a_{10}^2}{\rho_0}k^2\right)-\left(\frac{4}{3}\frac{\mu}{p_0}\frac{\rho_0 a_{T0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\right.$$

$$\left.+\frac{Pe}{Nu}\frac{1}{3\omega_{ir}}\frac{a_{T0}^2}{a_{\gamma 0}^2}\right)i\omega^3+\left[\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0}\left(1+\frac{\rho_0 a_{T0}^2}{p_0}\right)+\frac{Pe}{Nu}\frac{a_{T0}^2}{3\omega_{ir}}\right]i\omega k^2$$

$$+\frac{Pe}{Nu}\frac{1}{3\gamma\omega_{ir}}\frac{1-\varphi_0}{\omega_{ir}^2}\frac{\rho_0 a_{T0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}i\omega^3\left(\omega^2-\frac{\rho_{10}a_{10}^2}{\rho_0}k^2\right)=0 \qquad (2.5)$$

При выводе уравнения использованы определения изотермической a_{T0} и адиабатической $a_{\gamma 0}$ скоростей звука в невозмущенной смеси [7,9]

$$\frac{1}{a_{T0}^2}=\frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{10}a_{10}^2}+\frac{\beta_0\rho_0}{p_0},\quad \frac{1}{a_{\gamma 0}^2}=\frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{10}a_{10}^2}+\frac{\beta_0\rho_0}{\gamma p_0}$$

Если учесть, что величинам k и ω соответствуют операторы $-i\partial/\partial x$ и $i\partial/\partial t$, то из дисперсионного уравнения (2.5) можно восстановить уравнение, описывающее изменение избыточного давления

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-a_{T0}^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{1-\varphi_0}{\omega_{ir}^2}\frac{\rho_0 a_{T0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\rho_{10}a_{10}^2}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)+(\alpha_l+\alpha_T)\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}$$

$$-(\delta_l+\delta_T)\frac{\partial^3 p}{\partial t\,\partial x^2}+\nu_T\frac{\partial^3}{\partial t^3}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\rho_{10}a_{10}^2}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)=0 \qquad (2.6)$$

где

$$\alpha_l=\frac{4}{3}\frac{\mu}{p_0}\frac{\rho_0 a_{T0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2},\quad \alpha_T=\frac{Pe}{Nu}\frac{1}{3\omega_{ir}}\frac{a_{T0}^2}{a_{\gamma 0}^2},\quad \delta_l=\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0}\left(1+\frac{\rho_0 a_{T0}^2}{p_0}\right),$$

$$\delta_T=\frac{Pe}{Nu}\frac{a_{T0}^2}{3\omega_{ir}},\quad \nu_T=\frac{Pe}{Nu}\frac{1}{3\gamma\omega_{ir}}\frac{1-\varphi_0}{\omega_{ir}^2}\frac{\rho_0 a_{T0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2},$$

$$\frac{a_{T0}^2}{a_{\gamma 0}^2}=1-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\beta_0\rho_0 a_{T0}^2}{p_0}=\frac{1}{\gamma}\left[1+(\gamma-1)\frac{(1-\beta_0)\rho_0 a_{T0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\right]$$

Учет оценки (2.1) при выводе уравнения (2.5) фактически означает, что взаимным воздействием друг на друга эффектов вязкости и дисперсии с эффектом теплообмена пренебрегается, поскольку такой учет приводит к появлению в уравнениях (2.5) и (2.6) слагаемых более высокого порядка малости, чем выписанные.

Полученное уравнение, называемое двухволновым [5], в отсутствие эффектов теплообмена ($Pe\to 0$) и вязкости полностью исследовано в [5,6]. Оно описывает поведение волн давления, распространяющихся вдоль положительной и отрицательной полуосей Ox. Чтобы иметь представления о порядках величин коэффициентов α_l, α_T, δ_l и δ_T в реальных смесях, при вычислении которых использованы некоторые результаты из [8]. Видно, что величины δ_T и α_T не только сравнимы, но могут и превосходить значения δ_l и α_l на порядок и больше. А этот факт означает, что для указанных диапазонов размеров пузырьков главным механизмом диссипации является межфазный теплообмен. В случае мелких пузырьков (для смеси вода-воздух $R_0 < 1\times 10^{-6}$ м, для смеси вода-гелий

$R_0 < 7 \times 10^{-6}$ м) будем иметь практически изотермический режим, в котором теплообмена практически нет. В случае пузырьков умеренно больших размеров волновой режим будет квазиадиабатическим, при этом опять будет иметь место интенсивный теплообмен, который и станет главным механизмом диссипации. Еще большее увеличение размеров пузырьков приводит практически к адиабатическому режиму, при котором теплообмен практически отсутствует. Для двух последних режимов предлагаемая теория уже неприменима и для их описания нужна другая теория, изложение которой будет дано в последующей работе.

Таблица 1

$P_0 = 0{,}1$ МПа; $\beta_0 = 0{,}01$; $a_{f0} = 100$ м/с; $a_{10} = 1500$ м/с;

$\delta_l = 1{,}36 \times 10^{-4}$ м/с; $\alpha_l = 6 \times 10^{-11}$ с.

Водо-воздушная смесь | Водо-гелиевая смесь

R_0, м	δ_T, м/с	α_T, с	R_0, м	δ_T, м/с	α_T, с
3×10^{-6}	$2{,}62 \times 10^{-4}$	$1{,}34 \times 10^{-8}$	1×10^{-5}	$3{,}74 \times 10^{-4}$	$2{,}2 \times 10^{-8}$
5×10^{-6}	$7{,}17 \times 10^{-4}$	$5{,}11 \times 10^{-8}$	3×10^{-5}	$3{,}24 \times 10^{-3}$	$1{,}91 \times 10^{-7}$
6×10^{-6}	$1{,}04 \times 10^{-3}$	$7{,}34 \times 10^{-8}$	4×10^{-5}	$5{,}73 \times 10^{-3}$	$3{,}37 \times 10^{-7}$
7×10^{-6}	$1{,}41 \times 10^{-3}$	$9{,}98 \times 10^{-8}$	5×10^{-5}	$8{,}72 \times 10^{-3}$	$5{,}25 \times 10^{-7}$

Если в уравнении (2.5) пренебречь последним слагаемым в сравнении с четвертым и пятым, то приходим к ограничению

$$\omega < \frac{a_{D}}{a_{f0}} \omega_{ir} \sqrt{\frac{\gamma}{1-\varphi_0}} \approx \omega_{ir} \sqrt{\frac{1}{1-\varphi_0}} \equiv \omega_{ir}^{*}$$

на величину частот реализуемых волн. Отметим, что в отсутствие теплообмена (при квазиизотермическом режиме $Pe = 0$) такого ограничения нет. Таким образом, распространение сравнительно длинных волн с частотами, меньшими, чем приведенная изотермическая ω_{ir}^{*} можно описать следующим укороченным, а не полным уравнением (2.6):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_D^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + (\alpha_l + \alpha_T) \frac{\partial^3 P}{\partial t^3} - (\delta_l + \delta_T) \frac{\partial^3 P}{\partial t \partial x^2}$$

$$+ \frac{1}{\omega_{ir}^{*2}} \frac{\rho_0 a_D^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) = 0 \qquad (2.7)$$

Наличие волновых операторов разных порядков в уравнениях (2.6) и (2.7) свидетельствуют об иерархии распространения волн. Согласно теории Уизема [9], первые звуковые системы, называемые в нашем случае предвестниками [5,6], распространяются со скоростью, близкой к величине скорости звука в жидкости. Основная часть сигнала отстает и движется с изотермической скоростью звука в смеси. Поскольку основное движение описывается волновым оператором низшего порядка, постольку в окрестности фронта волны можно считать выполненными равенства

$$\frac{\partial}{\partial t} = \pm a_D \frac{\partial}{\partial x} \qquad (2.8)$$

которые в отсутствие диссипации и дисперсии являются точными. Совершив факторизацию уравнения (2.7) посредством связи (2.8), взятой с нижним знаком, получим

$$\frac{\partial P}{\partial t}+a_{l0}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{\omega_{ir}^{*2}}\frac{a_{l0}^2}{2}\left(1-\frac{\rho_0 a_{l0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\right)\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}-\frac{\delta^*}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=0$$

$$\delta^*=\delta_l+\delta_T-(\alpha_T+\alpha_l)a_{l0}^2$$

Данное уравнение описывает распространение вдоль отрицательной оси ox волны давления и полностью совпадает с линейной частью записанного в размерных переменных нелинейного эволюционного уравнения, Бюргерса-де Вриза, выведенного в [7] методом коротких волн. Тем самым доказана обоснованность и корректность применения метода коротких волн в исследовании волнового движения газожидкостной смеси. Отсюда можно сделать заключение о том, что уравнение БКдВ описывает распространение таких длинноволновых звуковых сигналов, величины частот которых меньше ω_{ir}^*. Заметим, что использование связи (2.8) для объединения диссипативных слагаемых уравнения (2.7) приводит к уравнению, изотермический вариант которого ($\alpha_T=\delta_T=0$) впервые получен и исследован в [5].

Для волн, величины частот которых одного порядка с приведенной изотермической $\omega\approx\omega_{ir}^*$ необходимо исходить от полного уравнения (2.6), факторизация которого приводит к эволюционному уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial t}+a_{l0}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{\omega_{ir}^{*2}}\frac{a_{l0}^2}{2}\left(1-\frac{\rho_0 a_{l0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\right)\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}-\frac{\delta^*}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$-\frac{Pe}{Nu}\frac{1}{6\gamma\omega_{ir}}\frac{a_{l0}^4}{\omega_{ir}^{*2}}\left(1-\frac{\rho_0 a_{l0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\right)\frac{\partial^4 P}{\partial x^4}=0$$

Подчеркнем, что использование связи (2.8) в диссипативных и иных слагаемых уравнений (2.6) и (2.7) правомерно лишь в случае, когда влияние диссипации и дисперсии на эволюцию волны мало, означающее, что на расстояниях порядка длины волны и в течении времени порядка ее периода профиль волны должен деформироваться мало и ее амплитуда должна затухать слабо.

3. Зависимость фазовой скорости от частоты. Выше были кратко изложены некоторые выводы теории Уизема об иерархии волн. К аналогичным выводам можно придти иным путем - при исследовании частотной зависимости фазовой скорости. Поскольку дисперсионное уравнение (2.5) является комплексным, примем, что частота ω является действительной, а волновое число k комплексной величиной: $k=k_1+ik_2$

Тогда искомое решение в виде бегущей волны запишется в виде

$$P=P_*\exp(-k_2x)\exp[i(k_1x-\omega t)],\ k_2>0$$

то есть фактически принимается закон экспоненциального затухания амплитуды волны по пространственной координате. По определению, фазовая скорость является скоростью распространения фазы волны, поэтому

$$\frac{1}{c_{ph}}\equiv\frac{k_1}{\omega}=\frac{\mathrm{Re}(k)}{\mathrm{Re}(\omega)}\equiv\mathrm{Re}\left(\frac{k}{\omega}\right)$$

Из дисперсионного уравнения (2.5) находим

$$a_{l0}^2\frac{k^2}{\omega^2}=\frac{1-bz^2-i\varkappa z+i\nu bz^3}{1-z^2-iz(\delta-\nu z^2)}\equiv(f+ig)^2 \quad (3.1)$$

где $\alpha=(\alpha_l+\alpha_T)\omega_{ir}^*$, $\delta=\dfrac{\delta_l+\delta_T}{a_D^2}\omega_{ir}^*$, $z=\dfrac{\omega}{\omega_{ir}^*}$,

$$\nu=\frac{Pe}{Nu}\frac{1}{3\gamma\sqrt{1-\varphi_{10}}}=\frac{\nu_T}{b}\omega_{ir}^{*3},\ b=\frac{\rho_0 a_D^2}{\rho_{10}a_{10}^2}$$

Нетрудно убедиться, что $a_D^2/\ c_{ph}^2=f^2$. Отделяя в уравнении (3.1) действительную и мнимую части и находя функции f и g, получим

$$\frac{a_D^2}{c_{ph}^2}=\frac{1}{2}\frac{(1-z^2)(1-bz^2)+z^2(\alpha-\nu bz^2)(\delta-\nu z^2)}{(1-z^2)+z^2(\delta-\nu z^2)}$$

$$\times\left\{1\pm\sqrt{1+\left[\frac{z(\delta-\nu z^2)(1-bz^2)-z(1-z^2)(\alpha-\nu bz^2)}{(1-z^2)(1-bz^2)-z^2(\alpha-\nu bz^2)(\delta-\nu z^2)}\right]^2}\right\} \tag{3.2}$$

В случае укороченного (без последнего слагаемого) варианта дисперсионного уравнния (2.5), которому соответствует дифференциальное уравнение (2.7), будем иметь аналогичную зависимость с $\nu\equiv 0$. Если же исходить от уравнения (2.6), предварительно объединив диссипативные слагаемые, то для фазовой скорости будем иметь приближенную зависимость

$$\frac{a_D^2}{c_{ph}^2}=\frac{(1-z^2)(1-bz^2)}{2[(1-z^2)+z^2(\delta-\alpha)^2]}\left\{1\pm\sqrt{1+\frac{z^2(\delta-\alpha)^2}{(1-z^2)^2}}\right\} \tag{3.3}$$

Именно формула (3.3), но без учета эффекта межфазного теплообмена ($\alpha_T=\delta_T=0$), исследовалась в [5]. Перейдем к анализу полученных формул.

При $z\to 0$ $(\omega\to 0)$ будем иметь $c_{ph}\to a_D$, означающее, что изотермическая скорость звука в смеси является скоростью распространения предельно низкочастотного сигнала. Известно [5,6], что в отсутствие эффектов диссипации при $z\to 1$ происходит вырождение бегущей волны в стоячую, поскольку $c_{ph}\to 0$. Из формулы (3.2) при $z\to 1$ следует значение

$$\frac{1}{c_{ph}^2}=\frac{1}{2a_D^2}\frac{\alpha-\nu b}{\delta-\nu}\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{1-b}{\alpha-\nu b}\right)^2}\right]$$

откуда видно, что даже в отсутствие вязкости $(\alpha_l=\delta_l=0)$ вырождение устраняется $(c_{ph}\neq 0)$ за счет наличия теплообмена при этом, согласно определениям коэффициентов $\alpha-\nu b>0,\ \ \delta-\nu>0$.

Если же $z\to z_{cr}$ $(\omega\to\omega_{cr})$, где

$$z_{cr}=\sqrt{b}=\sqrt{\frac{\rho_{10}}{\rho_0}}\frac{a_{10}}{a_D},\ \omega_{cr}=\omega_{ir}^*\sqrt{\frac{\rho_{10}}{\rho_0}}\frac{a_{10}}{a_D}$$

то в формуле (3.2) возникает особенность, поскольку $c_{ph}\to\infty$. Так как в этом случае, формально, $k\to 0$, то длина гармонической волны стремится к бесконечности. Эта особенность устранятся в точной формуле (3.2).

При $z\to\infty(\omega\to\infty)$ будем иметь значение

$$c_{ph}=a_{10}\sqrt{\frac{\rho_{10}}{\rho_0}}$$

означающее, что скорость распространения предельно высокочастотного звукового сигнала почти совпадает со скоростью звука в жидкости.

Аналогичное исследование можно провести и для коэффициента затухания k_2, зависимость которого от переменной $z=\omega/\ \omega_{ir}^*$ определяется формулой

$$k_2 = \frac{\omega}{a_D} g(z) = zg(z) \frac{\omega_r^*}{a_D}$$

Здесь функция $g(z)$ находится из уравнения (3.1) и имеет вид

$$g(z) = \pm \frac{c_{fh}}{2a_D} \frac{z(1-bz^2)(\delta-\nu z^2)-z(1-z^2)(\alpha-\nu bz^2)}{(1-z^2)^2 + z^2(\delta-\nu z^2)^2}$$

На фиг.1 выявленные зависимости, выражаемые формулой (3.2), схематично представлены в виде сплошных кривых, а формулой (3.3) - пунктирами.

В заключение отметим, что известны [5,10] попытки согласования результатов экспериментов [11] с числовыми данными, вытекающими из формулы (3.3). Сама постановка вопроса является некорректной, поскольку, согласно исходным данным из [11], в силу выбора размеров пузырьков режим распространения сигнала является квазиадиабатическим. Именно потому результаты теории и эксперимента дают лишь качественное совпадение.

ЛИТЕРАТУРА

1.НигматулинР.И., ШагаповВ.Ш.Структураударныхволнвжидкости,содержащейпузырькигаза.-Изв.АНСССР.МЖГ,1974,N6,с.30-41.

2.НигматулинР.И., ИвандаевА.И., НигматулинБ.И., МилашенкоБ.И.Нестационарныеволновыепроцессывгазо-ипарожидкостныхсмесях.-Нелинейныеволновыепроцессыв двухфазныхсредах.Новосибирск:ИТФСОАНСССР,с.80-90.

3.ГубайдулинА.А., ИвандаевА.И., НигматулинР.И.Исследованиенестационарныхударн волнвгазожидкостныхсмесяхпузырьковойструкутры.-ПМТФ,1978,N2,с.78-86.

4.КузнецовВ.В., НакоряковВ.Е., ПокусаевБ.Г., ШрейберИ.Р.Экспериментальноеисследованиераспространениявозмущенийвжидкостиспузырькамигаза.-Нелинейныеволновые процессывдвухфазныхсредах.Новосибирск:ИТФСОАНСССР,1977,с.32-44.

5.НакоряковВ.Е., ПокусаевБ.Г., ШрейберИ.Р.Распространениеволнвгазоипарожидкостных средах.-Новосибирск:ИТФСОАНСССР,1983,283с.

6.НигматулинР.И.Динамикамногофазныхсред.Ч.2.-М.:Наука,1987.360с.

7.Оганян Г.Г. Об уравнениях нелинейной акустики газожидкостных сред. - Изв.АН Арм.ССР.Механика,1988,т.41,N3,с.25-36.

8.ОганянГ.Г.Освободныхмалыхколебанияхгазовогопузырькавнесжимаемойжидкост Изв.АНАрмении.Механика,1991,т.44,N1,с.41-47.

9.УиземДж.Линейныеинелинейныеволны.-М.:Мир,1977.622с.10.WijngaardenL.Van.One dimensionalflowofliquidscontainingsmallgasbubbles.-Ann.Rev.FluidMech.,1972,v.4, p.369-396.Русск.пер.-Реологиясуспензий.М.:Мир,1975,с.68-103.

11.FoxF.E.,CurleyS.R.,LarsonG.S.Phasevelosityandabsorptionmeasurementsinwatercontaini airbubbles.-J.Acoust.Soc.Amer,1955,v.27,no.7,p.534-539.

ИнститутмеханикиАНАрмении

Поступилавредакцию3.08.1992