

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СЖАТОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ  
КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА (КМ) ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА  
ПРОЧНОСТЬ И ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИИ

Գնունի Վ.Վ.

**Գնունի Վ.Վ.** Կոմպոզիցիոն նյութից օպտիմալ սեղմված սալի նախազգծումը սեփական տատանումների հաճախության և անճրության վրա սահմանափակումների դեպքում

Չտնված է փոքրագույն քաշի սալ կախված սեղմող ուժի և սեփական տատանումների առաջին հաճախականության արժեքներից: Տրված է տոմաս, որ կոմպոզիցիոն նյութից սեղմված սալի համար կան սեղմող ուժի երեք տիրույթներ, ըստ որոնց կարելի է դնել սահմանափակումներ առաջին հաճախականության վրա, առաջին հաճախականության և անճրության վրա միաժամանակ, անճրության վրա: Չտնված են այդ տիրույթները և դրանց համապատասխան սալերի հաստությունները:

Gnuni V.V. Projecting of optimal compressed plate from composite material with restrictions on solidity and free vibrations frequency

В работе находится пластинка наименьшего веса в зависимости от значений сжимающего пластинку усилия и первой частоты собственных колебаний. Показывается, что для сжатой пластинки, изготовленной из монослоев ортотропного композиционного материала существуют три области изменения сжимающего усилия, где соответственно могут быть активными ограничения на первую частоту, одновременно на первую частоту и прочность, на прочность. Найдены границы этих областей и соответствующие им наименьшие толщины.

1. Пусть прямоугольная пластинка размерами  $a, b, h$  отнесена к прямоугольной системе координат  $Oxyz$ . Пластинка изготовлена из монослоев ортотропного композиционного материала, уложенных поочередно под углами  $\pm\varphi$  к оси  $Ox$  и в срединной плоскости ( $z=0$ ) сжата усилием  $T_{xx}^0 = -P$ .

Частоты собственных колебаний шарнирно опертой по краям ортотропной пластинки определяются формулой [1-4]

$$\Omega_{mn} = \omega_{mn} \sqrt{1 - \frac{P}{P_{mn}^*}} \quad (1.1)$$

где

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{K_{mn}}{\rho h}}, \quad P_{mn}^* = \frac{K_{mn}}{\lambda_{mn}^2} \quad (1.2)$$

соответственно частота собственных колебаний свободной от усилий пластинки,  $P_{mn}^*$  - критическое значение усилия  $T_{xx}^0$

$$K_{mm} = D_{11}\lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda_m^2\mu^2 + D_{22}\mu^4,$$

$$D_{ik} = B_{ik} \frac{h^3}{12} \quad (1.3)$$

$$B_{11} = B_{11}^0 \cos^4 \varphi + 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + B_{22}^0 \sin^4 \varphi$$

$$B_{22} = B_{11}^0 \sin^4 \varphi + 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + B_{22}^0 \cos^4 \varphi$$

$$B_{12} = B_{12}^0 + [B_{11}^0 + B_{22}^0 - 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0)] \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$$

$$B_{66} = B_{66}^0 + [B_{11}^0 + B_{22}^0 - 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0)] \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \quad (1.4)$$

$B_{ik}^0$  - характеристики упругости монослоя ортотропного КМ.

Из формулы (1.1) при заданных значениях  $P$  и  $\Omega_{mn} = \Omega$  для определения толщины пластинки получается уравнение

$$h_{mn}^3 - A_{mn} \Omega^2 h_{mn} - F_{mn} P = 0 \quad (1.5)$$

где

$$A_{mn} = \frac{12\rho}{B_{11}\lambda_m^4 + 2(B_{12} + 2B_{66})\lambda_m^2\mu^2 + B_{22}\mu^4}$$

$$F_{mn} = \frac{12\lambda_m^2}{B_{11}\lambda_m^4 + 2(B_{12} + 2B_{66})\lambda_m^2\mu^2 + B_{22}\mu^4}$$

Уравнением (1.5), допускающим единственное положительное решение, определяется толщина  $h_{mn}$  при которой частота колебаний пластинки по форме

$$\sin(\lambda_m x) \sin(\mu_n y)$$

принимает заданное значение  $\Omega$  при данном  $P$ .

Для приложений представляет интерес обеспечение данного уровня первой (наименьшей) частоты собственных колебаний. Таким образом, если задано, что

$$\min_{m,l} \Omega_{mn} = \Omega$$

то необходимо найти наибольшее по  $m$  и  $l$  решение уравнения (1.5), то есть найти

$$h_{opt} = \max_{m,l} h_{mn}(m, l, P, \Omega, \mu)$$

2. Рассмотрим теперь вопрос определения необходимой толщины сжатой пластинки, исходя из условия прочности.

Если пластинка сжата усилием  $T_{xx}^0 = -P$  в своей плоскости, то для деформаций в главных геометрических направлениях получается:

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{B_{22}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2} \frac{P}{h}, \quad \varepsilon_{yy} = -\frac{B_{12}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2} \frac{P}{h}, \quad \varepsilon_{xy} = 0 \quad (2.1)$$

По деформациям (2.1) можно определить напряжения в монослоях пластинки

$$\sigma_{xx} = -\frac{P}{h}, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = L \frac{P}{h} \quad (2.2)$$

где

$$L = \frac{B_{16}B_{22} - B_{26}B_{12}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}$$

$$B_{16} = -0,5 [ B_{22} \sin^2 \varphi - B_{11} \cos^2 \varphi + (B_{12} + 2B_{26}) \cos(2\varphi) ] \sin(2\varphi)$$

$$B_{26} = -0,5 [ B_{22} \cos^2 \varphi - B_{11} \sin^2 \varphi - (B_{12} + 2B_{26}) \cos(2\varphi) ] \sin(2\varphi) \quad (2.3)$$

Имея значения напряжений в монослоях по главным геометрическим направлениям, по формулам поворота можно определить напряжения по главным физическим направлениям монослоя

$$\sigma_{11} = \frac{P}{h} (\cos^2 \varphi + L \sin 2\varphi)$$

$$\sigma_{22} = \frac{P}{h} (\sin^2 \varphi - L \sin 2\varphi)$$

$$\sigma_{12} = \frac{P}{h} \left( \frac{1}{2} \sin 2\varphi - L \cos 2\varphi \right) \quad (2.4)$$

которые должны удовлетворять условию прочности для монослоя [5]

$$\frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{B1}^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{B2}^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{B1}^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{\tau_{B0}^2} \leq 1 \quad (2.5)$$

Из условия (2.5) при (2.2), (2.4) получается

$$h_{np} = \frac{P}{\sigma_{B1}} A(\varphi) \quad (2.6)$$

где

$$A(\varphi) = \left[ (\cos^2 \varphi + L \sin 2\varphi) (\cos 2\varphi - L \sin 2\varphi) + \frac{\sigma_{B1}^2}{\sigma_{B2}^2} (\sin^2 \varphi - L \sin 2\varphi)^2 + \frac{\sigma_{B1}^2}{\tau_{B0}^2} \left( \frac{1}{2} \sin 2\varphi - L \cos 2\varphi \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.7)$$

Естественно, нахождение угла  $\varphi_{np}^0$  при котором достигается наименьшее значение  $A(\varphi)$ , что приводит к определению структуры пластинки наименьшего веса при ограничениях на прочность. В рассмотренном выше случае одностороннего сжатия очевидно, что наименьшее значение функции (2.7)  $A(\varphi) = 1$  достигается при  $\varphi = 0$  и

$$\varphi_{np}^0 = 0, \quad h_{np}^0 = \frac{P}{\sigma_{B1}} \quad (2.8)$$

3. Представляет интерес проектирование сжатой пластинки, обладающей заданной первой частотой собственных колебаний при ограничении на прочность. Предварительно рассматривается случай длинной пластинки, когда можно предположить, что потеря устойчивости происходит по цилиндрической поверхности. В этом случае  $n = 0$  и

$$h_{\vartheta}^0 = \min_{\varphi} h_{\vartheta} = \min_{\varphi} \max_m h_m(m, P, \Omega, \varphi) \quad (3.1)$$

достигается при  $m = 1$ ,  $\varphi = 0$ . В рассмотренном частном случае наименьшие значения  $h_{\vartheta}^0$  и  $h_{np}^0$  достигаются при одном и том же угле  $\varphi = 0$  и из (1.5) и (2.8) получается

$$\bar{P} = \bar{h}^3 - \bar{\Omega}^2 \bar{h}, \quad P = \bar{h} \bar{\sigma}_{B1} \quad (3.2)$$



где

$$\bar{h} = 100 \frac{h}{a}, \quad \bar{\Omega}^2 = \frac{12 \cdot 10^4 \rho a^2}{\pi^4 B_{11}^0} \Omega^2,$$

$$\bar{P} = \frac{12 \cdot 10^6}{\pi^2 B_{11}^0 a} P, \quad \bar{\sigma}_{B1} = \frac{12 \cdot 10^4}{\pi^2 B_{11}^0} \sigma_{B1}$$

Расчетная толщина оптимальной пластинки показана на фиг.1.

Необходимо отметить, что при  $\bar{\Omega} = 0$  находится толщина пластинки, обеспечивающая ее устойчивость. С увеличением заданного уровня первой частоты собственных колебаний увеличиваются необходимые значения толщины пластинки и соответственно увеличивается зона активности ограничения на первую частоту, увеличивается также запас устойчивости.

Переходим к рассмотрению случая конечной пластины. В этом случае ситуация усложняется тем, что  $\bar{h}_d^0$  и  $\bar{h}_{np}^0$  могут достигаться при различных значениях угла укладки моно-слоев  $\varphi$ . Причем, как и в предыдущем случае,  $\bar{h}_{np}^0$  достигается при  $\varphi = \varphi_{np}^0 = 0$ . В этом случае для пластинки из данного материала при заданном отношении сторон  $\lambda = a/b$  необходимо определить

$\bar{h}_d^0$ . Пусть  $\bar{h}_d^0$  достигается при  $\varphi = \varphi_d^0$ . Тогда, если  $\varphi_d^0 \neq \varphi_{np}^0$  то имеет место картина, приведенная на фиг.2.

Кривые 1, 3 определяют соответственно расчетные толщины пластинки при  $\varphi = \varphi_d^0$  и  $\varphi = \varphi_{np}^0 = 0$  при заданном уровне первой частоты собственных колебаний пластинки, сжатой усилием  $P$ . Прямые 2, 4 соответствуют расчетным толщинам сжатой усилием  $P$  пластинки, определенных из условия прочности при  $\varphi = \varphi_{np}^0 = 0$  и  $\varphi = \varphi_d^0$ . Очевидно, что в отрезке  $[0, P_1]$  расчетная толщина определяется кривой 1 и равняется

$$\bar{h}_d^0 = \min_{\varphi} \bar{h}_d = \min_{\varphi} \max_m \bar{h}_m(m, P, \Omega)$$

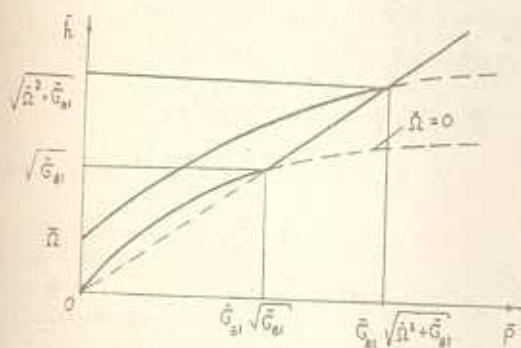


Рис.1

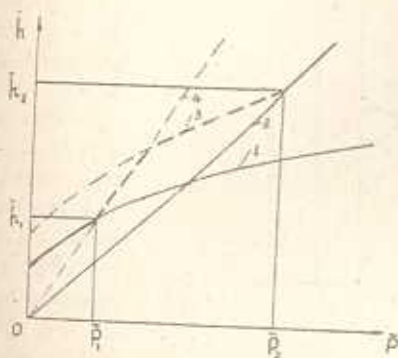


Рис.2

и оптимальным углом укладки монослоев является угол  $\varphi = \varphi_d^0$ . При  $\bar{P} > P_2$  расчетная толщина определяется прямой 2 и равняется

$$\bar{h}_p = \bar{h}_{np}^0 = \frac{\bar{P}}{\sigma_{B1}} \quad (3.4)$$

и оптимальным углом является  $\varphi = \bar{\varphi}_{np}^0 = 0$ .

Представляет интерес нахождение значений усилий  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$ , то есть зоны активности ограничений на частоту и на прочность  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$  соответственно определяются из условий

$$\begin{aligned} \bar{h}_d^0 &= \bar{h}_d(\varphi^0) = \bar{h}_{np}(\varphi^0) \\ \bar{h}_{np}^0 &= \bar{h}_d(\varphi_{np}^0) = \bar{h}_{np}(\varphi_{np}^0) \end{aligned} \quad (3.5)$$

В области усилий  $\bar{P}_1 < \bar{P} < \bar{P}_2$  в зависимости от угла укладки монослоев активным могут быть как ограниченные на частоту, так и на прочность.

В этой области можно выбрать гарантированную толщину по прямой 4 до ее пересечения с кривой 3, а далее, с увеличением  $\bar{P}$ , по кривой 3. Однако, в области  $\bar{P} \in (\bar{P}_1, \bar{P}_2)$  можно задаться целью найти угол  $\beta$ , при котором для заданного  $\bar{P} \in (\bar{P}_1, \bar{P}_2)$

$$\bar{h}_d(\varphi) = \bar{h}_{np}(\varphi) \quad (3.6)$$

В качестве примера рассмотрим квадратную пластинку ( $\lambda = 1$ ), изготовленную из монослоев ортотропного КМ с характеристиками

$$B_{22}^0 = 0,62 B_{11}^0, \quad B_{12}^0 = 0,12 B_{11}^0, \quad B_{66}^0 = 0,16 B_{11}^0,$$

$$\sigma_{B1} = 190 \times 10^{-4} B_{11}^0, \quad \sigma_{B2} = 77 \times 10^{-4} B_{11}^0, \quad \tau_{B0} = 50 \times 10^{-4} B_{11}^0$$

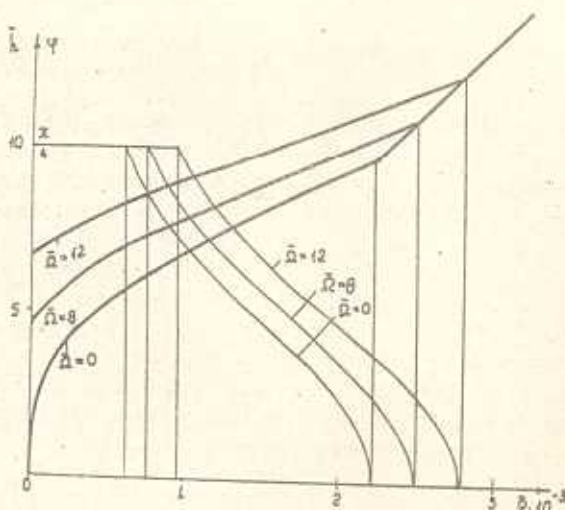


Рис.3

При этих данных на фиг.3 приводятся зависимости  $\bar{h}$  (жирные линии) и  $\varphi$  (тонкие) в зависимости от параметра нагрузки  $\bar{P}$  для различных  $\bar{\Omega}$  причем, при  $\bar{\Omega} = 0$  получается расчетная толщина и оптимальный угол при ограничениях на устойчивость и прочность. Следует указать важное свойство  $\bar{h}_p$  в области  $\bar{P}_1 \leq \bar{P} \leq \bar{P}_2$ . В этой области, как это видно на фиг.3 и из расчетов для других значений  $\bar{\Omega}$ , можно  $\bar{h}_p$

аппроксимировать линейной функцией от  $\bar{P}$ . В табл. I

приводятся значения  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$  и соответствующих  $\bar{h}_1$ ,  $\bar{h}_2$  для различных  $\bar{\Omega}$ .

Таблица I

$\Omega$	$\bar{P}_1$	$\bar{h}_1$	$\bar{P}_2$	$\bar{h}_2$
0	608	5,72	2196	9,58
2	619	5,83	2215	9,66
4,5	663	6,25	2291	9,99
8	769	7,25	2484	10,83
10	847	7,98	2632	11,48
12	933	8,79	2802	12,22

Как видно из табл. I, с увеличением заданного значения первой частоты собственных колебаний  $\Omega$  увеличиваются соответствующие значения  $\bar{P}_1$  и  $\bar{h}_1$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. - М.: Наука, 1974. 446 с.
2. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. - М.: Машиностроение, 1984. 263 с.
3. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. - М.-Л.: ГИИТТЛ, 1956. 600 с.
4. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. - М.: Машиностроение, 1988. 269 с.
5. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление полимерных композитных материалов. - Рига: Зинатне, 1980. 571 с.

Институт механики АН Армении  
Поступила в редакцию 14.07.1989