ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 46, № 1-2, 1993 Механика

К УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВОЙ АРКИ ПОД ШТАМПОМ

Мовсисян Л. А.

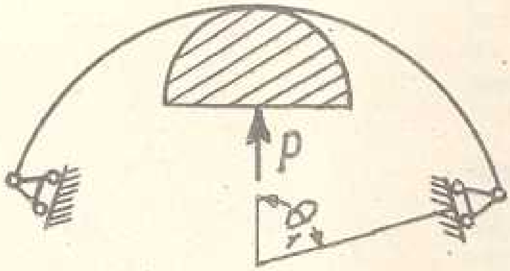
Մովսիսյան Լ.Ա. Շրջանային կամարի կայունության մասին դրոշմի դեպքում

Ուսումնասիրվում է ազատ հենված շրջանային կամարի կայունությունը, կոշտ դրոշմի միջոցով փոխանցվող կենտրոնացված ուժի տակ: Հաշվի է առնված ընդլայնական սահքը: Կայունության հավասարումներում առկա է նախնական սահքի ուժը: Կրիտիկական ուժը ստացված է կախված կամարի կորությունից և կամարի հպման անկյունից:

Movsisian L.A. On stability of round arch under a stamp

Изучается устойчивость свободно опертой круговой арки под сосредоточенной силой, передающейся на нее через жесткий штамп. Учитывается поперечный сдвиг. Получена критическая сила в зависимости от радиуса кривизны и угла контакта штампа.

В [1] показано, что шарнирно опертая арка (бесконечная панель) теряет устойчивость при внутренних нагрузках, если учесть, что начальное напряженно-деформированное состояние моментное (что и есть на самом деле) и уравнения этого состояния решаются точно. В моментной постановке начального состояния исследуется и настоящая задача с учетом начальной перерезывающей силы в уравнениях устойчивости. Подобная задача для упругого и вязкоупругого кольцв рассмотрена в [2], но задача не доведена до числовых результатов.



фиг. 1.

По известной причине [3] учитывается поперечный сдвиг - принимается гипотеза недеформируемой прямой.

1.Пусть имеется круговая арка с шарнирно-опертыми краями. В центре ее с внутренней (вогнутой) стороны расположен симметричный штамп и сосредоточенная сила приложена по оси симметрии штампа (фиг.1).

Предполагается, что под штампом возникает только нормальное давление (трение отсутствует).

Тогда продольная и поперечная силы, а также изгибающий момент определятся следующим образом [1]:

$$T^0 = C_1\cos\theta + C_2\sin\theta + R\int_0^\theta q(\varphi)\sin(\theta-\varphi)d\varphi$$

$$N^0 = C_1\sin\theta - C_2\cos\theta - R\int_0^\theta q(\varphi)\cos(\theta-\varphi)d\varphi$$

$$M^0 = -R[C_1\cos\theta + C_2\sin\theta + R\int_0^\theta q(\varphi)\sin(\theta-\varphi)d\varphi] + C_3 \tag{1.1}$$

где C_i - постоянные интегрирования, а q - неизвестное нормальное давление под штампом.

Из условий $N^0=0$ при $\theta=0$ (условие симметрии) и $T^0=0, M^0=0$ при $\theta=\theta_1$, получаем:

$$C_2 = C_3 = 0,\ C_1 = -\frac{R}{\cos\theta_1}\int_0^{\theta_0} q(\varphi)\sin(\theta_1-\varphi)d\varphi \tag{1.2}$$

Соотношения упругости, которые имеют вид

$$N^0 = k^2GF\left(\psi_0 + \frac{dw_0}{Rd\theta}\right),\ M^0 = EJ\frac{d\psi_0}{Rd\theta} \tag{1.3}$$

(здесь k^2 - константа, характеризующий закон изменения сдвигающего напряжения по толщине арки), дают возможность определить ψ_0 и w_0. Если через $R_1(\theta)$ обозначить радиус кривизны штампа, то изменение кривизны арки под штампом выразится через R и R_1 следующим образом:

$$\frac{1}{R^2}\frac{d^2w_0}{d\theta^2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \tag{1.4}$$

Давление $q(\theta)$ определяется на основании (1.1)-(1.4) из следующего уравнения:

$$C_1\cos\theta + R\int_0^\theta q(\varphi)\sin(\theta-\varphi)d\varphi - \gamma q = Q(\theta) \tag{1.5}$$

где $Q = \frac{EJ}{R}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right),\ \gamma = \frac{R}{\alpha^2},\ \alpha^2 = \frac{k^2GFR^2}{EJ}$.

Решением уравнения (1.5) будет

$$\gamma q = C_1 ch(\alpha\theta) - Q(\theta) - \frac{1+\alpha^2}{\alpha}\int_0^\theta Q(\varphi)\, sh\,\alpha(\theta-\varphi)d\varphi \tag{1.6}$$

При получении (1.7) принималось $1-\frac{1}{\alpha^2}=1$.

Неизвестный интервал контакта $[-\theta_0, \theta_0]$ определяется из условия

$$P = 2R\int_0^{\theta_0} q(\varphi)\cos\varphi\, d\varphi \tag{1.7}$$

2.Для рассмотрения задачи устойчивсти удобнее вместо θ выбрать новую координату $\tau=\theta_1-\theta$. Уравнениями устойчивости в перемещениях будут:

$$\frac{d^2v}{d\tau^2}+\frac{dw}{d\tau}+c^2\frac{d^2\psi}{d\tau^2}+\frac{R}{EF}N^0\frac{d\psi}{d\tau}=0$$

$$\frac{dv}{d\tau}+w+c^2\frac{d^3\psi}{d\tau^2}+\frac{R}{EF}T^0\frac{d\psi}{d\tau}=0$$

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2}=c^2\left(\psi+\frac{1}{R}\frac{dw}{d\tau}\right),\quad c^2=\frac{J}{FR^2} \tag{2.1}$$

На соновании предыдущего начальные силы T^0 и N^0 определяются:

$$N^0=-\frac{dT^0}{d\theta},\quad T^0=\begin{cases} C_1\cos\theta+R\int\limits_0^\theta q\sin(\theta-\varphi)d\varphi & 0\le\theta\le\theta_0 \\ C_1\cos\theta, & \theta_0\le\theta\le\theta_1 \end{cases} \tag{2.2}$$

Перейдя в (2.2) от θ к τ, представим их к виду рядов:

$$T^0=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\cos(\lambda_m\tau),\quad N^0=\sum_{m=0}^{\infty}b_m\sin(\lambda_m\tau),\quad \lambda_m=\frac{m\pi}{2\theta_1} \tag{2.3}$$

Решение (2.1) также ищем в виде рядов:

$$w=\sum_{k=1}^{\infty}f_k^{(1)}\sin(\lambda_k\tau),\quad v=\sum_{k=0}^{\infty}f_k^{(2)}\cos(\lambda_k\tau),\quad \psi=\sum_{k=0}^{\infty}f_k^{(3)}\cos(\lambda_k\tau) \tag{2.4}$$

удовлетворяющим граничным условиям шарнирного опирания. Тогда для $f_k^{(i)}$ получим алгебраическую однородную систему [1]. Из условия разрешимости этой системы получим значение критической силы (минимальное собственное значение матрицы системы).

Для выяснения изменения критической силы от радиуса кривизны штампа и интервала его контакта, в качестве примера рассмотрена арка углом раствора $\pi/2$ ($\theta_1=\pi/4$) под круговым штампом ($R_1=const$).

Ниже приведена таблица для относительной критической силы с указанием относительного радиуса (R/R_1) и угла контакта, при которых достигается данная критическая сила ($\bar{P}_{kp}=P_{kp}R^2/EJ$)

ТАБЛИЦА

$\bar{P}_{kp}$	20.82	26.05	26.89	27.81
R/R_1	115	75	50	40
θ_0	5^0	10^0	15^0	20^0

Как видно из таблицы, с уменьшением радиуса штампа критическая сила уменьшается и в пределе должна быть получена задача устойчивости при сосредоточенной силе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1.Мовсисян Л.А. К устойчивости цилиндрической круговой панели. - Изв.АН Арм.ССР.Механика, 1984, т.37, N1, с.16-22.

2.МовсисянЛ.А.Упругаяивязкоупругаяустойчивостькруговогокольцаподштампами.-Механика(межвуз.сб.науч.тр.),Ереван,1986,вып.4,с.36-42.
3.ГриголюкЭ.М.,ТолкачевВ.Н.Контактныезадачитеориипластиниоболочек.-М.:Машиностроение,1980,415с.

ИнститутмеханикиАНАрмении
Поступилавредакцию7.07.1992