ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 45, №1-2, 1992 Механика

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ В ЖИДКОСТЯХ

БАГДОЕВ А.Г.

Բագդոև Ա.Գ., Ոչ գծային ալիքային փնջերը հեղուկներում

Bagdoev A.G. Non-linear waves beams in fluids

Գազահեղուկ խառնուրդի հավասարումների հիման վրա հետազոտվում է հանդիպակաց շարժվող երկու ոչ գծային ալիքային փնջերի խնդիրը: Հետազոտված է կարճ ալիքների հավասարումը պղպջակներով մագնիսական հեղուկների համար:

На основе уравнений газожидкостной смеси исследована задача двух нелинейных пучков, распространяющихся навстречу друг другу. Исследованы уравнения коротких волн для магнитных жидкостей с пузырьками.

1. Распространение встречных пучков в несжимаемой жидкости с пузырьками газа

Исследуется задача о двух нелинейных пучках, распространяющихся навстречу друг другу. Уравнения газожидкостной смеси имеют следующий вид [9]:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\nabla p \ , \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{v}) = 0 \ , \quad \rho \approx \rho_f (1-\beta) \tag{1.1}$$

$$\frac{1-\beta}{\beta P_g} = const \, , \quad P_g R^3 = P_{g0} R_0^3 \quad P_g = P + \rho R \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{4\nu}{R} \rho \frac{\partial R}{\partial t}$$

где газ считается изотермическим, ρ — плотность смеси, p - давление в смеси, $\bar{v}$ - вектор скорости частиц, R - радиус пузырьков, β - их концентрация, P_g - давление в пузырьке, ν - кинематическая вязкость.

Выберем ось x по оси симметрии пучков, совпадающей с нормалью к волнам в точках пересечения с осью пучков, y для осесимметричной задачи будет радиальной координатой. Как и в газовой динамике [1,2], можно ввести характеристические координаты $\xi_{1,2} = t \mp \frac{x}{a_0}$, где t - время, a_0 - невозмущенная скорость звука, $a_0^2 = \frac{p_{go}}{\beta_o \rho_o}$. Полагая для компонент скорости по осям x, y и плотности

$$
\begin{aligned}
u &= u_1(\xi_1, t, y) - u_2(\xi_2, t, y) \\
v &= v_1(\xi_1, t, y) + v_2(\xi_2, t, y) \\
\rho &= \rho_0 + \rho_1(\xi_1, t, y) + \rho_2(\xi_2, t, y)
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

и осредняя уравнения (1.1) по ξ_2 и ξ_1 соответственно можно с учетом того, что средние значения функций $\overline{u}_{1,2} = 0$, $\overline{v}_{1,2} = 0$, $\overline{\rho}_{1,2} = 0$, где осреднение проводится по эйконалам $\xi_{1,2}$ [2,8], получить уравнения

$$
\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{u_1}{a_0}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} = \frac{a_0}{\rho_0}\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi_1} + \left(\frac{2}{\beta_0} - 3\right)\frac{a_0}{\rho_0^2}\rho_1\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi_1}
$$

$$
+ \frac{\kappa}{a_0}\frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi_1^3} + \frac{4\nu}{3\beta_0 a_0 \rho_0}\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi_1^2}, \quad \kappa = \frac{R_0^2}{3\beta_0\rho_0} \tag{1.3}
$$

$$
\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} - \frac{u_2}{a_0}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = \frac{a_0}{\rho_0}\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi_2} + \left(\frac{2}{\beta_0} - 3\right)\frac{a_0}{\rho_0^2}\rho_2\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi_2}
$$

$$
+ \frac{\kappa}{a_0}\frac{\partial^3 \rho_2}{\partial \xi_2^3} + \frac{4\nu}{3\beta_0 a_0 \rho_0}\frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi_2^2}
$$

$$
\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi_1} = \frac{\rho_0}{a_0}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{\rho_0}{a_0}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{2u_1\rho_0}{a_0^2}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \rho_0\left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{v_1}{y}\right)
$$

$$
\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi_2} + \frac{\rho_0}{a_0}\frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2\frac{\rho_0}{a_0^2}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \left(\rho_0 + \frac{\rho_0}{a_0}u_2\right)\left(-\frac{1}{a_0}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{v_2}{y}\right) = 0
$$

$$
\frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} = -a_0\frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} = -a_0\frac{\partial u_2}{\partial y} \tag{1.4}
$$

Здесь учтено, что в основных порядках

$$
\rho_1 \approx \frac{\rho_0}{a_0}u_1, \quad \rho_2 \approx \frac{\rho_0}{a_0}u_2 \tag{1.5}
$$

Равенство нулю средних значений искомых величин выполняется для квазимонохроматических волн [4,5], поскольку интегралы по ξ_2 и ξ_1 от экспонент $\exp(i\xi_{2,1}\alpha)$, $\exp(2i\xi_{2,1}\alpha)$ равны нулю,а свободные члены в основных порядках [5] не влияют на уравнения для первой и второй гармоник.

Исключая из (1.3),(1.4),(1.5) $\frac{\partial \rho_{1,2}}{\partial \xi_{1,2}}$ и $\frac{\partial v_{1,2}}{\partial \xi_{1,2}}$, можно получить уравнения коротких волн для встречных пучков, которые оказываются в первом порядке не связанными [2,3,4].

$$\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial \xi_{1,2}\,\partial t} - a_0^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - \frac{1}{\beta_0 a_0}\frac{\partial}{\partial \xi}u_{1,2}\frac{\partial u_{1,2}}{\partial \xi_{1,2}}$$

$$-\frac{2}{3}\frac{\nu}{\beta_0 a_0^2}\frac{\partial^3 u_{1,2}}{\partial \xi_{1,2}^3} - \frac{\kappa}{2a_0^2}\frac{\partial^4 u_{1,2}}{\partial \xi_{1,2}^4} = 0 \tag{1.6}$$

Вводя обозначения

$$\Gamma = \frac{1}{\beta_0}\,,\quad D = \frac{2\nu}{3\beta_0 a_0^2}\,,\quad \xi_{1,2} = -\tau_{1,2} + \frac{l}{a_0},$$

где $2l$ - расстояние между зеркалами [3], можно получить уравнения

$$\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}\,\partial t} - \frac{1}{2}L(u_{1,2}) = -\frac{1}{H_1}\Gamma\frac{\partial}{\partial \tau_{1,2}}u_{1,2}\frac{\partial u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}}$$

$$+D\frac{\partial^3 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^3} - \frac{\kappa\rho_0}{2H_1^2}\frac{\partial^4 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^4} \tag{1.7}$$

где $H_1 = a_0$, $L = \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ есть поперечный оператор, причем в жидкости дисперсионное уравнение $\alpha_1 = \sqrt{a_0^{-2} - \alpha_2^2}$; α_1, α_2 - компоненты волнового вектора, и в силу того, что вблизи оси пучков $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 \approx \frac{1}{H_1}$, можно показать на совпадение уравнений (1.6) и (1.7). Уравнения (1.7) для более общей задачи в магнитной и проводящей жидкости другим более эвристическим методом получены в [3], где имеется неточность в знаке в правой части (1.7) в уравнении для u_2, не влияющая на уравнения модуляций

Как и в [3], можно искать $u_{1,2}$ в виде волн с медленно меняющимися амплитудами и фазами, записать решение в виде газовых пучков и изучать явление бистабильности в резонаторах. Следует отметить, что представление решения в форме (1.5), то есть в виде суперпозиции волн, предложено в [1,2,8], однако эта запись верна только в нулевом порядке, а в первом порядке $\rho_{1,2}$ выражаются через $u_{1,2}$ с помощью (1.4).

Кроме того, в указанных работах рассмотрена одномерная по x задача. В [3] предположено, что разность фаз при $x = 1$ равна нулю, что не увязывается с равенством нулю скорости на оси y.

Следует отметить, что уравнения (1.7) имеют место для произвольной среды, что получается из принципа суперпозиции для нелинейных волн [8] и, как показано далее, для магнитной жидкости будут два собственных вектора, причем в силу их однопараметрического произвола можно полагать $u = u_1 - u_2$.

2. Конкретизация уравнений коротких волн для магнитных жидкостей с пузырями

Чтобы конкретизировать коэффициенты и переменные в уравнении коротких волн (1.8) для магнитной жидкости с пузырьками газа, запишем это уравнение в виде [7-9]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \bar{v} = 0 \ , \ \rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\nabla P + \rho \nabla \left(\frac{H^2}{8\pi} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)$$

$$rot\ \overline{H} = 0 \ , \ \nabla (\mu \overline{H}) = 0 \ , \ \rho \approx \rho_f (1-\beta)$$

$$\frac{1-\beta}{\beta P_g} = const$$

$$P_g = P - \frac{H^2}{8\pi} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} + \rho R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{4\nu}{R} \rho \frac{dR}{dt} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \qquad (2.1)$$

Здесь газ считается изотермическим, μ - магнитная проницаемость, ρ_f - плотность жидкости, R - радиус пузырька, β - концентрация пузырьков, $\overline{H}$ - магнитное поле.

Взяв для пучков с осью симметрии x одномерную по x ,t постановку задачи, можно получить решение в основном порядке, где ось x направлена по нормали к касательной плоскости к волнам в точке пересечения оси x.

Выберем начальное магнитное поле по оси x . Тогда имеем приближенно $H_y \approx 0$, $H^2 = H_x^2$. Кроме того, (2.1) даст без учета нелинейности, диссипации и дисперсии

$$-\frac{\partial \beta}{\partial t} + (1-\beta) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$(1-\beta) \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\mathrm{d} - \frac{1}{\rho_f} (1-\beta) \left[\frac{\partial^2 \mu}{\partial \beta^2} - \frac{2}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right)^2 \right] \frac{H_0^2}{8\pi} \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{\beta (1-\beta)}{P_g} \left[\frac{\partial P}{\partial x} \right.$$

$$-\frac{\partial^2\mu}{\partial\beta^2}\frac{H_0^2}{8\pi}\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{H_0^2}{4\pi\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^2\frac{\partial\beta}{\partial x}\Big] \tag{2.2}$$

Отсюда можно получить

$$d\frac{\partial\beta}{\partial x}=\frac{\rho_f\beta(1-\beta)^2}{P_g}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\beta(1-\beta)}{P_g}(2-\beta)\frac{H_0^2}{8\pi}\frac{\partial\beta}{\partial x}\Big[\frac{\partial^2\mu}{\partial\beta^2}$$

$$-\frac{2}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^2\Big]-\frac{\partial\beta}{\partial t}+(1-\beta)\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\rho_f\beta(1-\beta)}{P_g}=\frac{1}{a_0^2}$$

или

$$-\frac{\partial\beta}{\partial t}+(1-\beta)\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$H_1^2=a_0^2-\frac{2-\beta}{8\pi\rho_f}H_0^2\Big[\frac{\partial^2\mu}{\partial\beta^2}-\frac{2}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^2\Big]$$

Такое же соотношение получится для нелинейной нормальной скорости волны, где вместо H_1 , H_0 стоят c_n , H_n .

Решение уравнений (2.5) можно записать в виде

$$u=u_1(\xi_1)-u_2(\xi_2)\qquad \xi_1=t-\frac{x}{H_1}\ ,\quad \xi_2=t+\frac{x}{H_1}$$

$$\beta'=-\chi\,[u_1(\xi_1)+u_2(\xi_2)]\qquad \chi=\frac{1-\beta}{H_1} \tag{2.4}$$

Таким образом, решение u, β' записывается через решения $u_{1,2}$ уравнений (1.7).

Поперечный оператор имеет вид [3,4]

$$L(u_{1,2})=\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left(\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial y^2}+\frac{k}{y}\frac{\partial u_{1,2}}{\partial y}\right) \tag{2.5}$$

y -радиальная координата в задаче с осевой симметрией, в которой

$k=1$, или декартова координата в плоской задаче, в которой $k=0$; α_1, α_2 - волновой вектор, который в силу того,что ось пучка совпадает с осью x и что волны близки к плоским, имеет координаты

$$\alpha_1 \approx \frac{1}{H_1}, \ \alpha_2 \approx 0 \ , \ \alpha_1 = \alpha_1(\alpha_2)$$

H_1- невозмущенная нормальная скорость волны.

Следуя [5,6], можно написать обобщение уравнения совместимости на волнах и получить в нелинейном случае с учетом диссипации и дисперсии значения коэффициентов в (1.7) для волны u_1 (и аналогичные соотношения волны u_2)

$$c_n + v_n = H_1 + (\gamma+1)\, v_n + D H_1 \frac{\delta^2 v_n}{\delta v_n} + E H_1^2 \frac{\delta^3 v_n}{\delta v_n}$$

$$\gamma + 1 = 1 + \frac{a_0^2}{H_1^2}(1-\beta_0)\alpha^0 - \frac{1-\beta_0}{2}\frac{H_0^2}{H_1^2\, 8\pi\rho_1}\Big[\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0^2}$$

$$-(2-\beta_0)\frac{\partial^3\mu_0}{\partial\beta_0^3} - \frac{2}{\mu_0}\Big(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\Big)^2 + 6(2-\beta_0)\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0^2}$$

$$-(2-\beta_0)\frac{6}{\mu_0^2}\Big(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\Big)^3\Big] \tag{2.6}$$

$$\Gamma = \gamma + 1 \ , \ \alpha_0 = \frac{1}{\beta_0} \ , \ D = \frac{2\nu}{3\beta_0(1-\beta_0)H_1}$$

$$E = \frac{k_0^2}{6\beta_0(1-\beta_0)H_1} \ , \ v_n = u \ , \ \delta = \frac{\partial}{\partial\xi_{1,2}}$$

Здесь a_0 скорость звука смеси.С учетом того,что $H_{y_0} \approx 0$,$H_{z_0} \approx 0$, получится

$$-D_0\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} = H_1\chi_1 \tag{2.7}$$

$$D_0 = \chi_1 + \frac{2-\beta_0}{4\pi\mu_0\rho_f} H_0^2\Big(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\Big)^2$$

$$\chi_1 = a_0^2 - \frac{H_0^2}{8\pi}\,\frac{2-\beta_0}{\rho_f}\,\frac{\partial^2\mu_0}{\partial\beta_0^2} \tag{2.8}$$

Можно записать (2.4) в виде

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(u - \frac{\beta'}{\chi}\right) \qquad u_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\beta'}{\chi} - u\right)$$

Уравнения (1.8) связывают значения u и β'.
Тогда уравнения (1.7) запишутся в виде

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau_1 \partial t} - \frac{1}{2} L(u_1) = -\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial \tau_1}\left(\Gamma u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \tau_1} - D\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau_1^2} + E\frac{\partial^3 u_1}{\partial \tau_1^3}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau_2 \partial t} - \frac{1}{2} L(u_2) = -\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial \tau_2}\left(\Gamma u_2 \frac{\partial u_2}{\partial \tau_2} - D\frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau_2^2} + E\frac{\partial^3 u_2}{\partial \tau_2^3}\right) \qquad (2.9)$$

3. Узкие пучки с медленно-меняющимся амплитудами

Для квазимонохроматических пучков решение уравнения (2.6) можно искать в виде [4]

$$u_{1,2} = \frac{1}{2}[U^{(0)}_{1,2} + U^{(1)}_{1,2}\exp\left(-\nu_1 \alpha^2 t + i\theta_{1,2}\right)$$

$$+ U^{(2)}_{1,2}\exp\left(-2\nu_1\alpha^2 t + 2i\theta_{1,2}\right) + \text{к.с.} \qquad (3.1)$$

Здесь $U^{(0),(1),(2)}_{1,2}$ - амплитуды гармоник, зависящие от

$$\tau'_{1,2} = t + \tau_{1,2} \quad , \quad y \quad , \quad \tau'_{1,2} = (\pm x + l)\frac{1}{H}$$

$\theta_{1,2} = \alpha\tau_{1,2} - \omega t$ фаза с учетом малой частоты ω за счет дисперсии, α - основная частота. Подставляя (3.1) в (2.6) и приравнивая слагаемые при гармониках в силу стационарности пучков, принимая $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \tau'_{1,2}}$, учитывая, что в основных порядках $U^{(0)}$ не влияют на уравнения $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, можно получить уравнения для возмущенной частоты ω, затухания ν_1 в функции от основной частоты и уравнение модуляции для стационарных пучков

$$\omega = -\frac{E}{H_1}\alpha^3 \quad , \quad \nu_1 = \frac{D}{H_1}$$

$$\frac{\partial U^{(1)}_{1,2}}{\partial \tau'_{1,2}}\left(i\alpha + 2\nu_1\alpha^2 + 3i\omega\right) - \frac{1}{2}L\left[U^{(1)}_{1,2}\right]$$

$$= \frac{\Gamma}{2H_1} \alpha^2 U_{1,2}^{(2)} \overline{U}_{1,2}^{(1)} \exp(-2\nu_1 \alpha^2 t)$$

$$U_{1,2}^{(2)} (4 i \nu_1 \alpha^3 - 12 \alpha \omega) + \frac{\partial U_{1,2}^{(2)}}{\partial \tau_{1,2}'} (2 i \alpha + 10 \nu_1 \alpha^2$$

$$+ 30 i \omega) - \frac{1}{2} L [U_{1,2}^{(2)}] = \frac{\Gamma}{H_1} \alpha^2 U_{1,2}^{(1)\,2}$$

Пусть $\omega << \alpha$,однако $\omega t >> 1$, где t -характерное время, $t \approx \frac{x}{H_1}$.Тогда слагаемыми с производными от второй гармоники можно пренебречь и уравнение примет вид

$$U_{1,2}^{(2)} = \frac{\Gamma \alpha}{H_1 (4 i \nu_1 \alpha^2 - 12 \omega)} U_{1,2}^{(1)\,2}$$

$$\frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial \tau_{1,2}'} (i\alpha + 2\nu_1 \alpha^2 + 3 i \omega) - \frac{1}{2\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} [\frac{\partial^2 U_{1,2}^{(1)}}{\partial y^2}$$

$$+ \frac{k}{y} \frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial y}] = \frac{\Gamma^2 \alpha^3}{8 H_1^2 (i \nu_1 \alpha^2 - 3\omega)} U_{1,2}^{(1)\,2} \overline{U}_{1,2}^{(1)} \exp(-2\nu_1 \alpha^2 t)$$

или после подстановки $U^{(1)} = a \exp(i\varphi)$ получим одинаковые по форме уравнения для обоих пучков $\tau = \tau_{1,2}'$

$$-a \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} (1 - \frac{3}{H_1} E \alpha^2) + \frac{\partial a}{\partial \tau} 2 \nu_1 \alpha - \frac{1}{\alpha \alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} [\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}$$

$$+ \frac{k}{y} \frac{\partial a}{\partial y} - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2] = \kappa_1 a^3 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} (1 - \frac{3}{H_1} E \alpha^2) + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} 2 \nu_1 a \alpha - \frac{1}{\alpha \alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} [a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

$$+ a \frac{k}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2 \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y}) = \kappa_2 a^3 \tag{3.3}$$

$$\kappa_1 = 3 E \alpha^2 \xi \quad , \quad \kappa_2 = -\nu_1 \alpha H_1 \xi$$

$$\xi = \frac{\Gamma^2 \alpha \exp(-2\nu_1 \alpha^2 t)}{8 H_1 (9 E^2 \alpha^4 + \nu_1 \alpha^2 H_1^2)}$$

В предположении малости линейной диссипации и дисперсии при наличии симметричных относительно $x = 0$ граничных условий можно искать решение узких пучков для (3.3) в форме [4 - 6]

$$a = \frac{K}{f(\tau')} \exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right) , \quad \varphi = \sigma(\tau') + \frac{1}{2 R_0^{\bullet}} y^2 , \quad \tilde{\tau} = \alpha \tau' \tag{3.4}$$

$\dfrac{H_1}{R_0^{\bullet} \alpha}$ – кривизна волны.

Подставляя (3.4) в (3.3), при граничных условиях

$$\tilde{\tau} = 0 , f = 1 , f' = -\frac{H_1^2}{R_0^{\bullet}(0) \alpha^2} \lambda - \kappa_2 K^2 , \lambda = \frac{1}{\alpha_1 H_1^2} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2}$$

для безразмерной ширины пучка f и частоты σ, получится

$$-\tilde{\tau}_1 = \frac{\sqrt{C' f^2 - \bar{\xi}}}{C'} - \frac{\sqrt{C' - \bar{\xi}}}{C'} \tag{3.5}$$

$$C' = \left[\frac{2 H_1^2}{R_0^{\bullet}(0)} \frac{1}{\alpha^2} \lambda + \kappa_2 \frac{K^2}{\alpha}\right]^2 + \bar{\xi}$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) =$$

$$= \frac{A'}{H_1 f_0^2} \left(\bar{\xi} \frac{H_1^2}{C'^2 \alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{C'^2 \alpha^2}{\bar{\xi} H_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} x + \Delta \tag{3.6}$$

где

$$f_0^2 = \frac{\bar{\xi}}{C'} , \quad A' = \frac{1}{\alpha \alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \left(\frac{2}{y_0^2}\right) - \kappa_1 K^2 < 0$$

$$\bar{\xi} = -\frac{8 K^2 \lambda \tilde{\mu}}{\alpha} \kappa_1 + 16 \lambda^2 \tilde{\mu}^2 , \quad \tilde{\mu} = \frac{H_1^2}{\alpha^2 y_0^2}$$

а Δ находится из условия, что при $x = l$ для резонатора суммарная фаза равна нулю [3].

Следуя работе [3], для звуковой волны, имеющей почти линейную поляризацию по оси x ($\bar{v} \parallel x$), можно записать аналогичные соотношения на зеркалах и получить пропускную способность интерферометра [3]

$$P_1 = \frac{|u_1|^2 (1-\bar{k})}{|K_0|^2}, \quad P_1 = \left[1 + \frac{4\bar{k}}{(1-\bar{k})^2} \sin^2(\delta + F) \right]^{-1}$$

$$\delta = -\frac{2\alpha l}{H_1}, \quad F(x') = -\frac{\pi}{4} \frac{2 \pm x'}{(1 \pm x')^{\frac{1}{2}}}$$

$$x' = \frac{\kappa_1 K^2}{\alpha \mu |\lambda|}, \quad k = |u_1| \tag{3.7}$$

Уравнения (3.7) дают неявные значения для x'.

При упрощении (3.6) для $x = -l$ предположено, что зеркала являются конфокальными и имеет место условие резонатора [3]

$$f_0^4 = \bar{\xi} \frac{\alpha^2}{H_1^2} l^2 \quad \text{или} \; C' = 2\bar{\xi}.$$

При больших K_0 левая часть (3.7), являющаяся прямой линией, имеет несколько пересечений с функцией, даваемой правой частью, что приводит к возможным многим амплитудам в интерферометре, приводится к появлению бистабильности [3]. При $\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} > 0$ имеется критическое значение $x' = 1$, при котором достигается фокус.

Для выяснения влияния магнитного поля на явление бистабильности, напишем x' в развернутой форме

$$x' = \frac{\beta_0 (1-\beta_0) y_0^2}{4 R_0^2} \Big[\xi_1' \alpha^2 + \frac{2-\beta_0}{\mu_f} \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial \beta_0} \right) \left(\frac{2}{\mu_0} + 6 \frac{2-\beta_0}{\mu_0^2} \right) \xi_1'^2 \xi_2' \Big]^2$$

где обозначено

$$\frac{a_0}{H_1} = \xi_1', \quad \frac{H_0^2}{4\pi \rho_0 a_0^2} = \xi_2'$$

$$H_1^2 = a_0^2 + \frac{2-\beta_0}{\mu_0} \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0} \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial \beta_0} \right)^2 \tag{3.8}$$

Расчеты показывают, что для магнитной жидкости с пузырьками газа ($\beta_0 > 0,3$) при увеличении напряженности внешнего магнитного поля (ξ_2') явление бистабильности усиливается. Таким образом, для осуществления этого явления требуется меньшая мощность начальной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carbonaro P. High frequency waves in quasi-linear inviscid gasdynamics. - J.Appl.Math.and Phys. ZAMP, 1986, v.37, p.43.*
2. *Канер В.В. Руденко О.В. О распространении волн конечной амплитуды в волноводах. -Вестник МГУ. Сер.физ. 1978, т.19, с.78.*
3. *Багдоев А.Г. Гургенян А.А. Нелинейное взаимодействие встречных пучков в магнитной жидкости с пузырьками газа. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред.-Ереван, 1990, с.107-112.*
4. *Багдоев А.Г. Петросян Л.Г. Распространение волн в микрополярно электропроводящей жидкости.- Изв. АН АрмССР, 1983, т.36, с.3-16.*
5. *Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах.-Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1981. 307с.*
6. *Bagdoev A.G., Gurgenian A.A. The determination of parameters of a chemically active magnetogasdynamic medium in the proximity of a wave. - Atti della Acad.della science di Torino, 1976, v. 111.*
7. *Погосов В.В., Налетова В.А., Шапошникова Г.А. Гидродинамика намагничивающихся жидкостей. В кн.:Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа.- М.:1981, т.16, с.308.*
8. *Hunter J.K., Keller J.B. Weakly nonlinear high freguency waves. - Comm. pyre Appl. Math., 1983, v.36, p.547-563.*
9. *Ван Вейнгарден. Одномерное течение жидкости с пузырьками газа. -В сб.: Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с.68-103.*

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию 22.04.1992