ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 45, № 1-2, 1992 Механика

К ОБОСНОВАНИЮ ОДНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

СЕЙРАНЯН С.П.

Սեյրանյան Ս.Գ., Շերտավոր, օրթոտրոպ գլանային թաղանթի տատանումների և կայունության խնդիրների լուծման մի եղանակի հիմնավորման մասին։

Seyranian S.L. On the foundation of one method of solution of stability and vibration problems for layered orthotropic cylindrical shell

Հետազոտվում է ճկուն, շերտավոր, օրթոտրոպ, կլոր գլանային թաղանթի սեփական տատանումները և ստատիկ կայունությունը, սկզբնական մոմենտային առանցքասիմետրիկ հավասարակշիռ վիճակի դեպքում նկարագրող, գծային համասեռ հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգը։

Исследуется бесконечная линейная однородная алгебраическая система уравнений, описывающая собственные колебания и статическую устойчивость гибкой слоистой ортотропной круговой цилиндрической оболочки при моментном начальном осесимметричном состоянии равновесия и шарнирном опирании торцов.

В работах [1-3] решаются задачи о статической устойчивости и собственных колебаниях слоитой ортотропной замкнутой круговой цилиндрической оболочки в предположениях гибкости и моментности начального осесимметричного состояния равновесия и шарнирного опирания торцов. Исходные задачи представлением неизвестных тригонометрическими рядами приводятся к бесконечной однородной системе алгебраических уравнений и детерминантному уравнению. В работах [4-6] граничные условия предполагаются произвольными, а преобразование краевых задач производится с применением методов разделения переменных и конечных разностей. Как отмечено в [3], численный метод, предложенный в [2], эффективен по быстродействию метода в [4,5] в 12 раз.

В настоящей работе обосновывается метод, предложенный в [2,3].

1. Исследуется бесконечная система уравнений [1,3]

$$(V_q - 2S_0 + S_{2q})a_q + \sum_{m=1}^{q-1}(S_{m+q} - S_{q-m})a_m$$

$$+\sum_{m=q+1}^{\infty}(S_{m+q}-S_{m-q})a_m=0\ ,\qquad q=1,2,\ldots \tag{1.1}$$

Здесь

$$V_q=2Ra_{11}\frac{\Phi_{2qn}(\Phi_{1qn}-P\lambda_q^2-\rho\Omega_n^2)+\left(\Phi_{3qn}-\frac{\lambda_q^2}{R}\right)^2}{\mu_n^2\Phi_{2qn}}$$

$$S_0=f_0$$

$$S_{2q}=\left[1-Ra_{11}\lambda_{2q}^2\left(\frac{P_{11}}{a_{11}}+2\frac{\Phi_{3qn}-\frac{\lambda_q^2}{R}}{\Phi_{2qn}}\right)\right]f_{2q} \tag{1.2}$$

$$S_i=\left[1-Ra_{11}\lambda_i^2\left(\frac{P_{11}}{a_{11}}+\frac{\Phi_{3mn}-\frac{\lambda_m^2}{R}}{\Phi_{2mn}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\Phi_{3qn}-\frac{\lambda_q^2}{R}}{\Phi_{2qn}}\right)\right]f_i\ ,\ i=q-m\ ,\ q+m\ ,\ m-q$$

где

$$\Phi_{1qn}=(D_{11}-D_{11}^0)\lambda_q^4+(D_{22}-D_{22}^0)\mu_n^4$$

$$+2\left[D_{12}-D_{12}^0+2(D_{66}-D_{66}^0)\right]\lambda_q^2\mu_n^4$$

$$\Phi_{2qn}=a_{11}\lambda_q^4+(a_{66}-2a_{12})\lambda_q^2\mu_n^2+a_{22}\mu_n^4$$

$$\Phi_{3qn}=P_{11}\lambda_q^4+(P_{12}+P_{21}-2P_{66})\lambda_q^2\mu_n^2+P_{22}\mu_n^4$$

$$\lambda_q=\frac{q\pi}{L}\ ,\ \mu_n=\frac{n}{R} \tag{1.3}$$

L ,R - длина и радиус оболочки, P, Ω_n- осевое сжатие и собственная частота колебаний, ρ- погонная плотность вдоль оси оболочки. Константы a_{ik}, P_{ik}, D_{ik}^0 выражаются через известные жесткости C_{ik}, K_{ik}, D_{ik} классической теории слоистых ортотропных оболочек [1,7].
Величины f_k $(k=1,2,\ldots)$ - коэффициенты разложения прогиба на-

чального состояния в промежутке [0,L] в ряд Фурье по косинусам, f_0 -константа.
a_q - коэффициенты разложения вариации прогиба в ряд Фурье по синусам.

В предположениях о скорости сходимости коэффициентов Фурье f_k к нулю

$$|f_k| < \frac{C}{k^{\frac{\alpha}{2}}} \tag{1.4}$$

где C, α -- константы, $C > 0$, $\alpha > 1$, $k = 1, 2, \ldots$ доказывается, что бесконечная система (1.1) преобразуется к эквивалентной системе, бесконечный детерминант которой удовлетворяет условиям Коха [8], откуда следует, что равенство его нулю есть необходимое и достаточное условие существования формы колебаний (при $\Omega_n \equiv 0$ потери устойчивости) оболочки. Более того, решение бесконечной системы может быть получено методом редукции.

2.Условия Коха формулируются для бесконечного определителя матрицы A, представленной в форме

$$A = I + E \tag{2.1}$$

где I - единичная матрица, и требует сходимости рядов

$$\sum_{i=1}^{\infty} |e_{ii}| < \infty \tag{2.2}$$

$$\sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{\infty} |e_{ik}| < \infty \tag{2.3}$$

Преобразуем матрицу (1.1) к форме (2.1) таким образом, чтобы условия Коха выполнялись. С использованием (1.1)-(1.3) определяется порядок величины общего члена последовательности элементов матрицы главной диагонали

$$V_q - 2S_0 + S_{2q} \approx \frac{2R}{\mu_n^2}\lambda_q^4 [a_{11}(D_{11} - D_{11}^0) + P_{11}^2] = \pm G^2 \lambda_q^4 \tag{2.4}$$

при $q \to \infty$,где введено обозначение

$$G^2 = \frac{2R}{\mu_n^2} | a_{11}(D_{11} - D_{11}^0) + P_{11}^2 | \tag{2.5}$$

Далее выполняется деление каждой q-ой строки и m-го столбца на $G\lambda_q^2$ и $\pm G\lambda_m^2$ (знак плюс или минус выбирается, соответственно, (2.4)). Очевидно, такому преобразованию соответствует деление каждого q-го уравнения системы (1.1) на $G\lambda_q^2$ и замена неизвестных a_m на a_m' по формуле $a_m = \pm a_m'/G\lambda_m^2$. В результате выражения e_{qq} элементов главной диагонали и e_{mq}, при $m \neq q$, записываются в виде

$$e_{qq} = \pm \frac{V_q - 2S_0 + S_{2q}}{G^2\lambda_q^4} - 1 = \pm \frac{1}{G^2\lambda_q^4}(V_q - 2S_0 + S_{2q} \mp G^2\lambda_q^4) \tag{2.6}$$

$$e_{mq} = \pm \frac{S_{m+q} - S_{|m-q|}}{G^2\lambda_m^2\lambda_q^2}, \qquad m \neq q \tag{2.7}$$

3. Введем обозначения

$$A_1 = D_{11} - D_{11}^0, \quad A_2 = 2\,[D_{12} - D_{12}^0 + 2(D_{66} - D_{66}^0)]\,\mu_n^2 - P$$

$$A_3 = (D_{22} - D_{22}^0)\,\mu_n^4 - \rho\,\Omega_n^2 \tag{3.1}$$

$$B_1 = (a_{66} - 2a_{12})\,\mu_n^2, \quad B_2 = a_{22}\mu_n^4$$

$$C_1 = (P_{12} + P_{21} - 2P_{66})\,\mu_n^2 - \frac{1}{R}, \quad C_2 = P_{22}\,\mu_n^4$$

и покажем существавание конечного предела

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{\lambda_q^2}(V_q - 2S_0 + S_{2q} \mp G^2\lambda_q^4) < \infty \tag{3.2}$$

откуда, очевидно, следует выполнение условия Коха (2.2).

Предварительно, с учетом (1.2),(1.3),(2.5),(3.1), определим предел отношения

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{\lambda_q^2}(V_q \mp G^2\lambda_q^4)$$

$$= \lim_{q\to\infty} \frac{1}{\lambda_q^2}\,[2Ra_{11}\frac{A_1\lambda_q^4 + A_2\lambda_q^2 + A_3}{\mu_n^2}$$

$$+ \frac{2Ra_{11}}{\mu_n^2}\frac{(P_{11}\lambda_q^4 + C_1\lambda_q^2 + C_2)^2}{a_{11}\lambda_q^4 + B_1\lambda_q^2 + B_2}$$

$$-\frac{2R\lambda_q^4}{\mu_n^2}(a_{11}A_1+P_{11}^2)]=\lim_{q\to\infty}\frac{1}{\lambda_q^2}[2Ra_{11}\frac{A_2\lambda_q^2+A_3}{\mu_n^2}$$

$$+\frac{\left(2P_{11}C_1-\frac{P_{11}^2}{a_{11}}B_1\right)\lambda_q^6+\left(C_1^2+2C_2P_{11}-\frac{P_{11}^2}{a_{11}}B_2\right)\lambda_q^4}{a_{11}\lambda_q^4+b_1\lambda_q^2+B_2} \tag{3.3}$$

$$+\frac{2C_1C_2\lambda_q^2+C_2^2}{a_{11}\lambda_q^4+b_1\lambda_q^2+B_2}]\frac{2Ra_{11}}{\mu_n^2}=\frac{2R}{\mu_n^2}\left(a_{11}A_2+2P_{11}C_1-\frac{P_{11}^2}{a_{11}}B_1\right)<\infty$$

Далее с использованием (1.2)-(1.4) и (3.1) получаем

$$\lim_{q\to\infty}\frac{1}{\lambda_q^2}S_{2q}$$

$$=\lim_{q\to\infty}\frac{1}{\lambda_q^2}[1-4Ra_{11}\lambda_q^2\left(\frac{P_{11}}{a_{11}}+2\frac{P_{11}\lambda_q^4+C_1\lambda_q^2+C_2}{a_{11}\lambda_q^4+B_1\lambda_q^2+B_2}\right)]f_{2q}=0 \tag{3.4}$$

Так как $s_0=f_0$, то из **(3.3)**,**(3.4)** непосредственно следует (3.2) и следовательно (2.2).

Докажем, что и условие **Коха (2.3)** выполняется.

Так как из (2.7) следует, что $e_{mq}=e_{qm}$, то запишем

$$\sum_{\substack{m,q=1\\ m\neq q}}^{\infty}e_{mq}^2=\frac{2}{G^4}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=q+1}^{\infty}\frac{(S_{m+q}-S_{m-q})^2}{\lambda_m^4\lambda_q^4} \tag{3.5}$$

Оценим $S_{m\pm q}$

$$|S_{m\pm q}|=\Big|\,[1-Ra_{11}\lambda_{m\pm q}^2\left(\frac{P_{11}}{a_{11}}+\frac{P_{11}\lambda_q^4+C_1\lambda_q^2+C_2}{a_{11}\lambda_q^4+B_1\lambda_q^2+B_2}\right.$$

$$\left.+\frac{P_{11}\lambda_m^4+C_1\lambda_m^2+C_2}{a_{11}\lambda_m^4+B_1\lambda_m^2+B_2}\right)]\;\Big|\,|f_{m\pm q}|\le$$

$$\le H\lambda_{m\pm q}^{2-\frac{\alpha}{2}}\le H(\lambda_m+\lambda_q)^2\lambda_{m-q}^{-\frac{\alpha}{2}} \tag{3.6}$$

где H - положительная константа.

С учетом (3.5),(3.6) имеем

$$\sum_{\substack{m,q=1\\ m\neq q}}^{\infty} e_{mq}^2 \le \frac{2}{G^4}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=q+1}^{\infty}\frac{(|S_{m+q}|+|S_{m-q}|)^2}{\lambda_m^4\lambda_q^4} \le$$

$$\le \frac{8H^2}{G^4}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=q+1}^{\infty}\frac{(\lambda_m+\lambda_q)^4}{\lambda_m^4\lambda_q^4\lambda_{m-q}^{\alpha}}$$

$$= \frac{8H^2}{G^4}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=q+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{m-q}^{\alpha}}\left(\frac{1}{\lambda_m}+\frac{1}{\lambda_q}\right)^4$$

$$= \frac{8H^2}{G^4}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=q+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{m-q}^{\alpha}}\sum_{i=0}^{4}\frac{C_4^i}{\lambda_m^i\lambda_q^{4-i}} \tag{3.7}$$

Здесь C_4^i -биноминальные коэффициенты.

Меняя порядок суммирования в (3.7) и вводя замену индекса m на индекс j соотношением m - q = j , получаем

$$\sum_{\substack{m,q=1\\ m\neq q}}^{\infty} e_{mq}^2 \le \frac{8H^2}{G^4}\sum_{i=1}^{4}C_4^i\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^{\alpha}(\lambda_j+\lambda_q)^i}\frac{1}{\lambda_q^{4-i}}$$

$$\le \frac{8H^2}{G^4}\sum_{i=1}^{4}C_4^i\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_q^4}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^{\alpha}} < \infty \tag{3.8}$$

Таким образом, условия Коха для детерминанта бесконечной системы алгебраических уравнений, эквивалентной системе (1.1), выполняются.

Заметим, что в предположении $\alpha > 2$ аналогичным образом можно обосновать принадлеж-ность определителя к классу нормальных [8] .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белубекян Э.В.,Гнуни В.Ц. Устойчивость гибкой слоистой ортотропной цилиндрической оболочки.- Изв. вузов, Машиностроение,1978, 6, с.13-16.*
2. *Белубекян Э.В. Гнуни В.Ц., Сейранян С.П. Применение метода последовательной безусловной минимизации к решению оптимальных задач устойчивости и колебаний тонкостенных конструкций.- В сб.: Проблемы оптимизации и надежности в строительной механике. Тезисы докл. Всес. конференции. Вильнюс, 1979, с.29-30.*
3. *Сейранян С.П. Оптимизация слоитой композитной цилиндрической оболочки по критерию максимума устойчивости или основной частоты собственных коле-*

баний.-Автореф. дис. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук. Ереван, 1986, 19 с.
4. *Гнуни В.Ц., Сейранян С.П. К вопросу оптимизации устойчивости моментного состояния слоистой цилиндрической оболочки.- ЕГУ, межвуз. сб. н. т. Механика, 1981, вып.2, с.55-61.*
5. *Сейранян С.П. Об оптимальных двуслойных ортотропных цилиндрических оболочках по критерию максимума устойчивости или низшей частоты собственных колебаний.- В сб.: Проблемы оптимизации и надежности в строительной механике. Тезисы докл. Всесоюзной конференции. Вильнюс, 1983, с.65.*
6. *Джонс Р.М., Хеннеманн Дж.К.Ф. Влияние докритических деформаций на устойчивость слоистых композиционных круговых цилиндрических оболочек.- Ракетная техника и космонавтика, 1980, т.18, 3, с. 135-143.*
7. *Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек.-М.: Наука, 1974. 446с.*
8. *Канторович Л.В. Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа.- Л.: ГИТТЛ, 1949. 695 с.*

Институт механики АН Армении
Поступила в редакцию 23.04.1992