

4

БЕСКОНТАКТНЫЙ СПОСОБ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ И
ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКЕ

БАГДАСАРЯН Г. Е., ПИЛИПОСЯН Г. Т.

Բաղդասարյան Գ.Ե., Փիլիպոսյան Գ.Տ., Գերհաղորդիչ սալում պարամետրական և ստիպողական տատանումների զրգոման ոչ-հպումային եղանակ:

Bagdasarian G.E., Piliposyan G.T. Non-contact method of excitation of parametric and forced vibrations in superconducting plate.

Ծույց է տրված, որ հաստատուն մագնիսական դաշտի միջոցով երկայնական հարմոնիկ ուժի ազդեցության տակ գտնվող մի սալի պարամետրական և քրան ուղեկցող ստիպողական տատանումները կարելի է ոչ-հպումային եղանակով հաղորդել երկրորդ սալին: Մեկ սալի դեպքում ծույց է տրված, որ գոյություն ունեն մագնիսական դաշտի լարվածության արժեքներ, որոնց գերազանցումը բացառում է պարամետրալ չնեզոհանքի սուբսոնոր:

Показано, что при помощи постоянного магнитного поля параметрические и сопровождающие их вынужденные колебания одной пластинки, на которую действует продольная гармоническая сила, можно бесконтактно сообщить второй пластинке. В случае одной пластинки установлено, что существуют минимальные значения напряженности магнитного поля, превышение которых исключает возможность появления параметрического резонанса.

1. Рассмотрим магнитоупругую систему, состоящую из двух параллельных диафрагм между которыми действует постоянное продольное магнитное поле \vec{H}_0 . Магнитные свойства среды, находящейся между диафрагмами, отождествляются со свойствами вакуума (вакуумный слой). Прямоугольная декартова система координат $x_1 x_2 x_3$ выбрана так, что координатная плоскость $x_1 x_2$ совпадает со срединной плоскостью вакуумного слоя. Начальное магнитное поле $\vec{H}_0(H_0, 0, 0)$ параллельно координатной линии Ox_1 . Внутренние поверхности диафрагм $x_3 = \pm b$ покрыты тонкими слоями сверхпроводящего сплава, толщины которых намного больше глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник (обычно порядка 10^{-5} см). Части диафрагм $|x_1| \leq a$, $|x_2| < \infty$ являются упругими пластинками из различных изотропных материалов (остальные части являются абсолютно жесткими и неподвижными).

Пусть верхняя пластинка подвергается действию равномерно

распределенных по сторонам, параллельных оси Ox_2 , сжимающих усилий интенсивностью $P(t) = P_0 + P_1 \cos \theta t$, параллельных оси Ox_1 . Граничные условия на торцах $x_1 = \pm a$ таковы, что пластинки колеблются по форме цилиндрической поверхности с образующими, параллельными координатной линии Ox_2 . Рассмотрим задачу передачи параметрических колебаний, а также сопровождающих их вынужденных колебаний к нижней пластинке и определим условия резонанса как обычного, так и параметрического типа. В дальнейшем, характеристики, относящиеся к верхней пластинке, будем отмечать индексом -1-, а к нижней - индексом -2-.

Известно, что при помещении сверхпроводящего тела в магнитное поле на тонком поверхностном слое появляются экранирующие токи, препятствующие проникновению магнитного поля внутрь тела. Вследствие этого, на внутренних поверхностях пластинки $x_3 = \pm b$ компоненты тензора напряжений Максвелла претерпевают разрыв. Этим разрывом обусловлено появление поверхностных сил магнитного происхождения, действующих на поверхностях $x_3 = \pm b$. В работах [2,3], используя основные положения гипотезы недеформируемых нормалей, определены указанные силы и получены соответствующие уравнения, описывающие колебания рассматриваемой магнитоупругой системы. Эти уравнения, с учетом влияния конструктивного демпфирования и продольного усилия, представляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & D_k \frac{\partial^4 w_k}{\partial x_1^4} + 2\rho_k \delta_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + 2\rho_k \delta_k \epsilon_k \frac{\partial w_k}{\partial t} \\
 & + \frac{H_0^2}{16\pi b} \int_{-a}^a \left(K \frac{\partial w_{3-k}}{\partial \xi} - \frac{1}{K} \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \right) d\xi \\
 & + [\delta_{k1} P(t) - \frac{H_0^2 \delta_k}{4\pi}] \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_1^2} = (-1)^{k+1} \frac{H_0^2}{8\pi}, \quad (k=1, 2) \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

Здесь w_k - прогиб, $D_k = 2E_k \delta_k^3 / 3(1 - \nu_k^2)$ цилиндрическая жесткость, E_k - модуль упругости, ν_k - коэффициент Пуассона, $2\delta_k$ - толщина, ρ_k - плотность, ϵ_k - коэффициент линейного затухания материала k -той пластинки, δ_{k1} - символ Кронекера, а функция $K(x_1, \xi)$ через которую выражаются ядра сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (1.1), определяется формулой [2,3]

$$K(x_1, \xi) = ih \frac{\pi(\xi - x_1)}{4b} \quad (1.2)$$

К системе уравнений (1.1) в каждом конкретном случае необходимо присоединить обычные однородные условия закрепления краев $x_1 = \pm a$ пластинок. Из (1.1) видно, что благодаря магнитному полю (интегральный член в (1.1)), колебания верхней нагруженной пластинки

передаются к нижней пластинке, которая свободна от внешних механических нагрузок.

2. Так как уравнения (1.1) и соответствующие граничные условия являются линейными, то решения поставленной задачи можно искать в виде суммы [2,3]

$$w_k(x_1, t) = w_k^{(1)}(x_1) + w_k^{(2)}(x_1, t)$$

где $w_k^{(1)}$ есть решения уравнений

$$D_k \frac{d^4 w_k^{(1)}}{dx_1^4} + \frac{H_0^2}{16\pi b} \int_{-a}^a \left(K \frac{dw_k^{(1)}}{d\xi} - \frac{1}{K} \frac{dw_k^{(1)}}{d\xi} \right) d\xi - \frac{H_0^2 \delta_k}{4\pi} \frac{d^2 w_k^{(1)}}{dx_1^2} = (-1)^{k+1} \frac{H_0^2}{8\pi} \quad (2.1)$$

удовлетворяющие тем же граничным условиям при $x_1 = \pm a$, что и w_k , а $w_k^{(2)}$ являются решениями уравнений

$$D_k \frac{\partial^4 w_k^{(2)}}{\partial x_1^4} + 2\rho_k \delta_k \frac{\partial^2 w_k^{(2)}}{\partial t^2} + 2\rho_k \delta_k \varepsilon_k \frac{\partial w_k^{(2)}}{\partial t} + \frac{H_0^2}{16\pi b} \int_{-a}^a \left(K \frac{\partial w_k^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{K} \frac{\partial w_k^{(2)}}{\partial \xi} \right) d\xi + [\delta_{k1} P(t) - \frac{H_0^2 \delta_k}{4\pi}] \frac{\partial^2 w_k^{(2)}}{\partial x_1^2} = -\delta_{k1} P(t) \frac{\partial^2 w_k^{(1)}}{\partial x_1^2} \quad (2.2)$$

при тех же граничных условиях.

Функции $w_k^{(1)}$ представляют решения задач изгиба пластинок под действием магнитного поля при отсутствии механической нагрузки $P(t)$. Эти решения, найденные в [3], представляют интерес при определении прочностных характеристик рассматриваемых пластинок. Здесь они необходимы также для определения (как это видно из (2.2)) функции $w_k^{(2)}$, характеризующие процесс бесконтактной передачи вынужденных и параметрических колебаний верхней пластинки к нижней через зазор между ними при помощи постоянного магнитного поля.

Предполагая, что края пластинок $x_1 = \pm a$ шарнирно оперты, решение системы (2.1), удовлетворяющее указанным условиям, будем искать в виде

$$w_k^{(1)} = \sum_{n=1}^m w_{kn} \sin \lambda_n (x_1 + a), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{2a} \quad (2.3)$$

где w_{kn} - неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Подставляя (2.3) в (2.1) и используя обычный процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующей системе неоднородных алгебраических линейных уравнений относительно w_{1m} и w_{2m} :

$$\begin{aligned} \alpha_{1m}^2 w_{1m} + \sum_{n=1}^m [b_{mn}^{(1)} w_{1m} - a_{mn}^{(2)} w_{2n}] &= c_m^{(1)} \\ \alpha_{2m}^2 w_{2m} + \sum_{n=1}^m [b_{mn}^{(2)} w_{2m} - a_{mn}^{(1)} w_{1n}] &= c_m^{(2)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

где введены следующие обозначения [2,3]:

$$\begin{aligned} \alpha_{km}^2 &= \Omega_{km}^2 + \frac{H_0^2}{8\pi\rho_k} \lambda_m^2, & \Omega_{km}^2 &= \frac{D_k \lambda_m^2}{2\rho_k \delta_k}, \\ \alpha_{mn}^{(k)} &= \frac{H_0^2}{32\pi\rho_k \delta_k} a_{mn}, & b_{mn}^{(k)} &= \frac{H_0^2}{32\pi\rho_k \delta_k} b_{mn}, \\ a_{mn} &= \frac{\lambda_n}{ab} \int_{-a}^a \cos \lambda_n (\xi + a) \sin \lambda_m (x_1 + a) \operatorname{th} \frac{\pi(x_1 - \xi)}{4b} dx_1 d\xi \\ b_{mn} &= \frac{\lambda_n}{ab} \int_{-a}^a \cos \lambda_n (\xi + a) \sin \lambda_m (x_1 + a) \operatorname{cth} \frac{\pi(x_1 - \xi)}{4b} dx_1 d\xi \\ c_m^{(k)} &= \frac{(-1)^{(k+1)} H_0^2 [1 - (-1)^m]}{16\pi a \rho_k \delta_k \lambda_m} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$(k = 1, 2; \quad m, n = 1, 2, 3 \dots)$$

В (2.5) Ω_{km} собственные частоты пластинок в отсутствии магнитного поля.

Используя (2.5) и имея в виду, что $|a_{mn}| \leq A, |b_{mn}| \leq B$, где A и B - некоторые постоянные, можно показать квазивполне регулярность системы (2.4) при любом значении величины H_0 . Следовательно, из этой системы методом редукции можно определить последовательные

приближения величины $w_k^{(1)}$.

3. Переходим к решению задачи колебаний, основанной на уравнении (2.2). Решение этой системы, удовлетворяющее условиям шарнирного опирания, представим в виде

$$w_k^{(2)}(x_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{kn}(t) \sin \lambda_n(x_1 + a) \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) и (2.3) в (2.2) и применяя процесс ортогонализации, для определения функций $f_{kn}(t)$ получается следующая бесконечная система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_{1m}}{dt^2} + \varepsilon_1 \frac{df_{1m}}{dt} + \theta_{1m}^2 (1 - 2\mu_m \cos \theta t) f_{1m} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [b_{mn}^{(1)} f_{1n} - a_{mn}^{(1)} f_{2n}] = \frac{\Omega_{1m}^2 w_{1m}}{P_m^*} (P_0 + P_1 \cos \theta t) \\ \frac{d^2 f_{2m}}{dt^2} + \varepsilon_2 \frac{df_{2m}}{dt} + \theta_{2m}^2 f_{2m} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [b_{mn}^{(2)} f_{2n} - a_{mn}^{(2)} f_{1n}] = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

где, помимо (2.5) введены также следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \theta_{1m}^2 = \Omega_{1m}^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_m^*}\right), \quad P_m^* = D_1 \lambda_m^2 \\ 2\mu_m = \frac{P_1}{P_m^*} \left(1 + \frac{H_0^2 \delta_1}{4\pi P_m^*} - \frac{P_0}{P_m^*}\right)^{-1}, \quad \theta_{2m}^2 = \Omega_{1m}^2 + \frac{H_0^2 \lambda_m}{8\pi \rho_1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

В (3.3) θ_{1m} частоты собственных колебаний отдельной верхней пластинки, нагруженной постоянной составляющей P_0 продольной силы, P_m^* - критические значения силы P_0 при статической устойчивости верхней пластинки в отсутствии магнитного поля, μ_m - коэффициенты возбуждения.

На основе уравнений (2.4) и (3.2) рассмотрим конкретные задачи, ограничиваясь первыми приближениями ($m=n=1$) в разложениях (2.3) и (3.1).

А. Случай одной пластинки, сжатой продольным усилием $P(t)$. Для

этого случая из (2.4), (2.5), (3.2) и (3.3) путем предельного перехода $b \rightarrow \infty$ получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_{11}}{dt^2} + \epsilon_1 \frac{df_{11}}{dt} + \omega_1^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) f_{11} \\ = \frac{\Omega_{11}^2 w_{11}}{P_1^*} (P_0 + P_1 \cos \theta t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \Omega_{11}^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_1^*}\right) + \frac{H_0^2 \lambda_1^2}{8\pi \rho_1} + b_{11}^{(1)} \\ \mu &= \mu_1 \omega_1^{-2} \left[\Omega_{11}^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_1^*}\right) + \frac{H_0^2 \lambda_1^2}{8\pi \rho_1} \right] \\ w_{11} &= \frac{H_0^2}{4\pi^2 \rho_1 \delta_1} \frac{1}{(\alpha_{11}^2 + b_{11}^{(1)})} , \quad \alpha_{11}^2 = \Omega_{11}^2 + \frac{H_0^2 \lambda_1^2}{8\pi \rho_1} \\ b_{11}^{(1)} &= \frac{H_0^2}{8\pi a \rho_1 \delta_1} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\sin(\pi u) \cos(\pi v)}{u-v} du dv = \frac{H_0^2 a}{8\pi a \rho_1 \delta_1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

В (3.5) ω_1 первая частота собственных магнитоупругих колебаний рассматриваемой пластинки, сжатой постоянной составляющей P_0 продольного усилия.

Из (3.4) в случае, когда пластинка сжимается статическим усилием P_0 , легко найти критическое значение этого усилия, при котором пластинка теряет статическую устойчивость в присутствии продольного магнитного поля

$$P_{0*} = P_1^* \left[1 + \frac{6(1-\nu_1^2)H_0^2}{\pi^5 E_1} \left(\frac{a}{\delta_1}\right)^3 \left(\alpha + \frac{\pi^2 \delta_1}{4a}\right) \right] \quad (3.6)$$

Формула (3.6), имея в виду, что $a = 1.3\lambda$ показывает, что наличие продольного магнитного поля может привести к существенному увеличению области статической устойчивости сверхпроводящей пластинки. Например, в случае дюралюминиевой пластинки ($E_1 = 7.3 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\nu_1 = 0.34$) при $a = 4 \cdot 10^2 \delta_1$ и $H_0 = 3 \cdot 10^3 \text{ э}$ получаем $P_{0*} = 19.88 P_1^*$.

Общее решение уравнения (3.4) складывается из общего решения однородного уравнения

$$\frac{d^2 f_{11}}{dt^2} + \epsilon_1 \frac{df_{11}}{dt} + \omega_1^2 (1 - 2\mu \cos(\theta t)) f_{11} = 0 \quad (3.7)$$

и частного решения уравнения (3.4), характеризующего вынужденные колебания изогнутой пластинки, появляющиеся вследствие магнитного давления $H_0^2 / 8\pi$ под действием периодического продольного усилия $P(t)$.

Уравнение (3.7) имеет периодические коэффициенты и, как известно [4], при некоторых соотношениях между его коэффициентами оно имеет неограниченно возрастающие решения, означающие динамическую неустойчивость рассматриваемой магнитоупругой системы.

Границы первой и второй областей динамической неустойчивости, расположенных соответственно вблизи частот $2\omega_1$ и ω_1 , согласно [4], определяются следующими приближенными формулами: для первой области

$$\theta_1^{\pm} = 2\omega_1 \left[1 \pm (\mu^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

для второй области

$$\theta_2^{\pm} = \omega_1 \left[1 - \mu^2 \pm [\mu^4 - \gamma^2(1 - \mu^2)]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

где

$$\gamma = \frac{\epsilon_1}{\omega_1}$$

Из (3.8) видно, что пока выражение под внутренним радикалом положительно, то есть пока $\mu > \gamma$, эта формула даст для критической частоты два вещественных значения, соответствующих двум границам первой области неустойчивости. При $H_0 = 0$ указанное условие выражается неравенством [4]

$$\frac{P_1}{P_{1*}} > \frac{2\epsilon_1}{\Omega_{11}} \left(1 - \frac{P_0}{P_1^*} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

а в присутствии магнитного поля, согласно (3.5), вместо (3.10) получается условие

$$\frac{P_1}{P_{1*}} > \frac{2\epsilon_1}{\Omega_{11}} \left[1 - \frac{P_0}{P_1^*} + \frac{H_0^2 \delta_1}{4\pi P_1^*} \left(1 + \frac{4\alpha}{\pi^2} \frac{a}{\delta_1} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

Поскольку правая часть неравенства (3.11) является возрастающей функцией напряженности магнитного поля, то начиная с некоторого значения $H_0 = H_{1*}$, где

$$H_{1*}^2 = \frac{2\pi^3 E_1}{3(1-\nu_1^2)} \left(\frac{\delta_1}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{4a\alpha}{\pi^2 \delta_1}\right)^{-1} \left[\left(\frac{P_t}{P_1^*} \frac{\Omega_{11}}{2\epsilon_1}\right)^2 - \left(1 - \frac{P_0}{P_1^*}\right)\right] \quad (3.12)$$

нарушается условие (3.11) и тем самым, исключается возможность появления параметрического резонанса около частоты $2\omega_1$. При $P_0 = 0$, $P_t \Omega_{11} / 2P_1^* \epsilon_1 = 1.2$ и при данных предыдущего примера из (3.12) получаем $H_{1*} = 4.58 \cdot 10^2$ э.

Аналогичным образом из (3.9) определяем следующее предельное значение H_{2*} напряженности заданного магнитного поля:

$$H_{2*}^2 = \frac{2\pi^3 E_1}{3(1-\nu_1^2)} \left(\frac{\delta_1}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{4a\alpha}{\pi^2 \delta_1}\right)^{-1} \left[\left(\frac{P_t}{2P_1^*}\right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{\Omega_{11}}{\epsilon_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(1 - \frac{P_0}{P_1^*}\right)\right] \quad (3.13)$$

превышение которого исключает возможность возбуждения незатухающих колебаний около частоты ω_1 .

Таким образом, при наложении магнитного поля и дальнейшем увеличении его напряженности ширина любой области динамической неустойчивости уменьшается и стремится к нулю при определенном значении напряженности заданного магнитного поля. Это значит, что при заданных значениях характеристик рассматриваемой пластинки и параметрической силы существуют минимальные значения H_{1*} напряженности магнитного поля, превышение которых исключает возможность появления параметрического резонанса вблизи определенного значения частоты магнитоупругих колебаний.

Перейдем к исследованию вынужденных колебаний искривленной пластинки на основе уравнения (3.4). Предположим, что имеет место следующее условие:

$$\frac{P_t}{2P_1^*} < \left(\frac{\epsilon_1}{\Omega_{11}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{P_0}{P_1^*}\right)^{\frac{3}{4}} \quad (3.14)$$

означающей невозможность возбуждения резонансных колебаний параметрического типа около частоты ω_1 . Задавшись целью исследовать колебания системы вблизи $\theta = \omega_1$, решение уравнения (3.4) ищем в виде

$$f_{11}(t) = a_0 + a_1 \sin(\theta t) + a_2 \cos(\theta t) \quad (3.15)$$

Подстановка (3.15) в уравнение (3.14) приводит после приравнивания свободных членов и коэффициентов при $\sin\theta t$ и $\cos\theta t$ к системе линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно a_0, a_1, a_2 .

Определитель этой системы, в силу условия (3.14), отличен от нуля для любого значения величины H_0 . Решая эту систему для амплитуды $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ установившихся колебаний (около изогнутого положения равновесия пластинки) получим следующее выражение:

$$A = \frac{P_1 P_1^*}{(P_1^* - P_0)^2} \frac{a \beta^2 [(\lambda^2 - n^2)^2 + (n\epsilon)^2]^{\frac{1}{2}}}{\lambda^2 (n\epsilon)^2 + (\lambda^2 - n^2) [\lambda^2 (\lambda^2 - n^2) - 2(\mu^0)^2]} \quad (3.16)$$

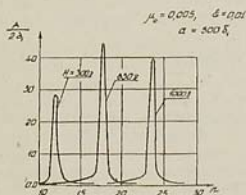
где

$$\lambda^2 = 1 + \frac{\delta_1 H_0^2}{4\pi (P_1^* - P_0)} \left(1 + \frac{4a\alpha}{\pi^2 \delta_1} \right)$$

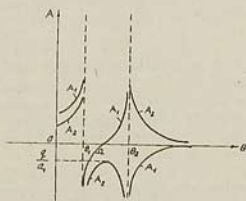
$$\beta^2 = \frac{12(1 - \nu_1^2) H_0^2}{\pi^6 E_1} \left(\frac{a}{\delta_1} \right)^3, \quad 2\mu^0 = \frac{P_1}{P_1^* - P_0}$$

$$n = \frac{\theta}{\Omega_{11}} \left(\frac{P_1^*}{P_1^* - P_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \epsilon = \frac{c_1}{\Omega_{11}} \left(\frac{P_1}{P_1^* - P_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

На основе формулы (3.16) произведены вычисления безразмерной амплитуды вынужденных колебаний дюралюминиевой пластинки в зависимости от безразмерной частоты параметрической силы при различных значениях напряженности магнитного поля.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для расчета принято

$$P_0 = 0, \quad \epsilon = 0.01, \quad \mu_0 = 0.05, \quad a = 500 \delta_1.$$

Результаты подсчета значений $A/2\delta_1$ приведены на фиг.1.

Рассматривая формулу (3.16) и приведенные кривые, замечаем, что:
а) резонанс в вынужденных колебаниях наступает около частоты $\lambda \Omega_{11}$, показывающий, что с увеличением магнитного поля величина резонансной частоты увеличивается;

б) зависимость амплитуды вынужденных колебаний от напряженности магнитного поля имеет экстремальный характер с точкой максимума;

в) при достаточно сильных магнитных полях амплитуда вынужденных колебаний существенно уменьшается;

г) чем больше коэффициент возбуждения μ_0 при соблюдении условия (3.14), тем сильнее интенсивность резонансных явлений.

Б.Случай двух одинаковых пластин. Пусть рассматриваемые пластинки имеют одинаковые и геометрические параметры

$$(E_1 = E_2 = E, \nu_1 = \nu_{21} = \nu, \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon, \rho_1 = \rho_2 = \rho, \delta_1 = \delta_2 = h)$$

Для этого случая из (3.2) следует, что колебательный процесс рассматриваемой магнитоупругой пластинки в первом приближении при $P_0 = 0$ описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_{11}}{dt^2} + \epsilon \frac{df_{11}}{dt} + \Omega^2 (1 - 2\bar{\mu} \cos(\theta t)) f_{11} - a_1 f_{21} &= q \cos(\theta t) \\ \frac{d^2 f_{21}}{dt^2} + \epsilon \frac{df_{21}}{dt} + \Omega^2 f_{21} - a_1 f_{11} &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

где

$$\Omega^2 = r^2 \Omega_{11}^2, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu_0^2}{r^2}, \quad a_1 = \frac{H_0^2}{16\rho h b} \alpha_2$$

$$q = \frac{\mu_0^2 H_0^2}{2\pi^2 \rho h} \frac{1}{(r^2 + a_1 \Omega_{11}^{-2})}, \quad r^2 = 1 + \frac{H_0^2 h}{4\pi P_1} \left(1 + \frac{2\alpha_1}{\pi} \frac{a^2}{bh}\right)$$

$$\alpha_1 = \int_0^1 \int_0^1 \sin(\pi u) \cos(\pi v) \operatorname{cth} \frac{\pi a(u-v)}{2b} du dv$$

$$\alpha_2 = \iint_{00}^{11} \sin(\pi u) \cos(\pi v) i h \frac{\pi a(u-v)}{2b} du dv \quad (3.18)$$

Система (3.17) показывает, что благодаря магнитному полю ($a_1 \neq 0$) как параметрические, так и сопутствующие вынужденные колебания верхней пластинки, вызванные действием продольного усилия $P(t)$, бесконтактно передаются к нижней, свободной от механических нагрузок, пластинке. Причем, появление вынужденных колебаний, как и в случае одной пластинки, обусловлено искривлением верхней пластинки под действием магнитного давления $H_0^2/8\pi$.

Из однородной системы, соответствующей (3.17), известным методом [4], находим критические частоты, определяющие границы областей динамической неустойчивости. В частности, для определения границ θ главной области параметрического резонанса, получается следующее уравнение:

$$[(r^2 - z)^2 + \psi^2 z - k^2]^2 - (\mu^0)^2 [(r^2 - z)^2 + \psi^2 z] + (2k\psi)^2 z = 0 \quad (3.19)$$

$$z = \left(\frac{\theta}{2\Omega_{11}}\right)^2, \quad \psi = \frac{\epsilon}{\Omega_{11}}, \quad k = \frac{a_1}{\Omega_{11}^2}$$

Из уравнения (3.19) в случае консервативной задачи ($\psi = 0$) для границ главной области неустойчивости (для критических частот параметрического резонанса) получим следующие выражения:

$$\frac{\theta_{* \pm}}{2\Omega_{11}} = \left[r^2 \pm \left(\frac{\mu^0}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{(\mu^0)^2}{4}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

которые при отсутствии магнитного поля ($k=0$, $r=1$) совпадают с известными выражениями для критических частот классической теории динамической устойчивости ($\theta_{*0} = 2\Omega_{11}(1 \pm \mu^0)^{\frac{1}{2}}$) [4].

Формулы (3.20) показывают, что при наложении магнитного поля и дальнейшем увеличении его напряженности ширина ($\theta_{*+} - \theta_{*-}$) области главного параметрического резонанса вначале уменьшается, достигая минимума для определенного значения H_0 , после чего начинает неограниченно возрастать. Из (3.20) видно, что при отсутствии нижней пластинки ($k=0$) величина ($\theta_{*+} - \theta_{*-}$) является монотонно убывающей функцией напряженности магнитного поля.

Рассмотрим, наконец, вопросы вынужденных колебаний, предполагая, что система находится вне второй области динамической неустойчивости. Для простоты ограничимся случаем консервативной задачи ($\epsilon = 0$). Представляя решение системы (3.17) в виде

$$f_{11} = A_1 \cos(\theta t) + B_1, \quad f_{21} = A_2 \cos(\theta t) + B_2$$

для амплитуд установившихся колебаний A_1 (для верхней пластинки) и A_2 (для нижней пластинки) получим выражения

$$A_1 = \frac{\Omega^2 - \theta^2}{(\theta_1^2 - \theta^2)(\theta_2^2 - \theta^2)} q, \quad A_2 = \frac{a_1}{(\theta_1^2 - \theta^2)(\theta_2^2 - \theta^2)} q \quad (3.21)$$

где

$$\theta_i^2 = \Omega_{11}^2 \left[r^2 - \frac{(\mu_0)^2}{r^2 - k^2 r^{-2}} + (-1)^i \sqrt{k^2 + \left[\frac{(\mu_0)^2}{r^2 - k^2 r^{-2}} \right]^2} \right]$$

Зависимость A_1 и A_2 от частоты параметрической силы θ показана на фиг.2. Из этой фигуры видно, что с возрастанием θ обе амплитуды монотонно увеличиваются и стремятся к бесконечности при $\theta \rightarrow \theta_1$ (наступление первого резонанса). В этой области ($0 \leq \theta < \theta_1$) обе амплитуды положительны, то есть обе пластинки колеблются в фазе с возмущающей силой. Когда $\theta_1 \leq \theta < \theta_2$, амплитуды A_1 и A_2 имеют отрицательные значения, то есть обе пластинки колеблются со сдвигом фазы 180° относительно возмущающей силы, но еще находятся в одной фазе друг с другом. В интервале $\Omega \leq \theta < \theta_2$ амплитуда A_1 вновь становится положительной, переходя через нуль при $\theta = \Omega$, тогда как A_2 остается отрицательной. Это значит, что в рассматриваемом интервале колебания обеих пластин сдвинуты по фазе на 180° , причем колебание верхней пластинки находится в одной фазе с возмущающей силой. Наконец, когда θ приближается к частоте θ_2 , обе амплитуды неограниченно возрастают и наступают условия второго резонанса. После этого, пластинки продолжают колебаться в различных фазах, но с убывающими амплитудами, и когда θ очень велика, колебания обеих пластин почти исчезают.

Определенное практическое значение имеет тот факт, что $A_1 = 0$ при $\theta = \Omega$. Это означает, что, хотя возмущающая сила действует на верхнюю пластинку, однако, она вызывает колебания только нижней пластинки (если учитывать влияние демпфирования ($\epsilon \neq 0$), то будет колебаться также верхняя пластинка с амплитудой колебания нижней пластинки). Амплитуда A_2 колебаний нижней пластинки в этом случае, как видно из (3.18), (3.21) и (3.22), равна ($H_0 \neq 0$)

$$A_2 = -\frac{8\mu_0 b}{\pi^2 \alpha_2} \left[1 + \frac{H_0^2 h}{4\pi^2 I_1} \left(1 + \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2) a^2}{\pi b h} \right) \right]^{-1} \quad (3.23)$$

Таким образом, при помощи магнитного поля, во-первых, в одной пластинке возбуждаются изгибные вынужденные колебания под действием гармонической продольной силы и, во-вторых, эти колебания бесконтактно передаются ко второй (свободной от механических нагрузок) пластинке. Причем, соответствующим выбором параметров задачи можно достичь того, чтобы, в основном, колебалась только вторая пластинка с

регулируемой амплитудой. Это означает также, что свободная от механических нагрузок пластинка выполняет роль динамического гасителя колебаний верхней пластинки. Как видно из (3.23), амплитуда колебаний гасителя достаточно быстро увеличивается с ослаблением связи между пластинками (уменьшении напряженности заданного магнитного поля и увеличение расстояния между пластинками).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. *Электродинамика сплошных сред*. - М.: Гостехиздат, 1957. 532 с.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. *Магнитоупругость тонких оболочек и пластин*. - М.: Наука, 1977. 272 с.
3. Багдасарян Г. Е., Пилипосян Г. Т. Изгибы колебание параллельных сверхпроводящих пластин в продольном магнитном поле. - *Изв. АН Армении, Механика*, 1990, т. 43, 5, с. 3-10.
4. Болотин В. В. *Динамическая устойчивость упругих систем*. - М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
5. Багдасарян Г. Е. Бесконтактный способ возбуждения резонансных колебаний в сверхпроводящей пластинке. - *Изв. АН Арм. ССР, Механика*, т. 42, 6, с. 3-9.

Ереванский государственный университет
Поступила в редакцию 9.07.1992