ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 45, № 1-2, 1992 Механика

# ИЗГИБ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

ГРИГОРЯН Э.Х.

Գրիգորյան Է.Խ., Կիսահարթության վրա գտնվող կիսաանվերջ հեծանի ծռումը։

E.Ch.Grigorian Bending of semi-infinite beam, lying on elastic half-plane.

Ֆուրյեի ընդհանրացված ձևափոխության մեթոդով լուծված է կիսահարթության վրա գտնվող կիսաանվերջ հեծանի ծռման խնդիրը։

На основе метода обобщенного преобразования Фурье решена задача изгиба полубесконечной балки,лежащей на упругой полуплоско.

В работе [1] получено замкнутое решение задачи об изгибе полубесконечной балки на упругой полуплоскости, с помощью предельного перехода в решении соответствующей пространственной задачи (стремления к нулю параметра преобразования Фурье). Эта задача, в частности, рассмотрена также в работах [2,3] замкнутое решение которой получено сведением ее к краевой задаче Карлемана для аналитических функций,в которых показано,чт контактные напряжения (нормальные) при $x \to 0$ имеют порядок $O(x^{-\frac{1}{2}})$, а при $x \to \infty$ $O(x^{-4})$.

В настоящей работе опять рассматривается изгиб полубесконечной балки (цилиндрический изгиб пластинки) на упругой полуплоскости,когда к концу балки приложена сила $Q_0$ и момент $M_0$. Исследование ведется, как обычно, без учета касательных контактных напряжений и без учета явления отрыва балки от упругой полуплоскости.

Задача с помощью обобщенного преобразования Фурье сводится к решению функционального уравнения на действительной оси. Дается замкнутое решение этого функцонального уравнения.Простая факторизация коэффициента функционального уравнения дает возможность вычислить две произвольные постоянные, которые содержатся в решении функционального уравнения, и, тем самым, получить простые асимптотические формулы для контактных напряжений в окрестности конца и далеких от него точках балки. Из асимптотической формулы, характерирующей поведения контактных напряжений в окрестности конца балки следует, что при $\frac{Q_0}{M_0} = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$, в конце балки, контактное напряжение равно нулю, т.е. особенность исчезает $\left(\lambda = \left(\frac{\mu}{(1-\nu)D}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ ($\mu$, $\nu$ - соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала полуплоскости, D - жесткость балки. Кроме того, балка, в точках некоторой окрестности своего конца, при $Q_0/M_0 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$ вдавливается на полуплоскость, а в остальном - растягивает ее. Из асимптотической формулы, характеризующей поведение контактных напряжений при $x \to \infty$, следует, что после некоторого значения x, балка вседа растягивает полуплоскость.

Пусть на границе упругой полуплоскости лежит полубесконечная балка с жесткостью D, к концу которой приложена сила $Q_0$ и момент $M_0$. Требуется определить нормальные контактные напряжения, действующие на участке балки с границей полуплоскости. Дифференциальное уравнение равновесия балки имеет вид

$$D\frac{d^4 v^{(1)}}{dx^4} = q(x), \qquad (0 < x < \infty) \tag{1}$$

при условии

$$D\frac{dv^{(1)}}{dx}\Big|_{x=0} = X_0, \qquad D\frac{d^2 v^{(1)}}{dx^2}\Big|_{x=0} = M_0$$

$$D\frac{d^3 v^{(1)}}{dx^3}\Big|_{x=0} = -Q_0 \tag{2}$$

где q(x)- итенсивность нормальных контактных напряжений, $v^{(1)}(x)$-- вертикальные перемещения точек балки, $X_0$ - неизвестная постоянная.

Отметим что условия равновесия балки имеют вид

$$\int_0^\infty q(x)\,dx = Q_0, \qquad \int_0^\infty x\,q(x)\,dx = M_0 \tag{3}$$

Для дальнейшего введем класс функций

$$A^{\pm}(x) = \theta(\pm x)\,A(x)$$

$$\overline{A}^{\pm}(\sigma) = F\,[\pm A(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} A^{\pm}(x)\exp(i\sigma x)\,dx$$

$$A^{\pm}(x) = F^{-1}\,[\bar{A}^{\pm}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A^{\pm}(\sigma)\exp(-i\sigma x)\,d\sigma$$

где $\theta(x)$ - функция Хевисайда , F - преобразование Фурье, а $F^{-1}$ -обратное преобразование. Кроме того [4] ,

$$\bar{A}^{\pm}(\sigma)\bar{B}^{\pm}(\sigma) = \bar{C}^{\pm}(\sigma), \text{ т. е. } F^{-1}\,[\bar{C}^{\pm}(\sigma)] = \theta(\pm x)\,C(x)$$

После обозначения $V_1(x) = d\,v^{(1)}/dx$, граничную задачу (1 ), можно записать одним уравнением при $-\infty < x < \infty$ следующего вида:

$$D\frac{d^3 V_1^+(x)}{dx^3} = q^+(x) - Q_0\delta(x) + M_0\delta'(x) + X_0\delta''(x) \tag{4}$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

Теперь,применив к (4 ) обобщенное преобразование Фурье, получим

$$i\sigma^3\bar{V}_1^+(\sigma) = \frac{\bar{q}^+(\sigma)}{D} - \frac{Q_0}{D} - i\sigma\frac{M_0}{D} - \frac{\sigma^2 X_0}{D} \tag{5}$$

С другой стороны,для другой полуплоскости известно [5], что

$$V^+(x) + V^-(x) = -\frac{1-\nu}{\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q^+(s)}{s-x}\,dx \tag{6}$$

где $V(x) = d\,v/dx$ , $v(x,0)$ – вертикальные перемещения граничных точек полуплоскости.Применив к (6) преобразование Фурье, будем иметь

$$\frac{1-\nu}{\mu}\,i\,sgn\,\sigma\,\bar{q}^+(\sigma) = \bar{V}^+(\sigma) + \bar{V}^-(\sigma) \tag{7}$$

$$(-\infty < \sigma < \infty)$$

Далее,имея в виду условие контакта

$$V^+(x) = V_1^+(x)$$

из (5) и (7) получим функциональное уравнение, разрешающее поставленную задачу

$$(\lambda^3 + |\sigma|^3)\,\bar{q}^+(\sigma) + i\sigma^3\bar{V}^-(\sigma) = \bar{f}(\sigma) \qquad (8)$$

где

$$\bar{f}(\sigma) = \lambda^3 Q_0 + \lambda^3\sigma^2 X_0 + i\sigma\lambda^3 M_0\,, \quad \lambda = [\mu/D(1-\nu)]^{\frac{1}{3}}$$

Таким образом, задача свелась к решению функционального уравнения (8), которое будем решать методом, изложенным в [4,6]. Факторизуем $\lambda^3 + |\sigma|^3$, представив ее в виде

$$\lambda^3 + |\sigma|^3 = \bar{K}^+(\sigma)\,\bar{K}^-(\sigma) \qquad (9)$$

где

$$\bar{K}^+(\sigma) = (\sigma + i0)^{\frac{3}{2}}\,\bar{G}^+(\sigma)\,, \quad \bar{K}^-(\sigma) = (\sigma - i0)^{\frac{3}{2}}\,\bar{G}^-(\sigma)$$

$$\bar{G}^\pm(\sigma) = \exp\bar{\Psi}^\pm(\sigma)\,, \qquad \bar{\Psi}^\pm(\sigma) = \int_0^\infty \Psi(x)\exp(\pm i\sigma x)\,dx$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\lambda^3}{|\sigma|^3}\right)\exp(-i\sigma x)\,d\sigma$$

$$(\sigma \pm i0)^{\frac{3}{2}} = \sigma_+^{\frac{3}{2}} \mp \sigma_-^{\frac{3}{2}}\,, \quad \sigma_+^{\frac{3}{2}} = \theta(\sigma)\,\sigma^{\frac{3}{2}}\,, \quad \sigma_-^{\frac{3}{2}} = \theta(-\sigma)\,|\sigma|^{\frac{3}{2}}$$

Теперь, подставляя факторизованную функцию $\lambda^3 + |\sigma|^3$ из (9) в (8), после некоторых преобразований, придем к уравнению

$$\bar{L}_1^+(\sigma) = \bar{K}^+(\sigma)\,q^+(\sigma) = \bar{g}^-(\sigma) = \bar{L}_2^-(\sigma) \quad (-\infty < \sigma < \infty) \qquad (10)$$

где

$$\bar{g}^-(\sigma) = [-i\sigma^3\bar{V}^-(\sigma) + \bar{f}(\sigma)]\,.\,[\bar{K}^-(\sigma)]^{-1}$$

Из (10) следует

$$L_1^+(x) = L_2^-(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

которое может иметь место только при [7]

$$L_1^{+}(x) = L_2^{-}(x) = a_0\delta(x) + \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_n \delta^{(k)}(x) \tag{11}$$

где $\delta^{(k)}(x)$ - производная функции $\delta(x)$ порядка k, k - любое конечное число. Далее, применив преобразования Фурье к (11), получим

$$\bar{K}^{+}(\sigma)\bar{q}^{+}(\sigma) = \bar{g}^{-}(\sigma) = a_0 + a_1\sigma + \sum_{k=2}^{n} a_k \sigma^k$$

Поскольку $q^{+}(x)$ и $V^{-}(x)$ при $x \to \pm 0$ имеют корневую особенность, то отсюда следует, что $\bar{q}^{+}(\sigma)$ и $\bar{V}^{-}(\sigma)$ при $|\sigma| \to \infty$ имеют порядок $\bar{q}^{+}(\sigma) \approx |\sigma|^{-\frac{1}{2}}$, $\bar{V}^{-}(\sigma) \approx |\sigma|^{-\frac{1}{2}}$. Тогда нетрудно видеть, что $\bar{K}^{+}(\sigma)\,\bar{q}^{+}(\sigma) \sim \sigma$, $\bar{q}^{-}(\sigma) \sim \sigma$ при $\sigma \to \pm\infty$. Тогда из (12) будет следовать, что $a_k = 0$ $(k = 2,3,\dots n)$. Таким образом, искомое $\bar{q}^{+}(\sigma)$ определится в виде

$$\bar{q}^{+}(\sigma) = \frac{a_0 + a_1\sigma}{\bar{K}^{+}(\sigma)} \tag{13}$$

Для определения постоянных $a_0$ и $a_1$ заметим, что условия (3) можно записать в виде

$$\bar{q}^{+}(0) = Q_0\,, \qquad \frac{d\bar{q}^{+}(\sigma)}{d\sigma}\bigg|_{\sigma\to 0} = iM_0 \tag{14}$$

Удовлетворив условиям (14), получим

$$a_0 = Q_0\bar{K}^{+}(0)\,, \quad a_1 = i\bar{K}^{+}(0)M_0 + Q_0\frac{d\bar{K}^{+}(\sigma)}{d\sigma}\bigg|_{\sigma\to 0}$$

Теперь приступим к вычислению $\bar{K}^{+}(0)$ и $\frac{d\bar{K}^{+}(\sigma)}{d\sigma}\Big|_{\sigma\to 0}$

$\bar{K}^{+}(0)$ и $\frac{d\bar{K}^{+}(\sigma)}{d\sigma}\Big|_{\sigma\to 0}$ можно записать в виде:

$$\bar{K}^{+}(0) = \exp\left[\bar{\Psi}^{+}(\sigma) + \frac{3}{2}\ln(\sigma + i0)\right]\bigg|_{\sigma\to 0}$$

$$\overline{K}^+(0) = \exp\left[\overline{\Psi}^+(\sigma) + \frac{3}{2}\ln(\sigma + i0)\right] \Big|_{\sigma \to 0}$$

$$\frac{d\overline{K}^+(\sigma)}{d\sigma} \Big|_{\sigma \to 0} = \left( \frac{3}{2}\frac{1}{\sigma + i0} + \frac{d\overline{\Psi}^+(\sigma)}{d\sigma} \right) \Big|_{\sigma \to 0} \overline{K}^+(0)$$

Рассмотрим $\overline{\Psi}^+(\sigma)$, выписывая ее в виде

$$\overline{\Psi}^+(\sigma) = \int_0^\infty \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln\left(1 + \frac{\lambda^3}{s^3}\right) \cos(s\,x)\, ds \cos(\sigma\,x)\, dx$$

$$+ i \int_0^\infty \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln(\lambda^3 + s^3) \cos(sx)\, ds \sin(\sigma x)\, dx$$

$$-3i \int_0^\infty \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln(s) \cos(sx)\, ds \sin(\sigma x)\, dx$$

Так как

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \ln\left(1 + \frac{\lambda^3}{s^3}\right) \cos(sx)\, ds \cos(\sigma x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(\lambda^3 + |\sigma|^3) - \frac{3}{2}\ln|\sigma|$$

$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln(s)\cos(sx)\, ds = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|x|} + A\,\delta(x)\right)$ – в смысле теории обобщенных функций, где $A$ - произвольная постоянная и, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin\sigma x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\, sgn\ \sigma$$

то

$$\overline{\Psi}^+(\sigma) = \frac{1}{2}\ln(\lambda^3 + |\sigma|^3) - \frac{3}{2}\ln|\sigma| + 3i\frac{\pi}{4}\, sgn\ \sigma + i\,\overline{T}(\sigma)$$

Здесь

$$\widetilde{I}(\sigma)=\int_0^\infty I(x)\sin\sigma x\,dx\ ; \qquad I(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln(\lambda^3+s^3)\cos sx\,ds$$

Далее, поскольку $\ln(\lambda^3+s^3)=3\ln\lambda+O(s^3)$ при $s\to 0$, то отсюда следует, что $I(x)-x^{-4}$ при $x\to\infty$ ,а так как при $s\to\infty$ имеем

$$\ln(\lambda^3+s^3)=3\ln s+O(s^{-3})$$

то при $x\to 0$ $I(x)=-\ \frac{3}{2}\left(\frac{1}{|x|}+A\delta(x)\right)+O(x^2\ln|x|)$. Это говорит о том, что x I(x) суммируемая функция. Следовательно,

$$\frac{d\widetilde{I}(\sigma)}{d\sigma}\Big|_{\sigma\to 0}=\int_0^\infty I(x)\,x\,dx\ , \qquad \widetilde{I}(\sigma)\Big|_{\sigma\to 0}=0$$

Из вышесказанного следует,что

$$\left(\overline{\Psi}^+(\sigma)+\frac{3}{2}\ln(\sigma+i0)\right)_{\sigma\to 0}=3i\,\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\ln\lambda \qquad (15)$$

а

$$\left[\frac{d\overline{\Psi}^+(\sigma)}{d\sigma}+\frac{3}{2}\,(\sigma+i0)^{-1}\right]_{\sigma\to 0}=i\,\frac{d\widetilde{I}(\sigma)}{d\sigma}\ \Big|_{\sigma\to 0}$$

где

$$\ln(\sigma+i0)=\ln|\sigma|+i\pi\theta(-\sigma)$$

Оказывается, что

$$\left[\frac{d\overline{\Psi}^+(\sigma)}{d\sigma}+\frac{3}{2}\,(\sigma+i0)^{-1}\right]_{\sigma\to 0}=-\ \frac{2i}{\sqrt{3}\,\lambda} \qquad (16)$$

в чем убедимся в дальнейшем.

С помощью формул (15), и (16) $a_0$ и $a_1$ определяются в виде

$$a_0=Q_0\lambda\sqrt{\lambda}\exp\left(3i\frac{\pi}{4}\right)\ , \quad a_1=-\,i\exp\left(3i\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\lambda}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}Q_0-\lambda M_0\right)$$

Теперь приступим к определению асимптотических формул для $q(x)$ при $x \to 0$ и $x \to \infty$. Поэтому, как известно, надо рассматривать разложения $\bar{q}^{+}(\sigma)$ при $|\sigma| \to \infty$ и $|\sigma| \to 0$ соответственно. Для этого, сначала, определим вид функции $d\overline{\Psi}^{+}(\sigma)/d\sigma$, проводя вычисления интеграла

$$\frac{d\overline{\Psi}^{+}(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i x \Psi(x) \exp(i(\sigma + i0)x)\, dx$$

Нетрудно видеть, что

$$i x \Psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{ds}\left[\ln\left(1 + \frac{\lambda^3}{|s|^3}\right)\right] \exp(-isx)\, ds$$

$$= -\frac{3\lambda^3}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-isx)\, ds}{s(\lambda + |s|^3)}$$

где интеграл при $s \to 0$ понимается в смысле главного значения по Коши. В силу нечетности подынтегрального выражения и замены $sx = t$, $x\Psi(x)$ можно записать в виде

$$x\Psi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda x}\int_0^{\infty} \frac{3\tau^2 \cos t}{\tau^3 + t^3}\, dt\, d\tau$$

Далее, имея в виду, что

$$\frac{3\tau^2}{\tau^3 + t^3} = \frac{1}{(t+\tau)} + \frac{1}{\xi(t - \zeta\tau)} + \frac{1}{\bar{\xi}(t - \bar{\zeta}\tau)}$$

где $\xi = \zeta - 1$, $\zeta = \exp(i\frac{\pi}{3})$, и что

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t - \zeta\tau}\, dt = \pi i \exp(i\zeta\tau) + \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t + \zeta\tau}\, dt$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t - \bar{\zeta}\tau}\, dt = -\pi i \exp(-i\bar{\zeta}\tau) + \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t + \bar{\zeta}\tau}\, dt$$

то окончательно получим

$$\frac{d\overline{\Psi}^+(\sigma)}{d\sigma}=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\bar{\xi}}{1+\bar{\xi}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)}-\frac{\zeta}{1-\zeta\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)}\right]-\frac{3}{2}\frac{1}{\sigma+i0}$$

$$-\frac{i}{\pi\lambda}\left[\frac{i\frac{\pi}{2}-i\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)-\ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)}{1-\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^2}\right.$$

$$-\frac{i\frac{\pi}{2}-i\frac{\pi}{2}\bar{\xi}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)-\ln\left(\bar{\xi}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)}{\zeta\left(1-\left(\bar{\xi}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)^2\right)}$$

$$-\frac{i\frac{\pi}{2}-i\frac{\pi}{2}\zeta\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)-\ln\left(\zeta\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)}{\bar{\xi}\left(1-\left(\zeta\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)^2\right)} \qquad (18)$$

Теперь , используя формулу (18), определим $\frac{d\overline{\Psi}^+(\sigma)}{d\sigma}$ при $|\sigma|<\lambda$

$$\frac{d\overline{\Psi}^+(\sigma)}{d\sigma}=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\bar{\xi}}{1+\bar{\xi}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)}-\frac{\zeta}{1-\zeta\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)}\right]-\frac{3}{2}\frac{1}{\sigma+i0}$$

$$+\frac{2i}{\pi\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{i\sigma}{2}-\ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)\left(\cos\frac{\pi(2n+1)}{3}-\frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi(2n+1)}{3}\right]\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{2n}$$

$$+\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{2n-1}\left(\cos\frac{2\pi n}{3}-\frac{1}{2}\right) \qquad (19)$$

и при $|\sigma|>\lambda$

$$\frac{d\overline{\Psi}^+(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=2}^{\infty}(\xi^{1-n} - (-1)^n\overline{\xi}^{1-n})\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{-n}$$

$$-\frac{2i}{\pi\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{i\pi}{2} - \ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)\left(\cos\frac{\pi(2n-1)}{3} - \frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi(2n-1)}{3}\right]\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{-2n}$$

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{-(2n+1)}\left(\cos\frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{2}\right) \qquad (20)$$

Из (19)легко получить, что

$$\left(\frac{d\overline{\Psi}^+(\sigma)}{d\sigma} + \frac{3}{2}\frac{1}{\sigma+i0}\right)_{\sigma\to 0} = -\frac{2i}{\sqrt{3}\lambda}$$

которое было использовано при вычислении $a_1$.

С помощью формулы (19) определим $\overline{\Psi}^+(\sigma)$ при $|\sigma| < \lambda$

$$\overline{\Psi}^+(\sigma) = \ln\left[\left(1 + \overline{\xi}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)\left(1 - \xi\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)\right]$$

$$-\frac{3}{2}\ln\frac{\sigma+i0}{\lambda} + \frac{3i\pi}{4} + \overline{\varphi}^+(\sigma) \qquad (21)$$

где

$$\overline{\varphi}^+(\sigma) = \frac{2i}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{2n+1}\left[\left(i\frac{\pi}{2} - \ln\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2n+1}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}(2n+1) - \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}(2n+1)\right]$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{2}}{2n}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{2n}$$

а из (20) определим $\overline{\Psi}^+(\sigma)$ при $|\sigma| > \lambda$

$$\overline{\Psi}^{+}(\sigma) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}\left(\zeta^{1-n} - (-1)^n \bar{\zeta}^{1-n}\right)\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{1-n}$$

$$+\frac{2i}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{i\pi}{2} - \ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right) - \frac{1}{2n-1}\right)\left(\cos\frac{\pi(2n-1)}{3} - \frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi(2n-1)}{3}\right]\frac{1}{2n-1}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{1-2n}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{-2n}\left(\cos\frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{2}\right) \qquad (22)$$

Отметим, что выше имелось в виду, что $\overline{\Psi}^{+}(0) = \frac{3i\pi}{4}$ и, что $\overline{\Psi}^{+}(0) \to 0$ при $|\sigma| \to \infty$.

Теперь приступим к определеню разложения $\bar{q}^{+}(\sigma)$ при $|\sigma|<\lambda$ и $|\sigma|>\lambda$. Подставляя выражения $\overline{\Psi}^{+}(\sigma)$ из (21) и (22) в (13), получим

$$\bar{q}^{+}(\sigma) = \frac{(a_0 + a_1\sigma)\exp\left(-\frac{3i\pi}{4}\right)}{\left(1+\bar{\xi}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)\left(1-\zeta\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)}\left[1\right.$$

$$\left.-\bar{\varphi}^{+}(\sigma) + \frac{1}{2}\bar{\varphi}^{+2}(\sigma) - \frac{1}{6}\bar{\varphi}^{+3}(\sigma) + \ldots\right] \quad \text{при } |\sigma|<\lambda$$

и

$$\bar{q}^{+}(\sigma) = \frac{(a_0 + a_1\sigma)}{(\sigma+i0)^{\frac{3}{2}}}\left[1 - \overline{\Psi}^{+}(\sigma) + \frac{1}{2}\overline{\Psi}^{+2}(\sigma) - \frac{1}{6}\overline{\Psi}^{+3}(\sigma) + \ldots\right]$$

при $|\sigma|>\lambda$.

Используя эти разложения, получим

$$\bar{q}^{+}(\sigma) = \frac{Q_0}{\pi}i\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^3\left(i\frac{\pi}{2} - \ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right) + \frac{1}{3}\right)$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{Q_0}{\sqrt{3}} + \lambda M_0\right)\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^4\left(i\frac{\pi}{2} - \ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right) + \frac{1}{3}\right)$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{2}\lambda M_0-\frac{\sqrt{3}}{2}Q_0\right)\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^6\left(i\frac{\pi}{2}-\ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)+\frac{1}{3}\right)$$

$$-\frac{Q_0}{2\pi^2}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^6\left(i\frac{\pi}{2}-\ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{\pi}\left(\frac{Q_0}{2}\right.$$

$$\left.-\sqrt{3}\lambda M_0\right)i\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^5\left(\frac{i\pi}{2}-\ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)+\frac{1}{3}\right)+\ldots$$

при $|\sigma|<\lambda$

$$\bar{q}^{+}(\sigma)=-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}Q_0-\lambda M_0\right)i\exp\left(\frac{3i\pi}{4}\right)\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\left(\frac{Q_0}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\lambda M_0\right)\exp\left(\frac{3i\pi}{4}\right)\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{Q_0}{\sqrt{3}}+\lambda M_0\right)i\exp\left(\frac{3i\pi}{4}\right)\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$-\frac{4}{9\sqrt{3}}\left(\frac{5Q_0}{2\sqrt{3}}+\lambda M_0\right)\exp\left(\frac{3i\pi}{4}\right)\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{-\frac{7}{2}}$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{2Q_0}{\sqrt{3}}-\lambda M_0\right)\exp\left(\frac{3i\pi}{4}\right)\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{-\frac{7}{2}}\left(\frac{i\pi}{2}\right.$$

$$\left.-\ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)-\frac{1}{3}\right)+\ldots,\qquad(24)$$

при $|\sigma|>\lambda$ .

Далее, применив к ( 23 ) и ( 24 ) обратные преобразования Фурье и имея в виду формулы [7],

$$F^{-1}\left[\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^n\left(i\frac{\pi}{2}+\Psi(3)-\ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right]\right.$$

$$=(-i)^n\frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^n}x^{-(n+1)},$$

$$F^{-1}\left[\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^6\left(i\frac{\pi}{2}-\ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)+\frac{1}{3}\right)^2\right]$$

$$=\frac{2\Gamma(7)}{\lambda^6}x^{-7}\left(\Psi(7)-\frac{1}{3}-\ln\lambda x\right),$$

$$F^{-1}[(\sigma+i0)^{-\beta-1}] = \frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{2}(1+\beta)\right)}{\Gamma(1+\beta)}x^{\beta}$$

$$F^{-1}[(\sigma+i0)^{-\beta-1}\ln(\sigma+i0)]$$

$$= \frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{2}(1+\beta)\right)}{\Gamma(1+\beta)}x^{\beta}\left(i\frac{\pi}{2}+\Psi(1+\beta)-\ln x\right),$$

где $x>0$, $\beta\neq -1, -2, -3, \ldots$, $\Gamma(x)$, $\Psi(x)$ – соответственно известные гамма и пси функции, получим искомые асимптотические формулы

$$\lambda^{-1}q(x) = -\frac{Q_0\Gamma(4)}{\pi}(\lambda x)^{-4} - \frac{\Gamma(5)}{\pi}\left(\frac{Q_0}{\sqrt{3}}+\lambda M_0\right)(\lambda x)^{-5}$$

$$+\frac{\Gamma(6)}{\pi}\left(\frac{Q_0}{2}-\sqrt{3}\lambda M_0\right)(\lambda x)^{-6}$$

$$+\frac{\Gamma(7)}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}\,Q_0}{2}-\frac{3}{2}\lambda M_0\right)(\lambda x)^{-7} \tag{25}$$

$$-\frac{\Gamma(7)}{\pi^2}Q_0(\lambda x)^{-7}\left(\Psi(7)-\frac{1}{3}-\ln(\lambda x)\right)+O\left(x^{-9}(1+\ln x)\right)$$

при $|x|\to\infty$

$$\lambda^{-1}q(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{2Q_0}{\sqrt{3}}-\lambda M_0\right)(\lambda x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}\left(\frac{Q_0}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\lambda M_0\right)(\lambda x)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{2}{3\Gamma(\frac{5}{2})}\left(\frac{Q_0}{\sqrt{3}}+\lambda M_0\right)(\lambda x)^{\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{4}{9\sqrt{3}\,\Gamma(\frac{7}{2})}\left(\frac{5\,Q_0}{2\sqrt{3}}+\lambda M_0\right)(\lambda x)^{\frac{5}{2}}$$

$$+\frac{1}{\pi\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}\left(\frac{2\,Q_0}{\sqrt{3}}-\lambda M_0\right)(\lambda x)^{\frac{5}{2}}\left(\Psi\left(\frac{7}{2}\right)+\frac{1}{3}-\ln\lambda x\right)$$

$$+O\left(x^{\frac{7}{2}}(1+\ln x)\right) \qquad (26)$$

при $x\to 0$

Как следует из формулы (26), при $Q_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda M_0$ особенность функции $q(x)$ в точке $x=0$ исчезает. Кроме того, при $Q_0\geq\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda M_0$ $q(x)>0$ в некоторой окрестности точки $x=0$, т.е. балка в этой окрестности вдавливается на полуплоскость. Очевидно, что при $Q_0<\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda M_0$ балка растягивает полуплоскость в некоторой окрестности точки $x=0$. Из асимптотической формулы (25) можно сделать заключение, что после некоторого значения $x$ балка всегда растягивает полуплоскость.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Попов Г.Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно деформируемом основании ПММ.- 1961, т.25, вып.2.*
2. *Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином. ПММ.- 1974, т.38, вып.2.*
3. *Попов Г.Я. Тихоненко Л.Я. Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином.- ПММ, 1975, т.39, вып.6.*
4. *Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве .-М.: Наука, 1971.*
5. *Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.- М.: Наука, 1989.*
6. *Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости.-Ученые записки ЕГУ, естеств. науки, 1979, 3.*
7. *Справочная математическая библиотека Функциональный анализ.- М.: Наука, 1972.*
8. *Справочник по специальным функциям.-М.: Наука, 1979.*



Ереванский Государственный Университет.



Поступила в редакцию 22.05.1992.