ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 45, № 1-2, 1992 Механика

ЕЩЕ РАЗ О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

САРКИСЯН В.С.

Սարգսյան Վ.Ս. Եվս մեկ անգամ Կոշու կորիզով սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների մի համակարգի լուծման մասին

Sarkisian V.S. Again on solution of one integro-differential singular equations system with Cauchy kernel.

Առաջարկվում է մաթեմատիկական ֆիզիկայի, հիդրո-մեխանիկայի, ջերմահաղորդականության խնդիրներում հանդիպող մի դասի ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծման մեթոդ։

Предлагается метод решения одного класса интегро-дифференциальной системы уравнений, встречающейся в прикладных задачах математической физики, гидромеханики, теории теплопроводности.

В теории упругости [1,2] гидромеханики, в теории теплопроводности и в некоторых задачах математической физики можно встретить следующую систему интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(s)\,ds}{s-x}+c_1\int_{-1}^{1}\frac{\psi'(s)\,ds}{s-x}+c_2\pi\varphi'(x)+c_3\pi\psi'(x)=\lambda\varphi(x)$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(s)\,ds}{s-x}+c_4\int_{-1}^{1}\frac{\psi'(s)\,ds}{s-x}+c_5\pi\varphi'(x)+c_6\pi\psi'(x)=0 \qquad (1.1)$$

$$|x|<1$$

где c_i $(i=1\ldots6)$ и λ некоторые постоянные.

Рассмотрим систему (1) при граничных условиях [1,2]

$$\varphi(-1)=0\ ,\quad \psi(1)=\frac{P}{2}\ ,\quad \int\limits_{-1}^{1}\varphi'(t)\,dt=0 \tag{2}$$

В монографиях [1,2] решение системы (1) при (2) сведено к совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Однако вопрос о регулярности или квазиполной регулярности недостаточно исследован. Идея к возвращению системы (1)-(2) возникла в нашей частной беседе с Э.Х. Григорьяном при обсуждении решения этой системы, за что приношу ему свою благодарность.

Следуя Л.Галину [3], умножим второе уравнение системы (1) на N и сложив с первым, получим

$$(1+N)\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi'(t)\,dt}{t-x}+(c_1+Nc_4)\int\limits_{-1}^{1}\frac{\psi'(t)\,dt}{t-x}$$

$$+(c_2+Nc_3)\pi\varphi'(x)+(c_3+Nc_6)\pi\psi'(x)=\lambda\psi(x) \tag{3}$$

$$(|x|<1)$$

Далее требуется, чтобы имело место равенство

$$\frac{1+N}{c_1+Nc_4}=\frac{c_2+Nc_3}{c_3+Nc_6}=\frac{1}{S}$$

для определения N получим уравнение

$$(c_6-c_4c_3)N^2+(c_6+c_3-c_1c_3-c_2c_4)N+c_3-c_1c_2=0 \tag{4}$$

Корни этого уравнения обозначим через $N_1=N,\ N_2=\overline{N}$. Далее, если для первого из значений корней примем

$$1+N=K\ ,\quad c_1+Nc_4=KS\ ,\quad c_2+Nc_3=Q\ ,\quad c_3+Nc_6=QS$$

тогда вместо (3) будем иметь

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{T(t)\,dt}{t-x}+\frac{\pi Q}{K}T(x)=\frac{\lambda}{K(S-\overline{S})}\int\limits_{-1}^{1}[T(t)-\overline{T}(t)]\,dt \tag{5}$$

Здесь приняты обозначения

$$T(x)=\varphi'(x)+S\psi'(x)\qquad \overline{T}(x)=\varphi'(x)+\overline{S}\psi'(x)$$

В случае $N_2 = \overline{N}$, получим

$$\int_{-1}^{1} \frac{\overline{T}(t)\,dt}{t-x} + \frac{\pi \overline{Q}}{\overline{K}} \overline{T}(x) = \frac{\lambda}{\overline{K}(S-\overline{S})} \int_{-1}^{x} [T(t) - \overline{T}(t)]\,dt \tag{6}$$

Таким образом, система (1) сводится к совместному решению сингулярных интегральных уравнений (5) и (6).

Следуя работам [1,2,4], решение системы сингулярных уравнений (5) и (6) ищем в виде

$$T(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} X_n n^{-\varepsilon} \overline{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$+ (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} X_0 \tag{7}$$

$$\overline{T}(x) = (1-x)^{\overline{\alpha}}(1+x)^{\overline{\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{X}_n n^{-\varepsilon} \overline{P}_n^{(\overline{\alpha},\overline{\beta})}(x)$$

$$+ (1-x)^{\overline{\alpha}}(1+x)^{\overline{\beta}} X_0 \tag{8}$$

где

$$\frac{1}{2} < \varepsilon < 1, \quad \alpha = \frac{1}{2\pi i} \ln\left(-\frac{\pi K + iQ}{\pi K - iQ}\right), \quad \overline{\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \ln\left(-\frac{\pi \overline{K} + i\overline{Q}}{\pi \overline{K} - i\overline{Q}}\right)$$

$$\alpha + \beta = -1, \quad \overline{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \delta_n^{(\alpha,\beta)} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ – многочлен Якобы

$$\delta_m^{(\alpha,\beta)} = (2^{\alpha+\beta+1})^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{m!(\alpha+\beta+2m+1)\Gamma(\alpha+\beta+m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)\Gamma(\beta+m+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

причем $\delta_m^{(\alpha,\beta)} \sim m^{\frac{1}{2}}$ при $m \to \infty$

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\, \overline{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, \overline{P}_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \tag{9}$$

$$\int_{-1}^{x}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{n}(1-x)^{1+\alpha}(1+x)^{1+\beta}\tilde{P}_n^{(1+\alpha,1+\beta)}(x) \qquad (10)$$

$$\tilde{P}_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0 \quad , \quad \tilde{P}_0^{(\alpha,\beta)}(x) = \left(-\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Теперь,подставляя (7) и (8) в (5) и (6) и имея в виду формулу [1,2,5],

$$-\pi\, ctg\,\pi\alpha\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) +$$

$$+\int_{-1}^{1}(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}\frac{\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(s)}{s-x}\,ds =$$

$$= -\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\tilde{P}_n^{(1+\alpha,1+\beta)}(x)\,, \quad \mathrm{Re}(\alpha,\beta) > -1\,, \qquad |x| < 1$$

получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n n^{-\varepsilon} \tilde{P}_n^{(1+\beta,1+\alpha)}(x)$$

$$= -\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\,\frac{\lambda}{K(S-\bar{S})}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon}\int_{-1}^{x}[(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}X_n$$

$$-(1-s)^{\bar{\alpha}}(1+s)^{\bar{\beta}}\tilde{P}_n^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}\bar{X}_n]\,ds - \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\,\frac{\lambda}{K(S-\bar{S})}\,\cdot$$

$$\times\int_{-1}^{x}[(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}X_0-(1-s)^{\bar{\alpha}}(1+s)^{\bar{\beta}}\bar{X}_0]\,ds \qquad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{X}_n n^{-\varepsilon}\tilde{P}_n^{(1+\bar{\alpha},1+\bar{\beta})}(x)$$

$$= -\frac{\sin \pi \overline{\alpha}}{\pi} \frac{\lambda}{\overline{K}(S - \overline{S})} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon} \int_{-1}^{x} [(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta} \widetilde{P}_n^{(\alpha,\beta)} X_n$$

$$- (1-s)^{\overline{\alpha}}(1+s)^{\overline{\beta}} \overline{P}_n^{(\overline{\alpha},\overline{\beta})} \overline{X}_n] \, ds - \frac{\sin \pi \overline{\alpha}}{\pi} \frac{\lambda}{\overline{K}(S - \overline{S})}$$

$$\times \int_{-1}^{x} [(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta} X_0 - (1-s)^{\overline{\alpha}}(1+s)^{\overline{\beta}} \overline{X}_0] \, ds$$

Далее, имея в виду формулы (9) , (10) . уравнения (11) можно свести к совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$X_m + \lambda \frac{\sin(\pi\alpha)\, m^{\varepsilon}}{\pi K(S - \overline{S})} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon} (K_{m,n}^{(1)} X_n - K_{m,n}^{(2)} \overline{X}_n) + f_m^{(1)} = 0$$

$$\overline{X}_m + \lambda \frac{\sin(\pi\overline{\alpha})\, m^{\varepsilon}}{\pi \overline{K}(S - \overline{S})} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon} (K_{m,n}^{(3)} X_n - \overline{K}_{m,n}^{(1)} \overline{X}_n) + f_m^{(2)} = 0 \qquad (12)$$

$$(m = 1, 2, \ldots)$$

где

$$K_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{m-1} \int_{-1}^{1} (1-x^2) \widetilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) \widetilde{P}_{m-1}^{(\beta+2,\alpha+2)}(x) \, dx$$

$$K_{m,n}^{(2)} = \frac{1}{m-1} \int_{-1}^{1} (1-x)^{\overline{\alpha}+\beta+2} (1+x)^{\overline{\beta}+\alpha+2} \widetilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) \widetilde{P}_{m-1}^{(\beta+2,\alpha+2)}(x) \, dx$$

$$K_{m,n}^{(3)} = \frac{1}{m-1} \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+\overline{\beta}+2} (1+x)^{\beta+\overline{\alpha}+2} \widetilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) \widetilde{P}_{m-1}^{(\overline{\beta}+2,\overline{\alpha}+2)}(x) \, dx$$

$$(m = 2, 3, \ldots)$$

$$K_{1,n}^{(1)} = -\frac{1}{n} \int_{-1}^{1} (1-x^2) \widetilde{P}_{n-1}^{(1+\alpha,1+\beta)}(x) \, dx$$

$$K^{(2)}_{1,n} = -\frac{1}{n}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\bar{\alpha}+\beta+2}(1+x)^{\alpha+\bar{\beta}+2}\bar{P}^{(\bar{\alpha}+1,\bar{\beta}+1)}_{m-1}(x)\,dx$$

$$K^{(3)}_{1,n} = -\frac{1}{n}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+\bar{\beta}+2}(1+x)^{\bar{\alpha}+\beta+2}\bar{P}^{(\alpha+1,\beta+1)}_{m-1}(x)\,dx$$

$$f^{(1)}_{m} = \frac{\lambda}{\pi}\frac{\sin\pi\alpha}{K(S-\bar{S})}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x}(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}ds\,(1-x)^{1+\beta}(1+x)^{1+\alpha}$$

$$\times\bar{P}^{(\bar{\beta}+1,\bar{\alpha}+1)}_{m-1}(x)\,dx\,X_0 - \bar{X}_0\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x}(1-s)^{\bar{\alpha}}(1+s)^{\bar{\beta}}ds$$

$$\times(1-x)^{1+\beta}(1+x)^{1+\alpha}\bar{P}^{(\beta+1,\alpha+1)}_{m-1}(x)\,dx\,]$$

$$f^{(2)}_{m} = \frac{\lambda}{\pi}\frac{\sin\pi\bar{\alpha}}{\bar{K}(S-\bar{S})}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x}(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}ds\,(1-x)^{1+\bar{\beta}}(1+x)^{1+\bar{\alpha}}$$

$$\times P^{(\bar{\beta}+1,\bar{\alpha}+1)}_{m-1}(x)\,dx\;X_0 - \bar{X}_0\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x}(1-s)^{\bar{\alpha}}(1+s)^{\bar{\beta}}ds$$

$$\times(1-x)^{1+\bar{\beta}}(1+x)^{1+\bar{\alpha}}P^{(\bar{\beta}+1,\bar{\alpha}+1)}_{n}(x)\,dx\,]$$

Постоянная X_0 определяется из условий (2) и равна

$$X_0 = -\frac{SP\sin\pi\alpha}{2\pi}$$

Для доказательства квазиполной регулярности совокупности систем (12), заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(m-1)K^{(j)}_{m,n}|^2 < \infty \qquad (j=1,2,3)$$

которые следуют из асимтотической формулы Дарбу для многочленов Якоби [1,2,6]

$$\bar{P}^{(\alpha,\beta)}_{n}(\cos\theta) = K(\theta)\cos(N\theta+\delta) + O(m^{-1}) \qquad m\to\infty$$

$$K(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\theta)^{-\beta-\frac{1}{2}} \tag{13}$$

$$N = n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\,,\quad \delta = -\frac{\pi}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\,,\quad \mathrm{Re}(\alpha,\beta) > -1\,,\quad 0<\theta<\pi$$

и из неравенства Бесселя.

Тогда в силу неравенства Коши-Буняковского будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon} |(m-1) K_{m,n}^{(j)}| \le \tag{14}$$

$$\le \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} |(m-1) K_{m,n}^{(j)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (j=1,2,3)$$

Имея в виду (14) при $m \to \infty$, получим

$$\max\left[\frac{\lambda}{\pi} \left|\frac{\sin \pi \alpha}{K(S-\bar{S})}\right| \frac{m^{\varepsilon}}{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon} |(m-1) K_{m,n}^{(1)}| + \right.$$

$$+ |(m-1) K_{m,n}^{(2)}| \frac{\lambda}{\pi} \left|\frac{\sin \pi \bar{\alpha}}{K(S-\bar{S})}\right| \frac{m^{\varepsilon}}{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon} |(m-1) K_{m,n}^{(3)}| +$$

$$\left. + |(m-1) K_{m,n}^{(2)}| \right] < \frac{c}{m^{1-\varepsilon}} \tag{15}$$

Относительно свободных членов уравнений (12) можно сказать, что они, по крайней мере, ограничены при $m \to \infty$ (это следует из (13) и неравенства Бесселя).

Таким образом, решение системы уравнений (12) надо искать в пространстве ограниченных последовательностей. В таком случае в силу (15) совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (12) будет квазивполне регулярна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян В.С. *Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела.* - Ереван: Изд. ЕГУ, 1976. 534 с.
2. Саркисян В.С. *Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками.* - Ереван: Изд. ЕГУ, 1983. 256 с.
3. Галин Л.А. *Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.* -М.: Наука, 1980. 304 с.
4. Григорян Э.Х., Мелтонян Б.А. *Об одной задаче для упругой бесконечной пластины, усиленной двумя полубесконечными стрингерами.* - Уч. записки ЕГУ, естеств. науки, 1984, 3, с. 45-49.
5. Попов Г.Я. *Контактные задачи для линейно-деформируемого основания.* - Киев-Одесса; Головное издательское объединение "Выща школа", 1982, 167 с.
6. Сеге Г. *Ортогональные многочлены.* - М.: Физматгиз, 1962.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 27.03.1992