ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 44, № 6, 1991 Механика

ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ СОСТАВНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Фильштинский Л.А.

Ֆիլշտինսկի Լ.Ա.,Գրինի ֆունկցիան միջֆազային ճաքով անիզոտրոպ բաղադրյալ կիսահարթության համար:

Philshtinskiy LA. Green function for compound anisotropic plane with inter-phase crack

Բացահայտ տեսքով կառուցված է Գրինի ֆունկցիան երկու անիզոտրոպ, միմյանց անընդհատ ամրակցված, կիսահարթություններից բաղկացած անսահմանափակ միջավայրի համար:Ստացված են բանաձևեր ճեղքի գագաթներում լարումների եզակիությունների գործակիցների համար:

В явном виде построена функция Грина для неограниченной среды, составленной из двух анизотропных полуплоскостей, непрерывно скрепленных между собой. Получены формулы для коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещины.

Задача теории упругости для составной изотропной, а также анизотропной плоскости с дефектом на границе раздела сред рассматривались в работах [1-7]. В данной статье в явном виде построена функция Грина для составной анизотропной плоскости с межфазной трещиной.

1.Рассмотрим неограниченную среду, составленную из двух разнородных анизотропных полуплоскостей, непрерывно скрепленных между собой вдоль участков $|x_1| \geq a$ (фиг.1). На участке $|x_1| < a$ имеется отслойка, которую будем трактовать как межфазную трещину. Пусть в верхней полуплоскости в точке (x_{10}, x_{20}) приложена сосредоточенная сила $P = P_1 + iP_2$. Приписывая величинам, относящимся к верхней (нижней) полуплоскости верхний индекс "1", ("2") запишем граничные условия на оси x_1 в виде

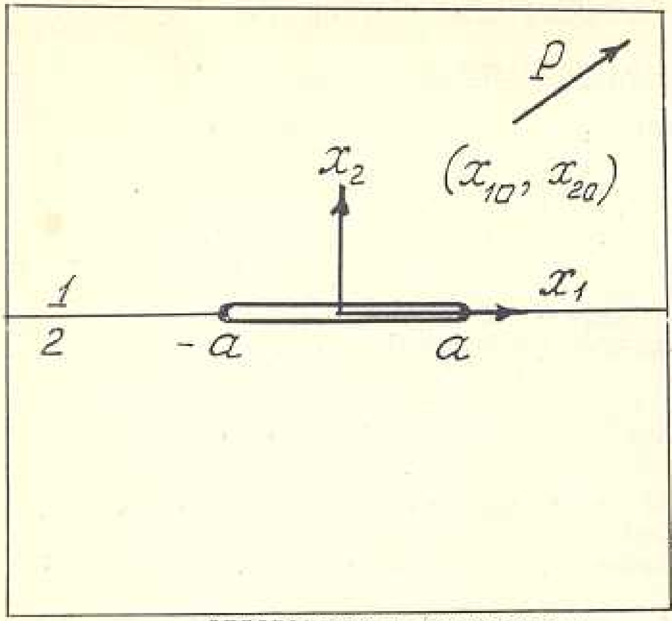
$$\sigma_{i2}^{(1)} = \sigma_{i2}^{(1)} \;, \quad \frac{du_i^{(1)}}{dx_1} = \frac{du_i^{(2)}}{dx_1} \qquad |x_1| \geq a \quad (i = 1, 2) \tag{1.1}$$

$$\sigma_{i2}^{(1)+} = 0 \;, \; \sigma_{i2}^{(1)-} = 0 \qquad |x_1| < a \tag{1.2}$$

где под $\sigma^{\pm}$ понимаем предельные значения функции σ соответственно на верхнем или нижнем берегах трещины.

Компоненты вектора

$$U = [U_k] = [\sigma_{22}, -\sigma_{12}, u_1'(x_1), u_2'(x_1)]$$



Фиг.1

определяются равенствами

$$U_k = 2\,\mathrm{Re}\sum_{\nu=1}^{2} C_{k\nu}\,\Phi_\nu(z_\nu) \quad (k=\overline{1,4}) \tag{1.3}$$

$$C_{1\nu} = 1\,,\; C_{2\nu} = \mu_\nu\,,\quad C_{3\nu} = a_{11}\,\mu_\nu^2 - a_{16}\,\mu_\nu + a_{12}$$

$$C_{4\nu} = a_{12}\,\mu_\nu - a_{26} + \frac{a_{22}}{\mu_\nu}$$

a_{ik} - упругие параметры материала, μ_ν - соответствующие им характеристические числа [8,9].

Таким образом, приходим к краевой задаче об определении четырех функций $\Phi_\nu^r(z_\nu^r)$, аналитических каждая в своей плоскости $z_\nu^{(r)} = x_1 + \mu_\nu^{(r)} x_2$, по условиям непрерывной продолжимости компонент U_k ($k=\overline{1,4}$) через участки $|x_1| \geq a$ и условиям $U_1^\pm = U_2^\pm = 0$ на берегах отрезка $[-a, a]$.

Эту задачу естественно решать, применяя аналитическое продол-жение соответствующих функций с последующим сведением ее к задачам Римана [10]. Но сперва необходимо построить фундаментальное решение для составной плоскости без отслойки.

2. Итак, рассмотрим составную среду, составленную из двух разнородных анизотропных полуплоскостей, непрерывно скреп-ленных между собой вдоль всей оси x_1. Пусть в точке (x_{10}, x_{20}) действует сосредоточенная сила $P = P_1 + iP_2$. Обобщая известный метод отражения [11], будем разыскивать решение в виде

$$\Phi_\nu^{(1)}(z_\nu^{(1)}) = \frac{A_\nu^{(1)}}{z_\nu^{(1)} - z_{\nu o}^{(1)}} - \sum_{m=1}^{2} \frac{\overline{\alpha_{\nu,m}^{(1)}}\;\overline{A_m^{(1)}}}{z_\nu^{(1)} - \bar z_{mo}^{(1)}} \quad (\nu = 1, 2)$$

$$\Phi_\nu^{(2)}(z_\nu^{(2)}) = \sum_{m=1}^{2} \frac{\alpha_{\nu+2,m}^{(1)} A_m^{(1)}}{z_\nu^{(2)} - z_{mo}^{(1)}} \qquad (2.1)$$

$$z_\nu^{(1)} = x_1 + \mu_\nu^{(1)} x_2, \qquad z_{mo}^{(1)} = x_{10} + \mu_m^{(1)} x_{20}$$

где постоянные $A_m^{(1)}$ однозначно определяются системой [8], (h толщина пластины)

$$2\,\mathrm{Im} \sum_{m=1}^{2} A_m^{(1)} (\mu_m^{(1)})^{k-1} = -\frac{\Delta_k}{2\pi h} \qquad (k = \overline{0,3}) \qquad (2.2)$$

$$\Delta_0 = \frac{a_{12}^{(1)} P_1 + a_{26}^{(1)} P_2}{a_{22}^{(1)}}, \quad \Delta_1 = P_2, \quad \Delta_2 = -P_1$$

$$\Delta_3 = -\frac{a_{16}^{(1)} P_1 + a_{12}^{(1)} P_2}{a_{11}^{(1)}}$$

Для вычисления величин $\alpha_{\nu m}^{(1)}$ привлечем условия сопряжения (1.1) на всей оси. Подставляя функции в эти условия, приходим к уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^{2} \overline{(C_{k\nu}^{(1)} \alpha_{\nu m}^{(1)} + C_{k\nu}^{(2)} \alpha_{\nu+2,m}^{(1)})} = c_{km}^{(1)} \qquad (m = 1, 2;\ k = \overline{1,4}) \qquad (2.3)$$

Этим завершается построение фундаментального решения (2.1).

Если сосредоточенная сила приложена в точке (x_{10}' , x_{20}') нижней полуплоскости ($x_{20}' < 0$) , то фундаментальное решение определяется соотношениями

$$\Phi_\nu^{(1)}(z_\nu^{(1)}) = \sum_{m=1}^{2} \frac{\alpha_{\nu+2,m}^{(2)} A_m^{(2)}}{z_\nu^{(1)} - z_{m1}^{(2)}}, \quad Z_{\nu1}^{(2)} = x_{10}' + \mu_\nu^{(2)} x_{20}' \qquad (2.4)$$

$$\Phi_\nu^{(2)}(z_\nu^{(2)}) = \frac{A_\nu^{(2)}}{z_\nu^{(2)} - z_{\nu1}^{(2)}} - \sum_{m=1}^{2} \frac{\overline{\alpha_{\nu m}^{(2)}}\ \overline{A_m^{(2)}}}{z_\nu^{(2)} - z_{m1}^{(2)}} \qquad (\nu = 1, 2)$$

где $A_\nu^{(2)}$, $\alpha_{\nu m}^{(2)}$ определяются соответственно из уравнений (2.2),(2.3), в которых у всех величин верхний индекс " 1 " необходимо заменить на " 2 ".

3.Решение основной задачи, поставленной в п. 1, будем разыскивать в виде

$$W_\nu^{(r)}(z_\nu^{(r)}) = \Phi_\nu^{(r)}(z_\nu^{(r)}) + \Psi_\nu^{(r)}(z_\nu^{(r)}) \qquad (\nu, r = 1, 2) \qquad (3.1)$$

где функции $\Phi_\nu^{(r)}(z_\nu^{(r)})$ определены в (2.1), (2.3), а $\Psi_\nu^{(r)}(z_\nu^{(r)})$ учитывают возмущения, вносимые межфазной трещиной.

Используем идею аналитического продолжения $\Psi_\nu^{(r)}(z_\nu^{(r)})$ следующим образом [12]. Функции $\Psi_\nu^{(1)}(z)$ ($\Psi_\nu^{(2)}(z)$) аналитически продолжим через участки $|x_1| \geq a$ в нижнюю (верхнюю) полуплоскость при помощи функций $\Psi_\nu^{(1)}(z)$ ($\Psi_\nu^{(2)}(z)$) удовлетворяющих соотношению

$$\overline{\Psi_\nu^{(1)+}(x)} = \Psi_\nu^{(1)-}(x), \quad (\overline{\Psi_\nu^{(2)-}(x)} = \overline{\Psi}_\nu^{(2)+}(x))$$

При этом учитываем определение $\overline{\Psi(z)} = \Psi(\bar z)$, а под $\Psi^\pm(x)$ понимаем соответствующие предельные значения функции $\Psi(z)$.

С учетом сказанного, получаем из (1.3)

$$U_k^+(x) = \sum_{\nu=1}^{2} (c_{k\nu}^{(1)} \Psi_\nu^{(1)+}(x) + \overline{C_{k\nu}^{(1)}}\, \overline{\Psi_\nu^{(1)-}(x)}) \tag{3.2}$$

$$+ 2\,\mathrm{Re} \sum_{\nu=1}^{2} c_{k\nu}^{(1)} \Phi_\nu^{(1)}(x) \qquad (k = 1, 2)$$

$$U_k^-(x) = \sum_{\nu=1}^{2} (c_{k\nu}^{(2)} \Psi_\nu^{(2)-}(x) + \overline{c_{k\nu}^{(2)}}\, \overline{\Psi_\nu^{(2)+}}(x))$$

$$+ 2\,\mathrm{Re} \sum_{\nu=1}^{2} c_{k\nu}^{(2)} \Phi_\nu^{(2)}(x) \qquad (k = 1, 2)$$

Введем функции

$$F_k(z) = f_k(z) = \sum_{\nu=1}^{2} [c_{k\nu}^{(1)} \Psi_\nu^{(1)}(z) - \bar c_{k\nu}^{(2)} \overline{\Psi}_\nu^{(2)}(z)] \quad x_2 > 0$$

$$F_k(z) = f_k(z) = \sum_{\nu=1}^{2} [c_{k\nu}^{(2)} \Psi_\nu^{(2)}(z) - \bar c_{k\nu}^{(1)} \overline{\Psi}_\nu^{(1)}(z)] \quad x_2 < 0 \tag{3.3}$$

$$k = \overline{(1, 4)}$$

В силу (1.3) и непрерывной продолжимости функции U_k $(k = 1, 2)$ через всю ось x_1 получаем

$$f_k^+(x) - f_k^-(x) = U_k^+(x) - U_k^-(x) = 0, \quad x_1 = x \tag{3.4}$$

$(k=1,2)$

Следовательно, $F_k(z)$ $(k=1,2)$ с элементами $f_k(z)$ при $\operatorname{Im} z>0$ и $f_k(z)$ при $\operatorname{Im} z \le 0$ аналитична в полной z - плоскости. Поэтому можно положить $F_1(z)=F_2(z)=0$.

Из (3.3) следуют предельные равенства

$$C_* \Psi^+(x)=f^+(x)\ ,\ \overline{C_*}\,\overline{\Psi^-(x)}=-f^-(x) \tag{3.5}$$

$$C_* = \begin{vmatrix} c_{11}^{(1)} & c_{12}^{(1)} & -\bar c_{11}^{(2)} & -\bar c_{12}^{(2)} \\ c_{21}^{(1)} & c_{22}^{(1)} & -\bar c_{21}^{(2)} & -\bar c_{22}^{(2)} \\ c_{31}^{(1)} & c_{32}^{(1)} & -\bar c_{31}^{(2)} & -\bar c_{32}^{(2)} \\ c_{41}^{(1)} & c_{42}^{(1)} & -c_{41}^{(2)} & -c_{42}^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\Psi^+(x)=\begin{vmatrix} \Psi_1^{(1)+} \\ \Psi_2^{(1)+} \\ \overline{\Psi}_1^{(2)+} \\ \overline{\Psi}_2^{(2)+} \end{vmatrix} \quad \overline{\Psi}^-(x)=\begin{vmatrix} \overline{\Psi}_1^{(1)-} \\ \overline{\Psi}_2^{(1)-} \\ \Psi_1^{(2)-} \\ \Psi_2^{(2)-} \end{vmatrix} \quad f^\pm(x)=\begin{vmatrix} f_1^\pm \\ f_2^\pm \\ f_3^\pm \\ f_4^\pm \end{vmatrix}$$

Складывая равенства (3.2) и учитывая при этом соотноошение (3.4) (3.5), также граничные условия на берегах разреза,приходим к матричной задаче Римана

$$\sum_{j=3}^{4}(b_{kj}f_j^{\,+}(x)-\bar b_{kj}\bar f_j^{\,-}(x))=-4\operatorname{Re}\sum_{\nu=1}^{2}c_{k\nu}^{(2)}\,\Phi_\nu^{(2)}(x)=N_k(x)$$

$$B=\|\,b_{kj}\,\|=AC_*^{-1},A=\begin{vmatrix} c_{11}^{(1)} & c_{12}^{(1)} & \bar c_{11}^{(2)} & \bar c_{12}^{(2)} \\ c_{21}^{(1)} & c_{22}^{(1)} & \bar c_{21}^{(2)} & \bar c_{22}^{(2)} \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

Подберем теперь векторы $(\rho_{k1}\ ,\ \rho_{k2})$ и числа λ_k $(k=1,2)$ таким образом, чтобы они были собственными векторами и соответствующими характеристическими числами однородных систем

$$\rho_{k1}(\overline{b_{13}}+\lambda_k b_{13})+(-1)^{k-1}\rho_{k2}(\overline{b_{23}}+\lambda_k b_{23})=0 \tag{3.7}$$

$$\rho_{k1}(\overline{b_{14}}+\lambda_k b_{14})+(-1)^{k-1}\rho_{k2}(\overline{b_{24}}+\lambda_k b_{24})=0\,,\ (k=1,2)$$

В этом случае (3.6) сводится к двум скалярным задачам Римана

$$\rho_k^+(x)+\lambda_k\rho_k^-(x)=N_k^*(x)\quad -a<x<a\,(k=1,2) \tag{3.8}$$

$$\rho_k(x)=\sum_{j=3}^{4}d_{kj}f_j(x)$$

$$N_k^*(x)=\rho_{k1}N_1(x)+(-1)^{k-1}\rho_{k2}N_2(x)$$

$$d_{kj} = \frac{2i \ \mathrm{Im}\,(b_{ij} \ \overline{b_{ij}})}{\overline{b_{2j}} + \lambda_k b_{2j}} \qquad (j = 3, 4)$$

Фигурирующие в (3.8) характеристические числа λ_1, λ_2 находятся из условий нетривиальной разрешимости систем (3.7), которые сводятся к следующему квадратному уравнению:

$$\lambda_{1,2}^2 + 2r_1 \lambda_{1,2} + r_2 = 0 \tag{3.9}$$

$$r_1 = \frac{\mathrm{Re}(\bar{b}_{13} b_{24} - \bar{b}_{23} b_{14})}{b_{13} b_{24} - b_{23} b_{14}} \qquad r_2 = \frac{(\bar{b}_{13} \bar{b}_{24} - \bar{b}_{23} \bar{b}_{14})}{b_{13} b_{24} - b_{23} b_{14}}$$

Очевидно,корни уравнения (3.9) можно представить так:

$$\lambda_1 = \frac{1}{R} e^{-i\varphi}, \quad \lambda_2 = R e^{-i\varphi} \quad \varphi = arg(b_{13} b_{24} - b_{14} b_{23}) \tag{3.10}$$

где R-вещественное число, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Решения задач (3.8) элементарны. Имеем [10]

$$\rho_k(z) = (\mathrm{D}_k(z) + M_k) X_k(z) \quad (k = 1, 2) \tag{3.11}$$

$$X_k(z) = (z+a)^{-\gamma_k} (z-a)^{\gamma_k - 1}, \ \gamma_1 = \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{2\pi} + \frac{i}{2\pi} \ln R$$

$$D_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{a} \frac{N_k^*(x)\,dx}{X_k(x)(x-z)}, \qquad \gamma_2 = \overline{\gamma_1}$$

Здесь $X_k(x) = X_k^+(x)$ значения канонических функций $X_k(z)$ на верхнем берегу разреза, M_k произвольные комплексные постоянные.

Выполняя предписанные в (3.11) квадратуры, получаем с учетом (3.8) и (3.6)

$$D_k(z) X_k(z) = \frac{2}{1+\lambda_k} \sum_{m=1}^{2} [A_m^{(1)} \Omega_{k1}^{(m)} \frac{1 - X_k(z) X_k^{-1}(z_{mo}^{(1)})}{z - z_{mo}^{(1)}}$$

$$+ \overline{A_m^{(1)}} \, \overline{\Omega_{k2}^{(m)}} \frac{1 - X_k(z) X_k^{-1} \overline{(z_{mo}^{(1)})}}{z - \bar{z}_{mo}^{(1)}}] \tag{3.12}$$

$$\Omega_{11}^{(m)} = \Omega_{22}^{(m)} = - \sum_{\nu=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \rho_{1j} c_{j\nu}^{(2)} \alpha_{\nu+2,m} \qquad (m = 1, 2)$$

$$\Omega_{21}^{(m)} = \Omega_{12}^{(m)} = (-1)^j \sum_{\nu=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \rho_{2j} c_{j\nu}^{(2)} \alpha_{\nu+2,m} \quad (m = 1, 2)$$

$$\rho_{k1} = 1 \qquad \rho_{k2} = (-1)^k \frac{\bar{b}_{13} + \lambda_k b_{13}}{\bar{b}_{23} + \lambda_k b_{23}} \qquad (k = 1, 2)$$

Далее, из равенств (3.3) находим

$$\Psi_\nu^{(1)}(z) = \sum_{j=3}^{4} l_{\nu j} f_j(z) \quad , \quad \operatorname{Im} z > 0 \qquad (\nu = 1, 2)$$

$$\Psi_\nu^{(2)}(z) = -\sum_{j=3}^{4} \bar{l}_{\nu+2, j}\, f_j(z) \quad , \quad \operatorname{Im} z < 0 \qquad (3.13)$$

где l_{mj} $(m, j = \overline{1, 4})$ -элементы матрицы C_*^{-1}.

Из (3.8),(3.11) следует, что функции $f_3(z)$, $f_4(z)$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\sum_{j=3}^{4} d_{kj} f_j(z) = (D_k(z) + M_k) X_k(z) \quad (k = 1, 2) \qquad (3.14)$$

Обращая эту систему и вставляя полученные выражения функции $f_j(z)$ в формулу (3.13),находим с учетом равенств (3.12)

$$\Psi_\nu^{(r)}(z_\nu^{(r)}) = \sum_{m=1}^{2} \frac{A_m^{(1)}}{z_\nu^{(r)} - z_{mo}^{(1)}} \sum_{i=1}^{2} [1 - X_i(z_\nu^{(r)}) X_i^{-1}(z_{mo}^{(1)})]$$

$$* \frac{2\Omega_{i1}^{(m)} L_{i\nu}^{(r)}}{(1+\lambda_i) d_0} + \sum_{m=1}^{2} \frac{\overline{A_m^{(1)}}}{z_\nu^{(r)} - \overline{z_{mo}^{(1)}}} \sum_{i=1}^{2} [1 - X_i(z_\nu^{(r)}) X_i^{-1}(\overline{z_{mo}^{(1)}})]$$

$$* \frac{2\overline{\Omega_{i2}^{(m)}} L_{i\nu}^{(r)}}{(1+\lambda_i) d_0} + \sum_{i=1}^{2} \frac{M_i}{d_0} L_{i\nu}^{(r)} X_i(z_\nu^{(r)}) \qquad (\nu, r = 1, 2) \qquad (3.15)$$

$$L_{i\nu}^{(1)} = \sum_{j=3}^{4} (-1)^{(i-j)} n_{ij} l_{\nu j}, \; L_{i\nu}^{(2)} = -\sum_{j=3}^{4} (-1)^{(i-j)} n_{ij} \bar{l}_{\nu+2, j}$$

$$n_{i3} = \frac{d_{14}\, d_{24}}{d_{i4}}, \; n_{i4} = \frac{d_{13}\, d_{23}}{d_{i3}}, \; d_0 = d_{13} d_{24} - d_{14} d_{23}$$

Остается определить константы M_i. Поскольку в условия сопря-жения (1.1) входят производные от перемещений, необходимо позаботиться, чтобы вектор перемещений был непрерывно продолжим через участки $|x_1| \geq a$. Это условие будет выполнено, если между M_1 и M_2 имеет место соотношение

$$\overline{M_2} = \lambda_1 M_1 \qquad (3.16)$$

Теперь привлечем условия однозначности перемещений в составной плоскости

$$\int\limits_c d u_i = \int\limits_{-a}^{a} d [u_i] = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{3.17}$$

где c - произвольный замкнутый контур, содержащий внутри отрезок $[-a, a]$ оси x_1, $[u]$-скачок функции u при переходе через разрез.

Вводя сюда выражения $u_i'(x)$ из (1.3), учитывая соотношения (3.1), (3.15) , (3.16) и выполняя необходимые квадратуры, получаем после преобразований

$$M_i = \frac{2}{1+\lambda_i} \sum_{m=1}^{2} (A_m^{(1)} \Omega_{i1}^{(m)} + \overline{A_m^{(1)}}\ \overline{\Omega_{i1}^{(m)}}) \quad (i = 1, 2) \tag{3.18}$$

На этом построение функции Грина для составной анизотропной плоскости с межфазной трещиной заканчивается. Она полностью определяется формулами (3.1), (2.1), (3.15) и (3.18). Из аналитического представления функции Грина следует, что напряжения в вершинах межфазной трещины имеют степенные особенности, усиленные осцилляцией в малых окрестностях точек $\pm a$. Это явление имеет место и для составных изотропных сред [1,13].

4. Для представления напряжения в малой окрестности вершины трещины оставим в (3.15) лишь члены, содержащие канонические функции $X_i(z)$. Асимптотический анализ этого выражения дает :

при $x > a$

$$\begin{matrix} \sigma_{22}^{(r)} \\ -\sigma_{22}^{(r)} \end{matrix} = 4\,\mathrm{Re} \sum_{m=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} A_m^{(1)} \left[\frac{(x-a)^{\gamma_n - 1}}{(2a)^{\gamma_n}} \Omega_{1n}^{(m)} \right.$$

$$\left. * D_{kn} \left[\left(\frac{z_{m0}^{(1)} + a}{z_{m0}^{(1)} - a} \right)^{\gamma_n} + 1 \right] \right] + O(1)$$

при $x < -a$

$$\begin{matrix} \sigma_{22}^{(r)} \\ -\sigma_{12}^{(r)} \end{matrix} = -4\,\mathrm{Re} \sum_{m=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} A_m^{(1)} \left[\frac{(x+a)^{-\gamma_n}}{(2a)^{1-\gamma_n}} \Omega_{1n}^{(m)} \right.$$

$$\left. * D_{kn} \left[\left(\frac{z_{m0}^{(1)} - a}{z_{m0}^{(1)} + a} \right)^{-\gamma_n} + 1 \right] \right] + O(1)$$

Здесь

$$D_{k1} = \frac{1}{d_0} D_{k1}^{(1)} , \quad D_{k2} = \overline{D_{k1}} , \quad D_{k1}^{(1)} = \sum_{\nu=1}^{2} C_{k\nu}^{(1)} L_{1\nu}^{(1)}$$

Величина $\sigma_{22}^{(r)}$ определяется при $k = 1$, $\sigma_{12}^{(r)}$ - при $k = 2$. Как и следовало ожидать, полученные выражения не зависят от r.

Коэффициенты интенсивности напряжений определим в соответствии с выписанной выше асимптотикой следующим образом:
в вершине $x = a$

$$K_I^+ = \lim \left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{1}{2} + \frac{\varphi}{2\pi}} \sigma_{22}(x) = \frac{|P|}{ah} < k_1^+ >, \quad x \to a, (x > a)$$

$$K_{II}^+ = \lim \left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{1}{2} + \frac{\varphi}{2\pi}} \sigma_{12}(x) = \frac{|P|}{ah} < k_2^+ >$$

$$|P| = \sqrt{P_1^{\,2} + P_2^{\,2}}$$

$$< k_j^+ > = 4\,\mathrm{Re} \sum_{m=1}^{2} B_m^{(1)} \sum_{n=1}^{2} \frac{\Omega_{1n}^{(m)} D_{jn}}{2^{\gamma_n}} \left[\left(\frac{z_{m0}^{(1)} + a}{z_{m0}^{(1)} - a} \right)^{\gamma_n} + 1 \right]$$

$$B_m^{(1)} = \frac{h}{|P|} A_m^{(1)}$$

в вершине $x = -a$

$$K_I^- = \lim \left[\left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{1}{2} - \frac{\varphi}{2\pi}} \sigma_{22}(x) \right] = \frac{|P|}{ah} < k_1^- >$$

$$x \to -a, (x < -a)$$

$$K_{II}^- = \lim \left[\left(\frac{x}{a} + 1\right)^{\frac{1}{2} - \frac{\varphi}{2\pi}} \sigma_{12}(x) \right] = \frac{|P|}{ah} < k_2^- >$$

$$< k_j^- > = -4\,\mathrm{Re} \sum_{m=1}^{2} B_m^{(1)} \sum_{n=1}^{2} \frac{\Omega_{1n}^{(m)} D_{jn}}{2^{1-\gamma_n}} \left[1 + \left(\frac{z_{m0}^{(1)} - a}{z_{m0}^{(1)} + a} \right)^{1-\gamma_n} \right]$$

$$(j = 1, 2)$$

При вычислении указанных пределов было принято согласно [13], что $\mathrm{Im}\,\gamma_1\, ln\, |x \pm a| \approx 0$. Тем самым устраняется и физическая некорректность решения, связанная с тем обстоятельством, что напряжения в окрестности вершины бесконечное число раз меняют знак.

В заключение отметим, что без всяких принципиальных затруднений полученное аналитическое решение можно распространить на случай нескольких межфазных трещин, лежащих на оси x_1, а также полубесконечной межфазной трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. -Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, 1.
2. Райс, Си. Плоские задачи о трещинах, расположенных на границе раздела двух различных сред. -Тр. Амер. о-ва инженеров механиков. Прикладная механика, 1965, т.32, 2, с.186-192.
3. Прусов И.А., Лунская Л.И. Упругое состояние кусочно -однородной ортотропной плоскости с разрезами. Прикладная механика АН УССР, 1969, т.5, 8, с. 77-83.
4. Плахотный П.И. Взаимное давление двух различных полуплоскостей с прямолинейными щелями на линии спая. Прикладная механика АН УССР, 1970, т.6, 1, с.62 - 68.
5. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками.- Ереван: Изд - во Ереванского университета, 1983. 260 с.
6. Кривой А.Ф., Радиолло М.В. Особенности поля напряжений в составной анизотропной плоскости.- Изв. АН СССР. МТТ 1984, 3, с.. 84 -92.
7. Асанян Д.Д., Асланян А.А., Багдасарян Г.Е. О концентрациях упругих напряжений и индуцированного магнитного поля возле трещины, обусловленных внешним магнитным полем. -Изв.АН АрмССР. Механика, 1988, т.41, 2, с.15-258.
8. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. - М.: Гостехиздат, 1967. 356 с.
9. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин (прочность, устойчивость и колебания) -М.: Наука, 1967. 268 с.
10. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. -М.:Физматгиз, 1968. 511 с.
11. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. В 2 -х томах. Т. I. М. Изд-во иностр.лит., 1958. 930 с.
12. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. 708 с.
13. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. - М.: Наука, 1974. 640 с.

Сумский сельскохозяйственный институт
Поступила в редакцию 6.02. 1991