

О ВЛИЯНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ АНИЗОТРОПНОЙ  
ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

ՄՈՎՏԻՍՅԱՆ Լ.Ա.

Մովսիսյան Լ.Ա., Ջերմաստիճանի ազդեցությունը անիզոտրոպ առաձգամածուցիկ գլանալից թաղանթի կայունության վրա:

Movsisyan L. A. About temperature effects on stability of anisotropic visco-elastic cylindrical shell

Ուսումնասիրվում է ասացիոնար ջերմաստիճանային դաշտում գտնվող առաձգամածուցիկ գլանալից թաղանթը: Թաղանթի նյութի մածուցիկ հատկությունները հանդես են գալիս սահքի լարումների նկատմամբ: Առաձգական դրվածքով դիտարկվում է քաղաղանթի կայունությունը առանցքային սեղմման և արտաքին ճնշման դեպքում:

Изучается вязко-упругая анизотропная цилиндрическая оболочка, находящаяся в стационарном температурном поле. Материал оболочки свойство вязкости проявляет по отношению к сдвигающим напряжениям. В упругой постановке рассматривается устойчивость многослойной оболочки при осевом сжатии и внешнем давлении.

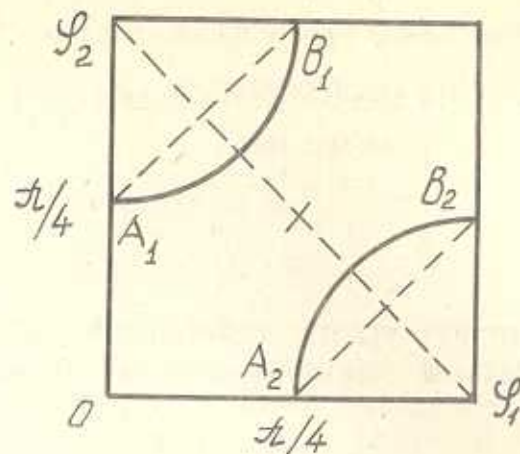
Изучается вязкоупругая анизотропная цилиндрическая оболочка, находящаяся в стационарном температурном поле. Свойство вязкости материала оболочки проявляется по отношению к сдвигающим напряжениям. Принимается также, что от температуры зависят только характеристики ползучести. В упругой постановке рассматривается устойчивость многослойной оболочки при осевом сжатии и внешнем давлении. Показан случай преимущества однослойной оболочки по отношению к многослойной. В связи с этим, температурная устойчивость исследуется для однослойной оболочки.

1. Как известно, многие прямоугольно армированные композиты проявляют вязкое свойство только по отношению к сдвигающим напряжениям и определяющий закон для них, в системе координат по направлениям армирования, записывается следующим образом:

$$\sigma_1 = A_{11} e_1 + A_{12} e_2, \quad \sigma_2 = A_{12} e_1 + A_{22} e_2 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{12} = \tilde{A}_{66} e_{12}, \quad \tilde{A}_{66} = A_{66} (1 - \Gamma^*)$$

В системе  $(x, y)$ , повернутой относительно первой на угол  $-\varphi$ , определяющими уравнениями будут:



Фиг.1

$$\sigma_i = \tilde{B}_{ij} e_j \quad (1.2)$$

Здесь уже во всех выражениях  $\tilde{B}_{ij}$  будет входить  $\Gamma^*$  [1], а формулы преобразования  $\tilde{B}_{ij}$  - через  $\tilde{A}_{ij}$  [1,2]. В [1] приводятся также вязкоупругие соотношения для симметрично и антисимметрично собранных пакетов.

Сначала рассмотрим упругую устойчивость симметрично собранной (антисимметричная получается аналогичным образом) цилиндрической оболочки при осевом сжатии, когда края оболочки свободно оперты. Решение ее есть в [1,3], здесь приведем окончательное выражение для критического усилия при осесимметричной потере устойчивости с целью нахождения наилучшего расположения слоев (наибольшее критическое усилие). Оно имеет вид при четном числе слоев ( $2n$ )

$$P_{кр} = 2D_{11}(\sqrt{N} - M), \quad M = \frac{3D_{16}(c_{11}c_{26} - c_{12}c_{16})}{4R^2D_{11}(c_{11}c_{66} - c_{16}^2)}$$

$$N = \frac{\Delta}{R^2D_{11}(c_{11}c_{66} - c_{16}^2)} \quad \Delta = \det ||c_{ij}|| \quad (1.3)$$

$$c_{ij} = 2 \sum_{k=1}^n B_{ij}^{(k)} (h_k - h_{k-1}), \quad D_{ij} = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n B_{ij}^{(k)} (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

В ходе получения (1.3), анизотропность - наличие коэффициентов  $c_{16}$ ,  $c_{26}$  - мало что вносят, хотя качественные картины напряженно-деформированного состояния для анизотропной и ортотропной оболочек совершенно различны [4]. Зададимся вопросом, возможно ли расположить слои так, чтобы они исчезли? Что произойдет с  $P_{кр}$  если просто зачеркнуть  $c_{16}$ ,  $c_{26}$ ? Для пластинки такая задача решена в [5]. Покажем это для случая, когда  $A_{11} = A_{22}$ . Для простоты анализа возьмем па-

кет из четырех слоев ( $n=2$ ). Тогда условие, при котором  $c_{16}$ ,  $c_{26}$  равнялись нулю, сводится к

$$\sin 4\varphi_1 + (\lambda - 1) \sin 4\varphi_2 = 0, \quad \lambda = h_2 / h_1 \quad (1.4)$$

Корни уравнения помимо вершин квадрата и точки  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  расположены на кривых  $A_1 P_1$ ,  $A_2 B_2$  (фиг.1). Для  $\lambda = 2$  (слои одинаковой толщины) кривые превращаются в прямые и корнями будут точки прямой  $\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ .

Выражение  $P_{кр}$  в точках, удовлетворяющим (1.4), будет:

$$P_{кр} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{D_{11}(c_{11}^2 - c_{12}^2)}{c_{11}}} \quad (1.5)$$

Так, если подставить сюда

$$c_{11} = h_1 [\lambda A + C [\cos^2 2\varphi_1 + (\lambda - 1) \cos^2 2\varphi_2]]$$

$$c_{12} = h_1 [\lambda D - C [\cos^2 2\varphi_1 + (\lambda - 1) \cos^2 2\varphi_2]]$$

где

$$D_{11} = \frac{2h_1^3}{3} [\lambda^3 D + C [\cos^2 2\varphi_1 + (\lambda^3 - 1) \cos^2 2\varphi_2]]$$

$$A = \frac{1}{2}(A_{11} + A_3), \quad C = \frac{1}{2}(A_{11} - A_3), \quad D = \frac{1}{2}(A_{11} + 2A_{12} - A_3)$$

$$A_3 = A_{12} + 2A_{66}$$

при условии (1.4) можно показать, что:

- 1) если  $A_{11} > A_3$ , то максимум  $P_{кр}$  по  $\varphi_i$  достигается при  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  ( $\frac{\pi}{2}$ ), минимум  $P_{кр}$  - при  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ ,
- 2) если же  $A_{11} < A_3$ , то максимум  $P_{кр}$  достигается при  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ , минимум  $P_{кр}$  - при  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  ( $\frac{\pi}{2}$ ).

Следовательно, для критического усилия в первом случае будем иметь

$$P_{кр} = \frac{4h^2}{\sqrt{3}R} \sqrt{A_{11}^2 - A_{12}^2} \quad (1.6)$$

и во втором

$$P_{кр} = \frac{4h^2}{\sqrt{3}R} \sqrt{2A_{66}(A_{11} + A_{12})} \quad (1.7)$$



В то же время получается, что ортотропное решение (в формуле (1.3) приняты  $c_{16} = c_{26} = 0$ ) дает завышенные значения для критической силы. Есть все основания предполагать, что эти выводы верны и для случая  $A_{11} \neq A_{22}$  (для пластинки [5] только с той разницей, что при  $A_3 > \frac{A_{11} + A_{22}}{2}$  точка максимума будет не при  $\frac{\pi}{4}$ ).

Устойчивость симметрично собранной многослойной оболочки при внешнем равномерном давлении будем изучать, исходя из полубезмоментной теории (правда, здесь потребуются, помимо прочего, еще такое предположение  $\frac{\partial}{\partial y} \gg \frac{\partial}{\partial x}$ , что будет оправдано, так как и здесь при достижении  $c_{16} = c_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ , критическое давление получается наибольшим, а коэффициенты с такими постоянными фигурируют именно при нечетных производных [2]).

Уравнение устойчивости в таких предположениях относительно некоторой потенциальной функции будет

$$D_{22} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} + \frac{1}{R^2 a_{11}} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + Rq \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} = 0$$

$$a_{11} = \frac{c_{22} c_{66} - c_{26}^2}{\Delta} \quad (1.8)$$

Для свободно опертой оболочки критическое давление определяется формулой

$$q_{кр} = \frac{4\pi}{Rl} \left( \frac{D_{22}^3}{27R^2 a_{11}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.9)$$

Как и в предыдущей задаче, проведя анализ (1.9) для случая  $A_{11} = A_{22}$  замечаем, что качественный вывод относительно максимального критического параметра верен и здесь, то есть что однослой лучше и что при  $A_{11} > A_3$  имеют смысл главные направления упругости расположить по главным линиям кривизны, а при  $A_{11} < A_3$  повернуть на  $45^\circ$ . И соответственно, для критического давления будем иметь:

$$q_{кр} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \frac{h^2}{Rl} \left[ \frac{h^2}{R^2} A_{11}^2 (A_{11}^2 - A_{12}^2) \right]^{\frac{1}{4}} \quad (1.10)$$

$$q_{кр} = \frac{8\pi}{3} \frac{h^2}{Rl} \left[ \frac{h^2}{18R^2} A_{66} (A_{11} + A_{12})(A_{11} + A_3)^2 \right]^{\frac{1}{4}} \quad (1.11)$$

2. Теперь рассмотрим вязкоупругую устойчивость оболочки, находящейся в стационарном осесимметричном температурном поле. Предполагается, что температура настолько высокая, что вязкое свойство материала изменяется вместе с температурой, в то же время упруго не, т.е. изменяются только коэффициенты, характеризующие оператор  $\Gamma^*$ . Как известно, при вязкоупругой устойчивости представляют интерес

критические параметры - мгновенные и длительные. Предыдущий пункт был посвящен не столько определению мгновенных критических сил, сколько обоснованию преимущества однослойной оболочки по сравнению с многослойными и вопросу наилучшего ориентирования главных направлений упругости.

Здесь будем заниматься вопросом определения длительных критических параметров, учитывая выводы, полученные в п.1, в частности, что при совпадении главных направлений с координатными линиями длительные критические параметры совпадают с мгновенными и более того, не зависят от температуры.

Таким образом, следует изучить случай, когда главные направления упругости составляют с координатными осями угол, равный  $\frac{\pi}{4}$ . Тогда определение длительного критического усилия при осевом сжатии сводится к уравнению

$$\frac{2h^3}{3} \frac{d^2}{dx^2} \left( \bar{B}_{11} \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \right) + \frac{2h}{R^2 \bar{a}'_{11}} \bar{w} + P \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} = 0 \quad (2.1)$$

где

$$\bar{B}_{11} = A - A_{66} \bar{\Gamma}, \quad \frac{1}{\bar{a}'_{11}} = \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{a_{66}}{4a} \bar{\Gamma} \right)$$

$$a = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{12} + \frac{a_{66}}{2})$$

$$a_{11} = \frac{A_{11}}{\Delta'}, \quad a_{12} = \frac{A_{12}}{\Delta'}$$

$$a_{66} = \frac{1}{A_{66}}, \quad \Delta' = A_{11}^2 - A_{12}^2$$

$\bar{\Gamma}$  - преобразованное по Лапласу ядро  $\Gamma^*$  (функция от температуры) при параметре преобразования  $s = 0$ . Единственное требование, налагаемое на  $\bar{\Gamma}$ , есть то, чтобы существовал ряд Фурье от него. В частности, для стандартного тела  $\Gamma = \gamma e^{-\alpha t}$  есть  $\bar{\Gamma} = \frac{\gamma}{\alpha}$  и для термодинамически простых материалов; так как зависимости  $\gamma$  и  $\alpha$  от температуры одинаковы [6], то  $\bar{\Gamma}$  в этом случае не будет зависеть от температуры и, следовательно, температура не будет влиять на значение длительной критической силы.

Представляя известную функцию  $\bar{\Gamma}(x)$  в виде ряда

$$\bar{\Gamma}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \lambda_m x, \quad \lambda = \frac{m\pi}{l} \quad (2.2)$$

решение (2.1) также будем искать в виде ряда

$$\bar{w} = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin \lambda_m x \quad (2.3)$$

Тогда для неизвестных  $f_m$  получится система

$$(2d_0 - d_{2m} - 2P\lambda_m^2) f_m + \sum_{i=1}^{m-1} (d_{m-i} - d_{m+i}) f_i + \sum_{i=m+1}^{\infty} (d_{i-m} - d_{m+i}) f_i = 0 \quad (2.4)$$

$$d_{m \pm i} = b_{m \pm i} \lambda_m^2 \lambda_i^2 + c_{m \pm i}$$

$$b_0 = \frac{2h^3}{3} (A - A_{66} a_0) \quad c_0 = \frac{2h}{aR^2} \left( 1 - \frac{a_{66}}{4a} a_0 \right)$$

$$b_m = -\frac{2h^3}{3} A_{66} a_m \quad , \quad c_m = -\frac{h^3}{2R^2 a^2} a_{66} a_m$$

Длительное критическое усилие определяется из условия равенства нулю детерминанта системы (2.4) - как минимальный корень, при заданной температуре и зависимости  $\bar{\Gamma}$  от нее.

Главная гармоника потери устойчивости - наиболее близкая к истинной форме потери устойчивости (в общем, форма представляется рядом (2.3)), определяется формулой

$$\lambda_m = \left( \frac{2c_0 - c_{2m}}{2b_0 - b_{2m}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.5)$$

которая не только не будет совпадать с гармоникой при длительной потере устойчивости без температуры (формы мгновенной и длительной потери устойчивости различные [7]), но и будет зависеть от распределения температуры.

Для второй задачи определение длительного критического давления сводится к уравнению

$$\frac{2h^3}{3} \bar{B}_{11} \frac{\partial^8 \bar{\Phi}}{\partial y^8} + \frac{2h}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{\bar{a}_{11}'} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} \right) + Rq \frac{\partial^6 \bar{\Phi}}{\partial y^6} = 0 \quad (2.6)$$

Если искать  $\bar{\Phi}$  ( $\bar{\Phi} \div \bar{\Phi}(s=0)$ ) в виде

$$\bar{\Phi} = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin \lambda_m x \quad , \quad \mu_n = \frac{n}{R} \quad (2.7)$$



то для  $f_m$  получим систему типа (2.4), где теперь

$$d_{m \pm i} = b_{m \pm i} \mu_n^8 + c_{m \pm i} \lambda_m^2 \lambda_i^2 \quad (2.8)$$

а вместо  $2R\lambda_m^2$  надо полагать  $2Rq\mu_n^6$ , то есть  $q_{кр}^{\partial x}$  также определится из бесконечной системы.

Следует отметить, что и здесь количество волн потери устойчивости в окружном направлении также будет зависеть от распределения температуры и определится формулой:

$$\mu_n = \left[ \frac{3(2c_0 - c_{2n})}{2b_0 - b_{2n}} \right]^{\frac{1}{8}} \quad (2.9)$$

Таким образом, при заданной температуре и при заданной зависимости  $\Gamma(t, T)$  можно с любой точностью вычислить критические параметры. Здесь приведем формулы критических величин, полученных во втором приближении (детерминант второго порядка) для линейной зависимости  $\bar{\Gamma}$  от температуры

$$\bar{\Gamma} = \gamma_1 + \delta T, \quad T = T_0 (1 + \cos \lambda_1 x) \quad (2.10)$$

$$P_{кр}^{\partial x} = \frac{A_{11} h^3}{l^2} \min \left( 2 \sqrt{\bar{b}_0 \bar{c}_0} \pm \frac{\bar{b}_0 \bar{c}_1 + \bar{b}_1 \bar{c}_0}{\sqrt{\bar{b}_0 \bar{c}_0}} \right) \quad (2.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{b}_0 &= \frac{1}{3} [1 + \beta - \beta (\gamma_1 + \delta T_0)] \\ \bar{c}_0 &= \frac{4 \beta l^4}{R^2 h^2 (1 + \beta)} \left[ 1 - \frac{\gamma_1 + \delta T_0}{1 + \beta} \right] \\ \bar{b}_1 &= -\frac{1}{3} \beta \delta T_0, \quad \beta = \frac{2A_{66}}{A_{11}}, \quad \bar{c}_1 = -\frac{4 \beta l^4 \delta T_0}{R^2 h^2 (1 + \beta)^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

При получении (2.11) принято, что главная гармоника реализуется при большом  $m$  ( $m \approx m + 1$ ) и  $A_{12} = 0$ .

Для второй задачи

$$\begin{aligned} q_{кр}^{\partial x} &= \frac{A_{11} \pi^2 h^2}{2Rl} \sqrt{\frac{h}{R}} \left[ 23 \left( \frac{\bar{b}_0^3 \bar{c}_0}{27} \right)^{\frac{1}{4}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{[225 \bar{b}_0^2 \bar{c}_0^2 + 9 \bar{b}_1^2 \bar{c}_0^2 + 24 \bar{b}_0 \bar{c}_0 \bar{b}_1 \bar{c}_1 + 16 \bar{b}_0^2 \bar{c}_1^2]^{1/2}}{(27 \bar{b}_0^2 \bar{c}_0^3)^{1/4}} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь  $\bar{b}_i$  имеют прежние значения, а  $\bar{c}_i$  отличаются от (2.12) тем, что отсутствует множитель  $\frac{l^4}{R^2 h^2}$ .

В заключение надо отметить: то, что лучше для мгновенной задачи

с точки зрения обсужденного в п.1 вопроса ( рациональное использование свойства материала), может быть для длительной устойчивости не лучшим. В частности, если при  $A_{11} < A_3$  критические параметры максимум достигаются при  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , то длительные критические параметры, зависящие от температуры, могут быть меньше, чем длительные, что одни и те же мгновенные, при  $\varphi = 0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л. А. Некоторые задачи вязкоупругих анизотропных слоистых пластин и оболочек. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1989, т.42, N 3, с. 37-44.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. - М. : Физматгиз, 1961. 384 с.
3. Мовсисян Л. А. Об осесимметрично -нагруженной анизотропной цилиндрической оболочке. - Изв. АН Арм.ССР, сер.физ.- мат. н., 1962, т. XV, N 2, с. 111 -119.
4. Мовсисян Л. А. К расчету анизотропной цилиндрической оболочки вращения. - Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.- мат. н., т. 12, N 4, с. 89 -107.
5. Мовсисян Л. А. К устойчивости упругой и вязкоупругой анизотропной многослойной пластинки. - Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1990, т.43, N 4, с.3 -12.
6. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. - М: Наука, 1973. 288 с.
7. Потапов В.Д. Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций. -М: Стройиздат, 1986. 312 с.

Институт механики АН Армении  
Поступила в редакцию 27.9.1991