

НЕСИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ
ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Петросян Л.Г.

Պետրոսյան Լ.Գ. Կլոր գլանային խողովակում հեղուկի շփատալված հոսքի ոչ սիմետրիկ մոդելը

Petrosian L.G.A nonsymmetric model for liquid non-steady flow in circular cylindrical tube

Կլոր գլանային խողովակում շփատալված հոսքի մասին խնդրի լուծման համար օգտագործված է ոչ սիմետրիկ լարման թեճզորով կառուցվածքային հեղուկի մեխանիկայի մոդելը: Ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ արագության և մասնիկ պտտման անկյունային արագության համար: Պարզված է, որ ստացնոցար հոսքի շփատալման ժամանակը փոքրացում է կախված հեղուկի միկրոստրուկտուրայից: Այստեղյան հեղուկի դասակարգ տեսության արդյունքների համեմատությամբ:

Использована модель структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений к решению задачи о неустановившемся течении в неограниченной круглой трубе. Получены аналитические выражения для скорости и угловой скорости вращения частиц. Установлено, что время установления стационарного режима течения уменьшается (в зависимости от микроструктуры жидкости) по сравнению с результатами классической теории ньютоновской жидкости.

Рассмотрим неустановившееся течение вязкой несимметричной жидкости в неограниченной круглой трубе радиуса R . Будем считать жидкость несжимаемой ($\rho = \text{const.}$). Полагая, что во все время движения скорости жидких частиц направлены параллельно оси трубы oz (траектории всех частиц прямолинейно-параллельно оси oz), будем иметь $u_r = u_\varphi = 0$. Тогда из уравнения неразрывности найдем, что $u_z = w$ не зависит от z .

Решение этой задачи было дано в работе И.С.Громски [1]. Указанное решение было основано на классической теории континуума. Однако классическая точка зрения налагает сильные ограничения на пределы, в которых континуальное описание макроскопического поведения может успешно отражать тонкую структуру материала. Накопившиеся факты свидетельствуют о том, что классическая теория континуума Навье-Стокса не может точно предсказать поведение некоторого класса жидкостей и особенно течений через тонкие капилляры и узкие зазоры, так как не содержит механизма для объяснения наблюдаемых новых физических явлений. Такая потеря точности возможна в случаях, когда характерный размер системы (радиус трубы) сравним с характерной материальной длиной вещества, значение которой обусловлено средним размером молекул

или зерен, содержащихся в среде [2].

Это обстоятельство (совместно с другими недостатками классической теории континуума) привело исследователей к разработке теории несимметрических жидкостей.

Все более очевидно, что разработанные в последнее время положения теории структурных жидкостей могут успешно описывать неньютоновские поведения реальных жидкостей. К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных этой тематике, о чем достаточно полно изложено в работе [2]. В этой теории введены два независимых кинематических векторных поля, одно из которых представляет поступательные движения частиц жидкости, а другое - угловые или вращательные движения частиц, характеризующие внутренние степени свободы, соответствующие им моментные напряжения [2-11]. Характерным отличием теории структурных сред с несимметричным тензором напряжений является присутствие масштабных параметров. Эти жидкости реагируют на микровращательные движения и спиновую инерцию, поэтому могут воспринимать распределенные поверхностные и массовые пары сил.

В настоящей работе применена теория континуума с несимметричным тензором напряжений к решению задачи о неустановившемся движении несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе.

Общая система уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений имеет вид [2,5]

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + 2\nu \nabla \cdot (\nabla v)^d + \nu_r \nabla \times [2\omega - \nabla \times v] + f \quad (2)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = 2\nu_r (\nabla \times v - 2\omega) + c_0 \nabla \nabla \cdot \omega + 2c_d \nabla \cdot (\nabla \omega)^d + 2c_a \nabla \cdot (\nabla \omega)^a + c \quad (3)$$

Здесь ρ - массовая плотность, p - давление, I - скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, v - вектор скорости точки, ω - вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, ν - кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r - кинематическая вращательная вязкость, c_0 , c_d и c_a - коэффициенты моментной вязкости, $d(\dots)/dt$ - полная производная по времени, ∇ - пространственный градиент, $(\nabla v)^d$ и $(\nabla \omega)^d$ - симметричные части соответствующих диад, $(\nabla v)^a$ и $(\nabla \omega)^a$ - антисимметричные диады f - вектор массовой силы, c - вектор массового момента.

Для компонентов поступательной скорости и угловой скорости вращения частиц имеем

$$\begin{aligned} u_r = u_\varphi = 0, & \quad u_z = w(r, t) \\ \omega_r = \omega_z = 0, & \quad \omega_\varphi = \omega(r, t) \end{aligned} \quad (4)$$

Если пренебречь массовыми силами и массовыми моментами, то уравнения поступательного движения и вращательного движения представляются в виде

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$$

$$r \frac{\partial w}{\partial t} = (\nu + \nu_r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + 2\nu_r \frac{\partial}{\partial r} (r\omega) - \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (5)$$

$$I \frac{\partial \omega}{\partial t} = (c_a + c_d) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\omega}{r} \right) - 2\nu_r \frac{\partial w}{\partial r} - 4\nu_r \omega \quad (6)$$

Из (5) следует, что перепад давления $\partial p / \partial z$ не зависит от координаты z и может быть только функцией времени t . Мы будем рассматривать случай, когда жидкость в начальный момент $t = 0$ находится в покое, а установившийся в этот момент перепад давления $\partial p / \partial z$ не меняется ($\partial p / \partial z = \text{const}$).

Предполагаем, что жидкость прилипает к границе трубы при $r = R$, тогда начальные и граничные условия для поступательной скорости и угловой скорости вращения частиц будут [2]

$$\begin{aligned} \text{при } t = 0, \quad w = 0, \quad \omega = 0 \\ \text{при } r = R \quad (t > 0), \quad w = 0, \quad \omega = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Принимая во внимание плавность течения, согласно идеи работы [12] инерционные члены в уравнениях движения несимметричной жидкости (5) и (6) заменим приближенными выражениями, то есть ускорения $\partial w / \partial t$ и $\partial \omega / \partial t$ заменим их средними по радиусу значениями. Оценка степени точности идеи осреднения работы [12] для задачи И.С.Громеки в случае классической ньютоновской жидкости приведена в [13]. Такая оценка степени точности для другой задачи приведена в работе [14]. Эти оценки показали практическую приемлемость этого способа.

$$\varphi(t) = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\partial w}{\partial t} dr \quad (8)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\partial \omega}{\partial t} dr \quad (9)$$

При таком осреднении уравнения (5) и (6) примут следующий вид:

$$r \varphi(t) = (\nu + \nu_r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + 2\nu_r \frac{\partial}{\partial r} (r\omega) - \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (10)$$

$$0 = (c_a + c_d) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\omega}{r} \right) - 2\nu_r \frac{\partial w}{\partial r} - 4\nu_r \omega \quad (11)$$

Нетрудно убедиться, что осреднения вращательного ускорения вызванного проекцией псевдовектора ω , необходимо произвести по диаметру трубы. Тогда $\psi(t) \equiv 0$, а это означает, что в уравнении вращательного движения ускорения вращения частиц не учитываются.

Разрешая (10) относительно $\partial w / \partial r$, получаем

$$\frac{\partial w}{\partial r} = (\nu + \nu_r)^{-1} \left[\frac{1}{2} r \varphi(t) - 2\nu_r \omega + \frac{1}{2\rho} r \frac{\partial p}{\partial z} \right] + C_1 r^{-1} \quad (12)$$

Подстановка $\partial w / \partial r$ в уравнение (11) дает

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) \omega = Pr + \frac{2v_r}{c_a + c_d} \frac{1}{r} C_1 + \Phi \varphi(t) r \quad (13)$$

где

$$k = \left(\frac{4\nu}{\nu + \nu_r} \frac{\nu_r}{c_d + c_a} \right)^{1/2}$$

$$P = \frac{\nu_r}{(\nu + \nu_r)(c_a + c_d)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\Phi = \frac{\nu_r}{(\nu + \nu_r)(c_a + c_d)} \quad (14)$$

Общее решение уравнения (14) есть

$$\omega = C_2 I_1(kr) + C_3 K_1(kr) - \left[P \frac{1}{k^2} + \Phi \varphi(t) \frac{1}{k^2} \right] r - \frac{2\nu_r}{c_a + c_d} \frac{C_1}{k^2 r} \quad (15)$$

где $I_1(kr)$ и $K_1(kr)$ - модифицированные цилиндрические (бесселевы) функции первого порядка первого и второго родов.

Подставляя (15) в (12) и интегрируя, получим

$$w = 2\nu_r(\nu_r + \nu)^{-1} k^{-1} \left[-C_2 I_0(kr) + C_3 K_0(kr) \right] + \frac{1}{4\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + \frac{\nu + \nu_r}{\nu} C_1 \ln r + \frac{1}{4\nu} \varphi(t) r^2 + C_4 \quad (16)$$

где $I_0(kr)$ и $K_0(kr)$ модифицированные цилиндрические (бесселевы) функции нулевого порядка первого и второго родов; C_1, C_2, C_3 и C_4 - функции от времени.

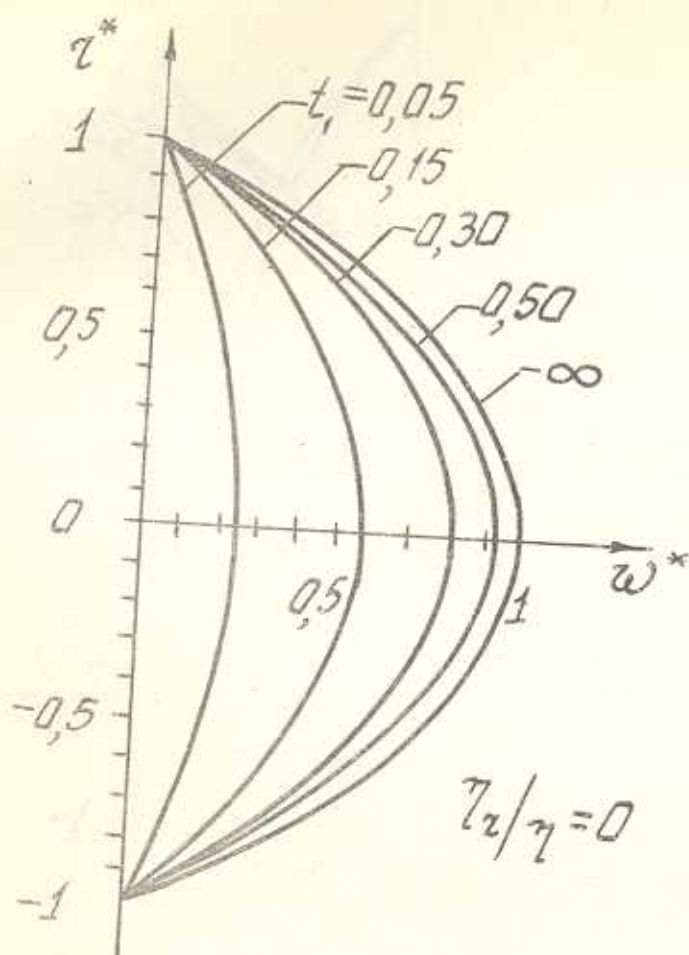
Значения поступательной скорости w и скорости вращения частицы ω должны быть ограниченными на оси трубы при $r = 0$. Так как $K_0(kr), K_1(kr)$ и $\ln r$ не ограничены при $r = 0$, то должны быть $C_1, C_3 = 0$. Тогда

$$\omega = C_2 I_1(kr) - \frac{1}{4\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial z} r - \frac{1}{4\nu} \varphi(t) r \quad (17)$$

$$w = -\frac{2\nu_r}{\nu_r + \nu} \frac{1}{k} C_2 I_0(kr) + \frac{1}{4\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + \frac{1}{4\nu} \varphi(t) r^2 + C_4 \quad (18)$$

Используя граничные условия (7) из (17) и (18), определяем C_2 и C_4 и приходим к решению

$$\omega = - \left[r - \frac{I_1(\lambda r)}{I_1(\lambda)} \right] \left[\frac{R}{4\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{R}{4\nu} \varphi(t) \right] \quad (19)$$



Фиг. 1

$$w = \left(1 - r^{*2} + \frac{2\nu_r}{\nu + \nu_r} \frac{1}{\lambda} \frac{I_0(\lambda r^*) - I_0(\lambda)}{I_1(\lambda)} \right) \times \left[w_0 - \frac{r^2}{4\nu} \varphi(t) \right] \quad (20)$$

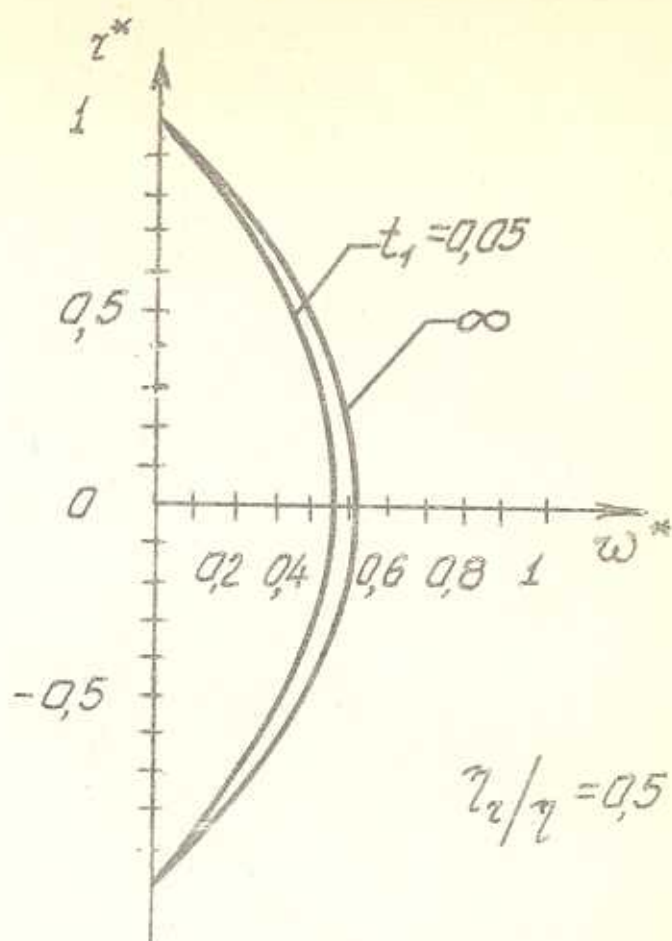
где

$$w_0 = - \frac{R^2}{4\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad r^* = \frac{r}{R},$$

$$\lambda = kR = \left(\frac{4\nu}{\nu + \nu_r} \frac{\nu_r}{c_a + c_d} \right)^{1/2} R \quad (21)$$

Здесь w_0 — максимальная по сечению скорость на оси трубы в классическом течении Пуазейля.

Определив из (20) $\partial w / \partial t$, подставив в правую часть (8) и интегрируя, получим



Фиг.2

$$\varphi(t) = C_5 \exp\left(-\frac{6\nu}{\alpha R^2} t\right) \quad (22)$$

где

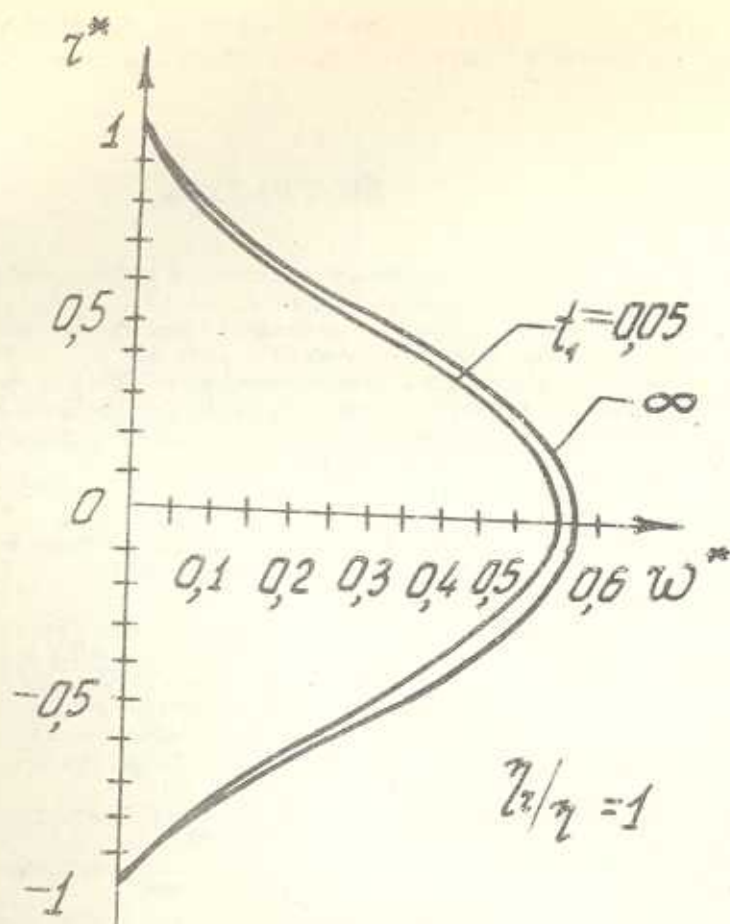
$$\alpha = 1 + \frac{3\nu_r}{\nu + \nu_r} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{I_1(\lambda)} \left[I_0(\lambda) + \frac{1}{R} \int_0^R I_0(kr) dr \right] \quad (23)$$

Постоянную интегрирования C_5 находим из начального условия для w . Так как при $t = 0$ $w = 0$, то из уравнения (20) и (22) находим

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \exp\left(-\frac{6\nu}{\alpha R^2} t\right) \quad (24)$$

Из (24) значение $\varphi(t)$ подставляя в (20), получаем

$$w^* = \frac{w}{w_0} = \left(1 - r^{*2} + \frac{2\eta_r}{\eta + \eta_r} \frac{1}{\lambda} \frac{I_0(\lambda r^*) - I_0(\lambda)}{I_1(\lambda)} \right) \times \left[1 - \exp(-6\alpha t_1) \right] \quad (25)$$



Фиг.3

где $\eta = \rho \nu$, $\eta_r = \rho \nu_r$.

Здесь $t_1 = \eta t / \rho R^2$ — критерий Фурье. Решение (25) переходит в классическое при $\eta_r = 0$, и (19) даст $\omega = 0$, а (23) — $\alpha = 1$ [13].

Так как ν , ν_r , c_a , c_d не отрицательны, поэтому λ — действительное число (безразмерная величина, характеризующая взаимосвязь между геометрией и свойствами жидкости).

Воспользуясь формулой (25), вычислим расход жидкости

$$Q^* = \frac{Q}{Q_0} = \left[1 - \frac{8\eta_r}{\eta + \eta_r} \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda}{2} \frac{I_0(\lambda)}{I_1(\lambda)} - 1 \right) \right] \times [1 - \exp(-6\alpha t_1)] \quad (26)$$

где $Q_0 = -\frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial z}$.

Здесь Q_0 — расход жидкости в классическом течении Гагена-Пуазейля.

В пределе при $t = \infty$ решения (25) и (26) переходят в решения стационарной задачи [2].

Профили скоростей для различных значений η_r / η (при $\lambda = 1$), показаны на фиг. 1, 2, 3.

Как видно из приведенных графиков, с увеличением значений η_r / η уменьшается время установления стационарного режима течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках. - Казань: Изд. Универс. типографии, 1882. 31 с.
2. Петросян Л.Г. Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений. - Ереван: Изд.-во ЕГУ, 1984. 308 с.
3. Grad H. Statistical Mechanics-Thermo-dynamics and fluid dynamics of systems with an arbitrary number of Integrals. - Comm. pure appl. math., 1952, vol. 5, N 4, p. 455-494.
4. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Кузшинский Е.В. Асимметрическая гидромеханика. - ПММ, 1965, т. 29, вып. 2, с. 297-308.
5. Нгуен Ван Дьен, Листров А.Т. О изотермической модели несимметричных жидкостей. - ИАН СССР, МЖГ, 1967, п. 5, с. 132-136.
6. Петросян Л.Г. Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения. 1. Основные уравнения. - Уч. записки, ЕГУ, 1976, п. 3, с. 56-63.
7. Петросян Л.Г. Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения. 2. Феноменологические уравнения. Перекрестные эффекты. - Уч. записки, ЕГУ, 1977, N 2, с. 74-80.
8. Петросян Л.Г. Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения. 3. Пристеночный и приосевой эффекты в лаазейлевском течении суспензии. - Уч. записки, ЕГУ, 1978, N 22, с. 46-54.
9. Петросян Л.Г. К построению модели магнитной гидродинамики несимметричных жидкостей. - ПМ, 1976, т. 12, N 11, с. 103-109.
10. Петросян Л.Г. О модели электрогидродинамики с несимметричным тензором напряжений. - ЖГФ, 1979, т. 49, вып. 3, с. 481-487.
11. Петросян Л.Г. К построению изотермической модели электрогидродинамики с несимметричным тензором напряжений. - ПМ, 1980, т. 16, N 4, с. 108-114.
12. Слезкин Н.А., Тарг С.М. Обобщенные уравнения Рейнольдса. - ДАН СССР, 1946, т. 3, с. 205-208.
13. Аббасов А.А., Мирзаджанзаде А.Х. Приближенное решение задачи о нестационарном движении вязко-пластичной среды в круглой цилиндрической трубе. - Изв. АН СССР, ОТН, 1955, N 12, с. 122-124.
14. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. - М. -Л.: ГИТТЛ, 1951. 420 с.

Ереванский государственный университет
Поступила в редакцию 19.12.1990