ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 44, № 5, 1991 Механика

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ КРУГЛОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ПО ЗАДАННЫМ ЧАСТОТАМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

ГНУНИ. В.Ц., ОГАНИСЯН З.Б.

Գնունի Վ.Ց., Հովհաննիսյան Զ.Բ. Սեփական տատանումների տրված հաճախականություններով կլոր օղակաձև սալի եզրային պայմանների որոշումը

Gnuni V.Ts., Oganisian Z.B., Determination of boundary conditions of circular plate with given vibration frequencies.

Աշխատանքում դիտարկվում է սեփական տատանումների տրված հաճախականություններով օղակաձև կլոր սալի եզրերում ամրացման պայմանների վերականգնման խնդիրը: Ցույց է տրվում, որ ընդհանուր դեպքում եզրային պայմանները որոշելու համար բավարար է տալ սեփական տատանումների հաճախականությունների ութ արժեքներ:

Рассматривается задача восстановления граничных условий на краях упругой круглой кольцевой пластинки по известному спектру частот собственных колебаний. Показывается, что в общем случае для нахождения неизвестных граничных условий достаточно знание восьми частот собственных осесимметричных колебаний круглой кольцевой пластинки.

1. Уравнение для определения амплитуд собственных осесимметричных колебаний упругой круглой пластинки представляется в виде [1]

$$\Delta^2 w - \frac{\rho h R^4}{D} \omega^2 w = 0 \tag{1.1}$$

$w(r)$ — амплитуда, R — радиус, $r \in [0;1]$ -безразмерная, деленная на R координата по радиусу, h — толщина, ρ — плотность материала пластинки, $D = Eh^3/(1-\nu^2)$ — жесткость на изгиб, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ω — частота собственных колебаний пластинки,

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}$$

одномерный оператор Лапласа в полярных координатах $or\varphi z$.

Общее решение уравнения (1.1) получается в виде

$$w(r) = a_1 J_0(\lambda r) + a_2 Y_0(\lambda r) + a_3 I_0(\lambda r) + a_4 K_0(\lambda r) \tag{1.2}$$

где J_0, Y_0 — функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода, I_0, K_0 – модифицированные функции Бесселя,

$$\lambda = \frac{2R^2}{h}\,\omega\sqrt{\frac{3\rho(1-\nu^2)}{E}}$$

- приведенная частота собственных колебаний.

Наиболее общие осесимметричные граничные условия на краю $r = \mathrm{const}$ представляются в виде

$$w = A_{11}^{(i)} T_{rz} + A_{12}^{(i)} M_{rr}$$

$$\frac{dw}{dr} = A_{21}^{(i)} T_{rz} + A_{22}^{(i)} M_{rr} \qquad \text{при } r = \mathrm{const}. \qquad (1.3)$$

где $i = 1$ соответствует внешнему, а $i = 2$ - внутреннему краям

$$M_{rr} = -\frac{D}{R^2}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)$$

- изгибающий момент

$$T_{rz} = -\frac{D}{R^3}\left(\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right)$$

- поперечное усилие при $r = \mathrm{const}$, $z = 0$.

2. Рассмотрим кольцевую пластинку с внутренним диаметром R_0, тогда условия (1.3) можно представить в виде

$$w = \alpha_{11}\frac{d^3w}{dr^3} + \alpha_{12}\frac{d^2w}{dr^2}$$

$$\frac{dw}{dr} = \alpha_{21}\frac{d^3w}{dr^3} + \alpha_{22}\frac{d^2w}{dr^2} \qquad \text{при} \quad r = 1 \qquad (2.1)$$

$$w = \beta_{11}\frac{d^3w}{dr^3} + \beta_{12}\frac{d^2w}{dr^2}$$

$$\frac{dw}{dr} = \beta_{21}\frac{d^3w}{dr^3} + \beta_{22}\frac{d^2w}{dr^2} \qquad \text{при} \quad r = \frac{R_0}{R} = r_0 \qquad (2.2)$$

где $\alpha_{mn} = \alpha_{mn}(D, R)$, $\beta_{mn} = \beta_{mn}(D, R, r_0)$ - подлежащие определению безразмерные коэффициенты упругого опирания краев данной пластинки, причем

$$\left\{\begin{matrix}\alpha_{11}\\ \beta_{11}\end{matrix}\right. = -\frac{D}{R^3}\Bigg(A_{11}$$

$$+\frac{r\nu R D A_{12}^{(i)} A_{21}^{(i)} A_{21}^{(i)} - A_{11}^{(i)} A_{21}^{(i)}}{R^3 r^2 + r\nu R D A_{22}^{(i)} - A_{21}^{(i)}}\Bigg)$$

$$\left\{\begin{matrix}\alpha_{12}\\ \beta_{12}\end{matrix}\right. = -\frac{D}{R^3}\left(\frac{1}{r}A_{11}^{(i)} + R A_{12}^{(i)}\right.$$

$$
-\frac{(r\nu RDA_{12}{}^{(i)}-A_{11}{}^{(i)})(rRA_{22}{}^{(i)}-A_{21}{}^{(i)})}{r(R^3r^2+r\nu RDA_{22}{}^{(i)}-A_{21}{}^{(i)})}\Bigg)
$$

$$
\left\{\begin{matrix}\alpha_{21}\\ \beta_{21}\end{matrix}\right. =-\frac{Dr^2A_{21}{}^{(i)}}{R^3r^2+r\nu RDA_{22}{}^{(i)}-A_{21}{}^{(i)}}
$$

$$
\left\{\begin{matrix}\alpha_{22}\\ \beta_{22}\end{matrix}\right. =-\frac{rD\left(A_{21}{}^{(i)}+rRA_{22}{}^{(i)}\right)}{R^3r^2+r\nu RDA_{22}{}^{(i)}-A_{21}{}^{(i)}}
$$

при $r=\mathrm{const}$.

Здесь $i=1$ соответствует краю $r=1$, а $i=2$ – краю $r=r_0$.

В случае шарнирного опирания края $\alpha_{11}=\alpha_{12}=\alpha_{21}=0$, $\alpha_{22}=-r/\nu$, ($r=\mathrm{const.}$) а в случае жесткой заделки $\alpha_{mn}=0$.

Характеристическое уравнение для определения λ, в силу (1.2), (2.1), (2.2) получается в виде

$$
|\,a_{ij}(\lambda,\alpha_{mn},\beta_{mn})\,|=0,
$$

$$
(i,j,=1,2,3,4;\ m,n=1,2); \tag{2.3}
$$

где
$$
\begin{aligned}
a_{1j}&=P_j{}^{(0)}(\lambda)-\alpha_{11}P_j{}^{(3)}(\lambda)-\alpha_{12}P_j{}^{(2)}(\lambda)\\
a_{2j}&=\lambda P_j{}^{(1)}(\lambda)-\alpha_{21}P_j{}^{(3)}(\lambda)-\alpha_{22}P_j{}^{(2)}(\lambda)\\
a_{3j}&=P_j{}^{(0)}(r_0\lambda)-\beta_{11}P_j{}^{(3)}(r_0\lambda)-\beta_{12}P_j{}^{(2)}(r_0\lambda)\\
a_{4j}&=\lambda P_j{}^{(1)}(r_0\lambda)-\beta_{21}P_j{}^{(3)}(r_0\lambda)-\beta_{22}P_j{}^{(2)}(r_0\lambda)
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

$$
P_1{}^{(k)}(\lambda r)=\frac{d^k}{dr^k}J_0(\lambda r)=J_0{}^{(k)}(\lambda r)
$$

$$
P_2{}^{(k)}(\lambda r)=\frac{d^k}{dr^k}Y_0(\lambda r)=Y_0{}^{(k)}(\lambda r)
$$

$$
P_3{}^{(k)}(\lambda r)=\frac{d^k}{dr^k}I_0(\lambda r)=I_0{}^{(k)}(\lambda r)
$$

$$
P_4{}^{(k)}(\lambda r)=\frac{d^k}{dr^k}K_0(\lambda r)=K_0{}^{(k)}(\lambda r)
$$

Из (2.3) в случае жесткой заделки красв ($r=r_0$, $r=1$) получается уравнение

$$
\begin{vmatrix}
J_0(\lambda) & Y_0(\lambda) & I_0(\lambda) & K_0(\lambda)\\
J_0{}^{(1)}(\lambda) & Y_0{}^{(1)}(\lambda) & I_0{}^{(1)}(\lambda) & K_0{}^{(1)}(\lambda)\\
J_0(r_0\lambda) & Y_0(r_0\lambda) & I_0(r_0\lambda) & K_0(r_0\lambda)\\
J_0{}^{(1)}(r_0\lambda) & Y_0{}^{(1)}(r_0\lambda) & I_0{}^{(1)}(r_0\lambda) & K_0{}^{(1)}(r_0\lambda)
\end{vmatrix}=0 \tag{2.5}
$$

первые четыре корня которого при $r_0=0{,}1$ есть

$$\lambda_1 = 5.22; \quad \lambda_2 = 8.68; \quad \lambda_3 = 12.2 \quad \lambda_4 = 15.7$$

В общем случае, когда на краях пластинки заданы условия типа (1.3), можно найти α_{mn}, β_{mn} и корни характеристического уравнения (2.3).

В случае обратной задачи, когда заданы λ_p, из (2.3) можно определить α_{mn}, β_{mn}, а следовательно, восстановить граничные условия (1.3). Здесь необходимо знание восьми значений λ_p, и решение системы восьми уравнений (2.3) относительно α_{mn}, β_{mn}.

В случае сплошной пластинки, из условия ограниченности решения в центре $(r = 0)$ (4.2) представляется в виде

$$w(r) = a_1 J_0(\lambda r) + a_3 I_0(\lambda r)$$

где a_1, a_3 подлежат определению из граничных условий (2.1).

Характеристическое уравнение (2.3) упрощается и представляется в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11}(\lambda, \alpha_{mn}) & a_{13}(\lambda, \alpha_{mn}) \\ a_{21}(\lambda, \alpha_{mn}) & a_{23}(\lambda, \alpha_{mn}) \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.7)$$

Отсюда в случае жесткой заделки края пластинки получается уравнение

$$\begin{vmatrix} J_0(\lambda) & I_0(\lambda) \\ J_0^{(1)}(\lambda) & I_0^{(1)}(\lambda) \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.8)$$

первые четыре корня которого есть

$$\lambda_1 = 3.20; \ \lambda_2 = 6.31; \ \lambda_3 = 9.44 \quad \lambda_4 = 12.6 \qquad (2.9)$$

Здесь для восстановления граничных условий на краю пластинки достаточно задать четыре значения λ_p.

Из (2.8) для определения искомых α_{ik}, при заданных четырех значений λ_p, получается система уравнений

$$Bx = yc + d \qquad (2.10)$$

где

$$B = \| b_{ij} \| \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

$$y = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

$$x = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{21} \end{matrix} \right\| \qquad c = \left\| \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{matrix} \right\| \qquad d = \left\| \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{matrix} \right\|$$

$$b_{i1} = J_0^{(1)}(\lambda_i) I_0^{(3)}(\lambda_i) - I_0^{(1)}(\lambda_i) J_0^{(3)}(\lambda_i)$$

$$b_{i2} = J_0^{(1)}(\lambda_i) I_0^{(2)}(\lambda_i) - I_0^{(1)}(\lambda_i) J_0^{(2)}(\lambda_i)$$

$$b_{i3} = J_0^{(3)}(\lambda_i) I_0(\lambda_i) - I_0^{(3)}(\lambda_i) J_0(\lambda_i)$$

$$b_{i4} = J_0^{(2)}(\lambda_i)\, I_0(\lambda_i) - I_0^{(2)}(\lambda_i)\, J_0(\lambda_i)$$

$$c_i = J_0^{(1)}(\lambda_i)\, I_0(\lambda_i) - I_0^{(1)}(\lambda_i)\, J_0(\lambda_i)$$

$$d_i = J_0^{(1)}(\lambda_i)\, I_0(\lambda_i) - I_0^{(1)}(\lambda_i)\, J_0(\lambda_i) .$$

3. Рассмотрим некоторые конкретные реализации предложенного алгоритма восстановления граничных условий.

Пусть искомые условия на краях кольцевой пластинки можно представить в виде

$$w = 0\,, \quad \frac{dw}{dr} = A_{22}^{(1)} M_{rr} \qquad \text{при} \qquad r = 1$$

$$w = 0\,, \quad \frac{dw}{dr} = A_{22}^{(2)} M_{rr} \qquad \text{при} \qquad r = r_0 \tag{3.1}$$

откуда

$$w = 0\,, \quad \frac{dw}{dr} = \alpha_{22} \frac{d^2 w}{dr^2} \qquad \text{при} \qquad r = 1$$

$$w = 0\,, \quad \frac{dw}{dr} = \beta_{22} \frac{d^2 w}{dr^2} \qquad \text{при} \qquad r = r_0 \tag{3.2}$$

где

$$\alpha_{22} = - \frac{D A_{22}^{(1)}}{R^2 + D\nu A_{22}^{(1)}}$$

$$\beta_{22} = - \frac{D r_0 A_{22}^{(2)}}{R^2 r_0 + D\nu A_{22}^{(2)}} \tag{3.3}$$

В рассмотренном частном случае, имея два значения λ_p, для определения искомых α_{22}, β_{22} получается система

$$c_{11}\alpha_{22} + c_{12}\beta_{22} = c_{13}\alpha_{22}\beta_{22} + d_1$$

$$c_{21}\alpha_{22} + c_{22}\beta_{22} = c_{23}\alpha_{22}\beta_{22} + d_2 \tag{3.4}$$

где

$$c_{i1} = \lambda_i s_{12}^{(i)}; \qquad c_{i2} = \lambda_i s_{21}^{(i)};$$

$$c_{i3} = \lambda_i^2 s_{22}^{(i)}; \qquad d_i = s_{11}^{(i)};$$

$$s_{kq}^{(i)} = \begin{vmatrix} J_0(\lambda_i) & Y_0(\lambda_i) & I_0(\lambda_i) & K_0(\lambda_i) \\ J_0^{(q)}(\lambda_i) & Y_0^{(q)}(\lambda_i) & I_0^{(q)}(\lambda_i) & K_0^{(q)}(\lambda_i) \\ J_0(r_0\lambda_i) & Y_0(r_0\lambda_i) & I_0(r_0\lambda_i) & K_0(r_0\lambda_i) \\ J_0^{(k)}(r_0\lambda_i) & Y_0^{(k)}(r_0\lambda_i) & I_0^{(k)}(r_0\lambda_i) & K_0^{(k)}(r_0\lambda_i) \end{vmatrix}$$

$$(i = 1, 2)$$

Если система (3.4) при заданных λ_p не имеет действительных решений, то рассмотренные λ_p не являются собственными значениями данной краевой задачи ни при каких граничных условиях. В случае, когда система (3.4) допускает две пары действительных решений, необходимо проверить возможность осуществления этих граничных условий. С этой целью определяется отношение $\delta = w / w_0$ для задачи изгиба рассмотренной пластинки под действием постоянного давления при полученных граничных условиях (w) и при жесткой заделке краев (w_0). Если это отношение больше единицы, то полученные граничные условия реальны.

Рассмотрим конкретные примеры: пусть $r_0 = 0.1$, $\lambda_1 = 4.92$, $\lambda_2 = 8.38$ против $\lambda_1 = 5{,}22$; $\lambda_2 = 8{,}68$; для пластинки с жестко заделанными краями. В этом случае получается

$$\alpha_{22} = -\ 8.09 \cdot 10^{-2}, \beta_{22} = -\ 2.19 \cdot 10^{4}\ ;\ \delta(0{,}5) = 1.3\ ;$$

или

$$\alpha_{22} = -\ 2.17 \cdot 10^{-3}, \beta_{22} = 0.388\ ;\ \delta(0.5) = 1.3$$

Полученные оба условия имеют смысл, т. к. $\delta > 1$. Отличие граничных условий от жесткой заделки заметно, т. к. прогибы пластинки на 30% увеличиваются.

Здесь заданные λ_p обеспечиваются поочередным ослаблением или усилением закрепления краев

$$|\alpha_{22}^{(1)}| > |\alpha_{22}^{(2)}|, \qquad \beta_{22}^{(1)} < \beta_{22}^{(2)}$$

В случае $r_0 = 0.1$, $\lambda_1 = 4.61$, $\lambda_2 = 7.89$, получается

$$\alpha_{22} = 0.405 \cdot 10^{-2}, \beta_{22} = -\ 5.09 \cdot 10^{-2}\ ;\ \delta(0.5) = 0.23\ ;$$

$$\alpha_{22} = -\ 0.221, \beta_{22} = -\ 2.13 \cdot 10^{-4}\ ;\ \delta(0.5) = 1.6\ ;$$

и только вторые значения α_{22}, β_{22} имеют смысл.

Пусть теперь край $r = r_0$ жестко заделан, а на краю $r = 1$ имеются условия

$$w = \alpha_{11} \frac{d^3 w}{d r^3}, \qquad \frac{d w}{d r} = \alpha_{22} \frac{d^2 w}{d r^2} \tag{3.5}$$

где α_{11}, α_{22} подлежат определению по заданным двум значениям.

В этом случае для определения искомых α_{11}, α_{22} получается система

$$c_{11}\alpha_{11} + c_{12}\alpha_{22} = c_{13}\alpha_{11}\alpha_{22} + d_1$$

$$c_{21}\alpha_{11} + c_{22}\alpha_{22} = c_{23}\alpha_{11}\alpha_{22} + d_2 \tag{3.6}$$

где

$$c_{i1} = \lambda_i^3 s_{31}^{(i)}; \qquad c_{i2} = \lambda_i s_{02}^{(i)};$$

$$c_{i3} = \lambda_i^4 s_{32}^{(i)}; \qquad d_i = s_{01}^{(i)};$$

$$s_{kq}^{(i)} = \begin{vmatrix} J_0^{(k)}(\lambda_i) & Y_0^{(k)}(\lambda_i) & I_0^{(k)}(\lambda_i) & K_0^{(k)}(\lambda_i) \\ J_0^{(q)}(\lambda_i) & Y_0^{(q)}(\lambda_i) & I_0^{(q)}(\lambda_i) & K_0^{(q)}(\lambda_i) \\ J_0(r_0\lambda_i) & Y_0(r_0\lambda_i) & I_0(r_0\lambda_i) & K_0(r_0\lambda_i) \\ J_0^{(1)}(r_0\lambda_i) & Y_0^{(1)}(r_0\lambda_i) & I_0^{(1)}(r_0\lambda_i) & K_0^{(1)}(r_0\lambda_i) \end{vmatrix}$$

$$(i = 1, 2)$$

В конкретном случае, когда $r_0 = 0.1$, $\lambda_1 = 5.08$, $\lambda_2 = 8.45$ получается

$$\alpha_{11} = 5.50 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{22} = -2.58 \cdot 10^{-2}, \qquad \delta(0.5) = 1.15;$$

или

$$\alpha_{11} = -1.04 \cdot 10^{-2}, \quad \alpha_{22} = -8.60 \cdot 10^{-2}, \qquad \delta(0.5) = 0.44;$$

Очевидно,что вторые значения α_{11}, α_{22} лишены смысла, т.к. $\delta(0.5) < 1$. Однако и здесь возможна пара λ_1, λ_2, которая может реализоваться при двух различных вариантах граничных условий. Так, например, при $r_0 = 0.1$, $\lambda_1 = 4.86$, $\lambda_2 = 8.21$ получается

$$\alpha_{11} = 2.44 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{22} = -9.28 \cdot 10^{-2}, \qquad \delta(0.5) = 1.33;$$

или

$$\alpha_{11} = 8.92 \cdot 10^{-3}, \quad \alpha_{22} = -4.26 \cdot 10^{-2}; \qquad \delta(0.5) = 1.87;$$

Здесь заданные λ_p обеспечиваются поочередным ослаблением или усилением граничных условий

$$|\alpha_{22}^{(1)}| > |\alpha_{22}^{(2)}|, \qquad \alpha_{11}^{(1)} < \alpha_{11}^{(2)}$$

В случае сплошной пластинки ($r_0 = 0$), при $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$, $\lambda_4 = 12$ из (2.10) получается

$$\alpha_{11} = 7.69 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{22} = -9.18 \cdot 10^{-2},$$

$$\alpha_{12} = -6.60 \cdot 10^{-3},$$

$$\alpha_{21} = 7.93 \cdot 10^{-4}, \qquad \delta(0) = 1.3$$

Полученные здесь граничные условия реальны, т.к. $\delta(0) > 1$. Закрепление края существенно ослаблено. Прогибы увеличиваются на 30%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С., Янг Д., Уивер У. Колебания в инжереном деле. -М.:Машиностроение, 1985, 472 с.*
2. *Бидерман В. Прикладная теория механических колебаний. -М.: Высшая школа, 1972, 414 с.*

Институт механики АН Армении
Ереванский государственный университет
Поступила в редакцию 16.05.1991.