ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 44, № 4, 1991 Механика

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТУРБУЛЕНТНОЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ НАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

САРУХАНЯН А.А.

Սարուխանյան Ա.Ա. Ոչ ստացիոնար տուրբուլենտ շարժումը հարթ գլանական խողովակում

Ելնելով տուրբուլենտ լարումների վերաբերյալ Բուսինեսկի հիպոթեզից ստացված է ոչ ստացիոնար շարժման հավասարումը հարթ գլանական խողովակում։

Исходя из гипотезы Буссинеска о турбулентной напряженности, получено уравнение нестационарного турбулентного движения в плоской цилиндрической трубе.

Saruchanjan A.A. Nonstationary turbulent plane flow

В стационарном турбулентном потоке, по простейшей гипотезе Буссинеска, турбулентное напряжение τ между двумя плоскими параллельными стенками определяется зависимостью

$$\tau = -\rho\varepsilon\frac{d\bar{u}}{dy} \tag{1}$$

где ε - кинематический коэффициент турбулентной вязкости, зависящий от координат; $\bar{u}$ - усредненная по времени скорость; y - расстояние от неподвижной плоской стенки.

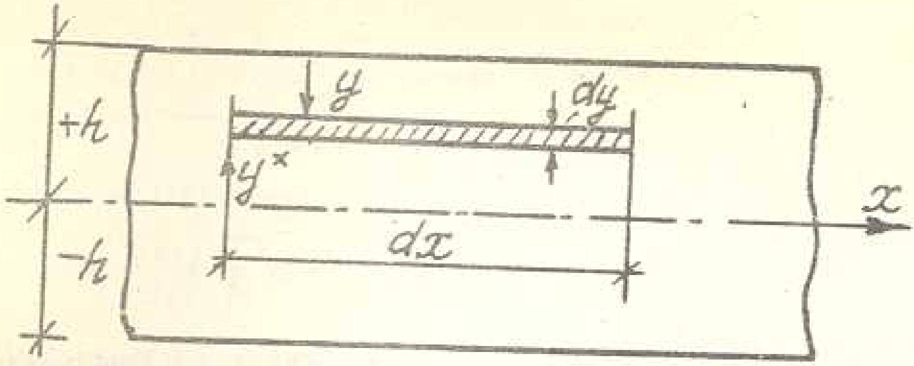
Зависимость $\varepsilon = ny$ дает достаточно точное соответствие теоретических и экспериментальных данных в плоскопараллельном потоке. Линейная зависимость кинематического коэффицента турбулентной вязкости от координаты y приводит к логарифмическому закону распределения усредненных скоростей по живому сечению потока.

Для нестационарного турбулентного потока отсутствуют сведения о нестационарном турбулентном напряжении. Поэтому для составления математической модели нестационарного турбулентного потока, в порядке первого приближения, воспользуемся зависимостями, полученными для стационарных турбулентных потоков. В частности, будем предполагать, что кинематический коэффициент турбулентной вязкости имеет линейную зависимость от координат, то есть

$$\varepsilon = ny \tag{2}$$

Рассмотрим нестационарное турбулентное движение между двумя параллельными неподвижными плоскими стенками, расположенными на расстоянии $2h$. Начало координат поместим в середине между стенками (фиг.1). Для несжимаемой жидкости, при пренебрежении массовых сил, система уравнений движения будет

$$\rho\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\tau}{\partial y}$$



Фиг.1

$$\frac{\partial p}{\partial y^*} = 0 , \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

Из последних двух уравнений следует, что давление не зависит от переменных y^* и z.Это возможно только в том случае, если перепад давления по течению будет функцией только от времени, то есть

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = f(t) \tag{4}$$

Таким образом, задача исследования плоскопараллельного напорного турбулентного движения несжимаемой жидкости сводится к решению дифференциального уравнения в виде [1,4,5]:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = f(t) + n\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + y\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right) \tag{5}$$

Для решения уравнений (5) задаются начальные и граничные условия:

$$\bar{u}(y,t) = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 , \quad t > 0 , \tag{6}$$

$$\bar{u}(y,t) = \Phi(y) \quad \text{при} \quad t = 0 , \quad (0 < y < 2h) \tag{7}$$

где Ф (y) – некоторая заданная функция, определяемая начальным распределением скоростей по живому сечению потока.

Решение уравнения (5) ищем в виде суммы [2,4]:

$$\bar{u}(y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t)\, J_0\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right) \tag{8}$$

где $J_0\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right)$ функция Бесселя первого рода нулевого порядка; λ_k-собственные числа задачи; $C_k(t)$ некоторая функция,зависящая от времени t.

Собственные числа определяем из условия, что в центре канала имеем максимум, то есть $\left.\frac{\partial \bar{u}(y,t)}{\partial y}\right|_{y=h} = 0$, тогда из (8) получим, что

$$J_1(\lambda_k) = 0 \tag{9}$$

Уравнение (5) с учетом (8) примет вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{dC_k(t)}{dt} J_0\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right)$$

$$= f(t) - \sum_{k=1}^{\infty} n C_k(t) \frac{\lambda_k^2}{4h} J_0\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right) \tag{10}$$

Сложность задачи заключается в том, что функция $f(t)$ не разлагается в ряды Фурье-Бесселя по собственным функциям задачи, т.к. собственные числа являются корнями уравнения (9) и коэффициенты разложения не определяются в окончательном виде. Поэтому функцию $f(t)$ представляем в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_2\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right) \tag{11}$$

где $J_2\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right)$ -бесселева функция первого рода, второго порядка; a_k – коэффициенты разложения.

Для определения неизвестных коэффициентов a_k обе части равенства (11) умножим на $J_2\left(\lambda_m \sqrt{\frac{y}{h}}\right) dy$ и проинтегрируем от 0 до h, получим

$$\int_0^h f(t) J_2\left(\lambda_m \sqrt{\frac{y}{h}}\right) dy$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^h J_2\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right) J_2\left(\lambda_m \sqrt{\frac{y}{h}}\right) dy \tag{12}$$

При произвольном λ_m и λ_k значения интеграла будут:

$$\int_0^h J_2\left(\lambda_m \sqrt{\frac{y}{h}}\right) J_2\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right) dy = 0 \quad \text{при } k \neq m, \tag{13}$$

$$\int_0^h J_2^2\left(\lambda_k \sqrt{\frac{y}{h}}\right) dy = h J_0^2(\lambda\ k) \qquad \text{при } k = m \tag{14}$$

Подставляя значение (13) и (14) в уравнение (12) для определения коэффициентов a_k получим формулу

$$a_k = \frac{f(t)\int\limits_0^h J_0\left(\lambda_k\sqrt{\frac{y}{h}}\right)dy}{hJ_0^2(\lambda_k)} \tag{15}$$

Формулу (15) можно переписать в виде

$$a_k = \frac{f(t)}{J_0^2(\lambda_k)}\int\limits_0^h \sqrt{\frac{y}{h}}\,J_2\left(\lambda_k\sqrt{\frac{y}{h}}\right)d\sqrt{\frac{y}{h}} \tag{16}$$

Последний интеграл легко интегрируется и представляется в виде суммы. Уравнение (10) с учетом (11) примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{dC_k(t)}{dt}J_0\left(\lambda_k\sqrt{\frac{y}{h}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}a_k(t)J_2\left(\lambda_k\sqrt{\frac{y}{h}}\right) \tag{17}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}n\,C_k(t)\,\frac{\lambda_k^2}{4h}J_0\left(\lambda_k\sqrt{\frac{y}{h}}\right)$$

Для интегрирования уравнения (17) используем асимптотическое разложение функций Бесселя [4].

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{18}$$

Имея в виду (18), для определения коэффициентов $C_k(t)$ получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dC_k(t)}{dt} = a_k - n\,\frac{\lambda_k^2}{4h}C_k(t) \tag{19}$$

Решение соответствующего однородного уравнения будет

$$C_k(t) = C_k\exp\left(-\frac{n\lambda_k^2}{4h}t\right) \tag{20}$$

Общее решение неоднородного уравнения (19) имеет вид (2)

$$C_k(t) = \left[C_k + \frac{2A_0}{J_0^2(\lambda_k)}\left[F(t) - F(0)\right]\right]\exp\left(-\frac{n\lambda_k^2}{4h}t\right) \tag{21}$$

где

$$F(t) = \int f(t)\exp\left(\frac{n\lambda_k^2}{4h}t\right)dt$$

$$A_0 = \int\limits_0^h \sqrt{\frac{y}{h}}\,J_2\left(\lambda_k\sqrt{\frac{y}{h}}\right)d\sqrt{\frac{y}{h}}$$

Таким образом, общее решение задачи с учетом (21) и (8) будет

$$\bar{u}(y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[C_k+\frac{2A_0}{J_0^2(\lambda_k)}\left[F(t)-F(0)\right]\right]$$

$$\times\exp\left(-\frac{n\lambda_k^2}{4h}t\right)J_0\left(\lambda_k\sqrt{\frac{y}{h}}\right) \tag{22}$$

Для определения неизвестных коэффициентов c_k воспользуемся начальным условием (7)

$$\Phi(y)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k J_0\left(\lambda_k\sqrt{\frac{y}{h}}\right)$$

Из выражения (23) следует, что коэффициенты C_k являются коэффициентами разложения функции $\Phi(y)$ по собственным функциям. Обе части равенства (23) умножим на $J_0\left(\lambda_m\sqrt{\frac{y}{h}}\right)dy$ и проинтегрируем от 0 до h. Имея в виду, что

$$\int_0^h J_0\left(\lambda_m\sqrt{\frac{y}{h}}\right)J_0\left(\lambda_k\sqrt{\frac{y}{h}}\right)dy=\begin{cases}0, & при\ k\neq m\\ hJ_0^2(\lambda_k), & при\ k=m\end{cases} \tag{24}$$

получим

$$C_k=\frac{1}{hJ_0^2(\lambda_k)}\int_0^h\Phi(y)J_0\left(\lambda_k\sqrt{\frac{y}{h}}\right)dy$$

Исходя из общего решения задачи (22), легко можно получить решение любых практических задач. По краевым условиям азадчи определятся коэффициенты C_k, a_k и закон распределения скоростей по живому сечению потока, что дает возможность вычислить коэффициент количества движения и потерь напора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений.: - М.: Гостехиздат, 1951. 420 с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976. 576 с.
3. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Гостехиздат, 1955. 519 с.
4. Кузьмин Р.О. Бесселевы функции. - М.-Л.: ОНТИ, 1935. 244 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. 711 с.

Ереванский политехнический институт

Поступила в редакцию 3.04.1990