ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 44, № 4, 1991 Механика

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН

СТЕПАНЯН С.П., АФЯН Б.А.

Ստեփանյան Ս.Պ., Աֆյան Բ.Ա., Ճաքերի համակարգով թուլացած կիսահարթության համար առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը

Դիտարկվում է վերջավոր և երեք կիսաանվերջ ճաքերով թուլացած կիսահարթության համար լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի խնդիրը: Վերջավոր և երկու կիսաանվերջ ճաքերը, որոնք սիմետրիկ են երրորդի նկատմամբ, գտնվում են կիսահարթության եզրին զուգահեռ մեկ ուղղի վրա: Ուղղահայաց կիսաանվերջ ճաքի գագաթը գտնվում է հորիզոնական ճաքերի դասավորության գծից որոշ հեռավորության վրա:

Рассмотрена задача о напряженно-деформированном состоянии полуплоскости, ослабленной конечной и тремя полубесконечными трещинами. Конечная и две горизонтальные полубесконечные трещины, которые расположены симметрично относительно третьей, находятся на одной линии, параллельной границе полуплоскости. Вершина вертикальной полубесконечной трещины находится на некотором расстоянии от линии расположения горизонтальных трещин

Stepanian S.P., Apian B.A. The plane problem of elasticity for a weakened by crack system half-plane

Рассматривается задача о напряжено-деформированом состоянии полуплоскости, ослабленной конечной и тремя полубесконечными трещинами. Отметим, что конечная и две горизонтальные полубесконечные трещины, которые расположены симметрично относительно третьей, находятся на одной линии, параллельной границе полуплоскости. Вершина вертикальной полубесконечной трещины находится на расстоянии H от границы полуплоскости, а остальные трещины удалены на расстоянии h $(h < H)$.

Полуплоскость находится под действием самоуравновешенных нагрузок, приложенных на берегах трещин, те есть

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{yy}(x,0) = p_0(x), \qquad \tau_{xy}(x,0) = q_0(x) \\
&\quad (|x| < a, \quad |x| > b, \quad a < b) \\
&\sigma_{xx}(0,y) = \sigma_0(y), \quad \tau_{xy}(0,y) = 0 \qquad\qquad (1) \\
&\quad (y > c) \\
&u(x,-h) = v(x,-h) = 0, \qquad (-\infty < x < \infty)
\end{aligned}
$$

Задача решается методом разделения основной области на подобласти прямыми, содержащими трещины. Используя симметрию, решение строится для одной полуполосы и одной четверть-плоскости.

Полагая, что на промежутках $a < x < b$ и $0 < y < c$ известны напряжения

$$\sigma_{yy}(x,0) = p(x), \quad \tau_{xy}(x,0) = q(x), \quad (a < x < b)$$

$$\sigma_{xx}(0,y) = \sigma(y), \quad (0 < y < b) \tag{2}$$

с использованием известных соотношений, полученных в работе [1], производные перемещений можно представить в виде

$$E\frac{\partial u(x,0^+)}{\partial x} = (1-\nu)\,p(x) + \frac{2}{\pi}\int_a^b \frac{q(t)\,dt}{x-t} - \frac{2}{\pi}\int_a^b \frac{q(t)\,dt}{x+t}$$

$$+\int_a^b R_1(t,x)\,p(t)\,dt + \int_a^b R_2(t,x)\,q(t)\,dt$$

$$-\int_0^c R_7(t,x)\,\sigma(t)\,dt + f_1^+(x)$$

$$E\frac{\partial u(x,0^-)}{\partial x} = (1-\nu)\,p(x) + \frac{2}{\pi}\int_a^b \frac{q(t)\,dt}{x+t} - \frac{2}{\pi}\int_a^b \frac{q(t)\,dt}{x-t}$$

$$+\int_a^b K_1(t,x)\,p(t)\,dt + \int_a^b K_2(t,x)\,p(t)\,dt + f_1^-(x)$$

$$E\frac{\partial v(x,0^+)}{\partial x} = (\nu-1)\,q(x) + \frac{2}{\pi}\int_a^b \frac{p(t)\,dt}{x-t} - \frac{2}{\pi}\int_a^b \frac{p(t)\,dt}{x+t}$$

$$+\int_a^b R_3(t,x)\,p(t)\,dt - \int_a^b R_4(t,x)\,q(t)\,dt$$

$$-\int_0^c R_6(t,x)\,\sigma(t)\,dt + f_2^+(x)$$

$$E\frac{\partial v(x,0^-)}{\partial x} = (\nu-1)\,q(x) - \frac{2}{\pi}\int_a^b \frac{p(t)\,dt}{x+t} - \frac{2}{\pi}\int_a^b \frac{p(t)\,dt}{x-t}$$

$$-\int_a^b K_3(t,x)\,p(t)\,dt - \int_a^b K_4(t,x)\,q(t)\,dt + f_2^-(x)$$

$$E\,\frac{\partial u(0^+,y)}{\partial y} = \frac{2}{\pi}\int_0^c \frac{\sigma(t)\,dt}{y-t} - \frac{2}{\pi}\int_0^c \frac{\sigma(t)\,dt}{y+t}$$

$$-\int_a^b R_6(t,y)\,p(t)\,dt + \int_a^b R_5(t,y)\,q(t)\,dt$$

$$+\int_0^c R_3(t,y)\,\sigma(t)\,dt + f_3^+(y) \qquad (3)$$

где E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона, а функции $f_i^+(x)$, $f_i^-(x)$, $(i=1,2)$ и $f_3^+(y)$ имеют вид

$$f_1^+(x) = (1-\nu)\,p_0(x) + \frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{q_0(t)\,dt}{x-t} + \frac{2}{\pi}\int_b^\infty \frac{q_0(t)\,dt}{x-t}$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{q_0(t)\,dt}{x+t} - \frac{2}{\pi}\int_b^\infty \frac{q_0(t)\,dt}{x+t} + \int_0^a R_1(t,x)\,p_0(t)\,dt$$

$$+\int_b^\infty R_1(t,x)\,p_0(t)\,dt + \int_0^a R_2(t,x)\,q_0(t)\,dt$$

$$+\int_b^\infty R_2(t,x)\,q_0(t)\,dt - \int_c^\infty R_7(t,x)\,\sigma_0(t)\,dt$$

$$f_1^-(x) = (1-\nu)\,p_0(x) + \frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{q_0(t)\,dt}{x+t} + \frac{2}{\pi}\int_b^\infty \frac{q_0(t)\,dt}{x+t}$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{q_0(t)\,dt}{x-t} - \frac{2}{\pi}\int_b^\infty \frac{q_0(t)\,dt}{x-t} + \int_0^a K_1(t,x)\,p_0(t)\,dt$$

$$+\int_b^\infty K_1(t,x)\,p_0(t)\,dt + \int_0^a K_2(t,x)\,q_0(t)\,dt$$

$$+\int_b^\infty K_2(t,x)\,q_0(t)\,dt$$

$$f_2^+(x) = (\nu-1)\,q_0(x) + \frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{p_0(t)\,dt}{x-t} + \frac{2}{\pi}\int_b^\infty \frac{p_0(t)\,dt}{x-t}$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{p_0(t)\,dt}{x+t}-\frac{2}{\pi}\int_b^\infty \frac{p_0(t)\,dt}{x+t}+\int_b^\infty R_3(t,x)\,p_0(t)\,dt$$

$$+\int_0^a R_3(t,x)\,p_0(t)\,dt-\int_0^a R_4(t,x)\,q_0(t)\,dt$$

$$-\int_b^\infty R_4(t,x)\,q_0(t)\,dt-\int_c^\infty R_6(t,x)\,\sigma_0(t)\,dt$$

$$f_3^+(y)=\frac{2}{\pi}\int_c^\infty \frac{\sigma_0(t)\,dt}{y-t}-\frac{2}{\pi}\int_c^\infty \frac{\sigma_0(t)\,dt}{y+t}$$

$$-\int_0^a R_6(t,y)\,p_0(t)\,dt-\int_b^\infty R_6(t,y)\,p_0(t)\,dt$$

$$+\int_0^a R_5(t,y)\,q_0(t)\,dt+\int_b^\infty R_5(t,y)\,q_0(t)\,dt$$

$$+\int_c^\infty R_3(t,y)\,\sigma_0(t)\,dt \tag{4}$$

Отметим, что знаки (+) или (-) в функциях f_i относятся соответственно к квадранту и полуполосе, которые получены в результате разбиения данной области. Виды функций $K_i(t,x)$ и $R_j(t,x)$ ($i=1,4$) ($j=1,7$), входящих в (3), приведены в работе [1].

Удовлетворив условиям контакта

$$u(x,0^+)=u(x,0^-)$$

$$v(x,0^+)=v(x,0^-) \qquad (a<x<b) \tag{5}$$

и условию симметрии

$$u(0,y)=0 \qquad (0<y<c) \tag{6}$$

из (3) получим систему сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функции $p(x)$, $q(x)$ и $\sigma(y)$

$$\frac{4}{\pi}\int_a^b \frac{p(t)\,dt}{x-t}+\int_a^b M_{11}(t,x)\,p(t)\,dt+\int_a^b M_{12}(t,x)\,q(t)\,dt$$

$$- \int_0^c R_6(t,x)\,\sigma(t)\,dt = F_1(x)\,, \qquad x \in (a,b)$$

$$\frac{4}{\pi}\int_a^b \frac{q(t)\,dt}{x-t} - \frac{4}{\pi}\int_a^b \frac{q(t)\,dt}{x+t} + \int_a^b M_{21}(t,x)\,p(t)\,dt$$

$$+ \int_a^b M_{22}(t,x)\,q(t)\,dt - \int_0^c R_7(t,x)\,\sigma(t)\,dt = F_2(x)$$

$$x \in (a,b)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^c \frac{\sigma(t)\,dt}{x-t} - \frac{2}{\pi}\int_0^c \frac{\sigma(t)\,dt}{x+t} - \int_a^b R_6(t,x)\,p(t)\,dt$$

$$+ \int_a^b R_5(t,x)\,q(t)\,dt + \int_0^c R_3(t,x)\,\sigma(t)\,dt = F_3(x)$$

$$x \in (0,c) \tag{7}$$

где функции $M_{ij}(t,x)$ $(i,j=1,2)$ и $F_l(x)$ $(l=1,2,3)$ приведены в работе [1].

Интегральные условия равновесия, которым должны удовлетворять решения системы (7), имеют вид

$$\int_a^b p(t)\,dt = -\int_0^a p_0(x)\,dx - \int_b^\infty p_0(x)\,dx$$

$$\int_a^b q(t)\,dt + \int_0^c \sigma(y)\,dy = -\int_0^a q_0(x)\,dx - \int_b^\infty q_0(x)\,dx$$

$$- \int_c^\infty \sigma_0(y)\,dy \tag{8}$$

Путем замены переменных

$$x = \frac{b-a}{2}z + \frac{a+b}{2}\,, \quad t = \frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2} \quad \text{при } (a < x,\ t < b)$$

и

$$y = \frac{c}{2}(z+1)\,, \quad t = \frac{c}{2}(y+1) \qquad \text{при} \qquad (0 < t,\ y < c)$$

систему (7) сведем к виду

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\Phi_1(y)\,dy}{z-y}+\int\limits_{-1}^{1}N_{11}(y,z)\,\Phi_1(y)\,dy$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}N_{12}(y,z)\,\Phi_2(y)\,dy+\int\limits_{-1}^{1}N_{13}(y,z)\,\Phi_3(y)\,dy=\varphi_1(z)$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\Phi_2(y)\,dy}{z-y}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\Phi_2(y)\,dy}{z+y+2\,\dfrac{a+b}{b-a}}$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}N_{21}(y,z)\,\Phi_1(y)\,dy+\int\limits_{-1}^{1}N_{22}(y,z)\,\Phi_2(y)\,dy$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}N_{23}(y,z)\,\Phi_3(y)\,dy=\varphi_2(z)$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\Phi_3(y)\,dy}{z-y}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\Phi_3(y)\,dy}{z+y+2}$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}N_{31}(y,z)\,\Phi_1(y)\,dy+\int\limits_{-1}^{1}N_{32}(y,z)\,\Phi_2(y)\,dy$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}N_{33}(y,z)\,\Phi_3(y)\,dy=\varphi_3(z) \tag{9}$$

В (9) введены следующие обозначения:

$$\Phi_1(y)=p\left(\frac{b-a}{2}y+\frac{a+b}{2}\right),\quad \Phi_2(y)=q\left(\frac{b-a}{2}y+\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\Phi_3(y)=\sigma\left[\frac{c}{2}(y+1)\right]$$

а остальные функции определяются аналогичным образом.

Решение системы (9) в классе

$$G=\left|\begin{array}{l}\Phi_i(y)\;,\;\Phi_i(y)=\dfrac{\Phi_i(y)}{\sqrt{1-y^2}}\;,\quad i=1,2\\[2ex] \Phi_3(y)\;,\;\Phi_3(y)=\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)^{\frac{1}{2}}\Phi_3(y)\end{array}\right. \tag{10}$$

где $\Phi_i(y)$ $(i=1,2,3)$ регулярные функции, существует и единственно [2,3].

Используя известные квадратурные формулы [4] с учетом (8) и (10), система сингулярных интегральных уравнений (9) приводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \Big[\Big[\frac{1}{z_k - y_i} + \pi N_{11}(y_i, z_k) \Big] \Phi_1(y_i)$$

$$+ \pi N_{12}(y_i, z_k) \Phi_2(y_i) \Big] + \sum_{i=1}^{n} \frac{2(1+\bar{y}_i)}{2n+1} N_{13}(\bar{y}_i, z_k) \Phi_3(\bar{y}_i)$$

$$= \varphi_1(z_k) \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \Big\{ \Big[\frac{1}{z_k - y_i} - \frac{1}{z_k + y_i + 2\left(\frac{a+b}{b-a}\right)} + \pi N_{22}(y_i, z_k) \Big] \Phi_2(y_i)$$

$$+ \pi N_{21}(y_i, z_k) \Phi_1(y_i) \Big] + \sum_{i=1}^{n} \frac{2(1+\bar{y}_i)}{2n+1} N_{23}(\bar{y}_i, z_k) \Phi_3(\bar{y}_i)$$

$$= \varphi_2(z_k) \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2(1+\bar{y}_i)}{2n+1} \Big[\frac{1}{\bar{z}_k - \bar{y}_i} - \frac{1}{\bar{z}_k + \bar{y}_i + 2} + N_{33}(\bar{y}_i, \bar{z}_k) \Big] \Phi_3(\bar{y}_i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \Big[\pi N_{31}(y_i, \bar{z}_k) \Phi_1 + \pi N_{32}(y_i, \bar{z}_k) \Phi_2 \Big]$$

$$= \varphi_3(\bar{z}_k) \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{n} \Phi_1(y_i) = c_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{n} \Phi_2(y_i) + \frac{2(1+\bar{y}_i)}{2n+1} \Phi_3(\bar{y}_i) = c_2 \tag{11}$$

где c_1 и c_2 определяются по формулам

$$c_1 = -\int_0^a p_0(x)\,dx - \int_b^\infty p_0(x)\,dx$$

$$c_2 = -\int_0^a q_0(x)\,dx - \int_b^\infty q_0(x)\,dx - \int_c^\infty \sigma_0(y)\,dy \tag{12}$$

Воспользовавшись решениями системы (10), коэффициенты интенсивности напряжений определим по следующим формулам:

$$K_1(a) = \frac{\Phi_1(-1)}{\sqrt{2}}, \qquad K_2(a) = \frac{\Phi_2(-1)}{\sqrt{2}}$$

$$K_1(b) = \frac{\Phi_1(1)}{\sqrt{2}}, \qquad K_2(b) = \frac{\Phi_2(1)}{\sqrt{2}}$$

$$K_1(c) = \sqrt{2}\ \Phi_3(1) \tag{13}$$

Таблица 1

$h/a = 1$, $c/a = 1.5$

b/a / K/p_0	1.1	1.5	2	3
$K_1(a)/p_0$	3.752	0.538	0.201	0.054
$K_2(a)/p_0$	-0.015	-0.026	-0.019	-0.032
$K_1(b)/p_0$	4.998	1.341	0.808	0.451
$K_2(b)/p_0$	0.013	0.011	0.006	0.012
$K_1(c)/p_0$	-0.038	-0.036	-0.031	-0.023

В табл. 1 приведены численные значения коэффициентов интенсивности напряжений при различных значениях геометрических параметров, когда нормальная нагрузка действует на единицу длины полубесконечных горизонтальных трещин.

Таблица 2

$c/a = 1$

K/p_0	b/a / h/a	1.1	1.5	2	5
$K_1(a)/p_0$	0.5	6.180	1.56	0.861	0.349
$K_2(a)/p_0$		-0.152	-0.139	-0.122	-0.075
$K_1(b)/p_0$		15.02	1.031	0.194	0.046
$K_2(b)/p_0$		0.729	0.269	0.133	0.009
$K_1(a)/p_0$	1	6.232	1.616	0.865	0.361
$K_2(a)/p_0$		-0.094	-0.091	-0.086	-0.055
$K_1(b)/p_0$		13.93	0.967	0.197	0.027
$K_2(b)/p_0$		0.364	0.176	0.106	0.021
$K_1(a)/p_0$	5	6.384	1.67	0.881	0.369
$K_2(a)/p_0$		-0.079	-0.057	-0.042	-0.048
$K_1(b)/p_0$		13.75	0.904	0.188	0.012
$K_2(b)/p_0$		0.271	0.111	0.058	0.010

В случае, когда нормальная нагрузка задана на берегах трещины конечной длины, значения коэффициентов интенсивности напряжений приведены в табл.2.

Как видно из таблиц 1,2, при фиксированном значении $(H-h)$ увеличение расстояния между горизонтальными трещинами приводит к уменьшению значений коэффициентов интенсивности нормальных напряжений, а по мере удаления границы полуплоскости от трещин их значения возрастают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афян Б.А.,Степанян С.П. Об одной задаче упругой полуплоскости, ослабленной трещинами. -Изв.АН Арм ССР. Механика,1989, т.42, N 2, с.50-57.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. -М.: Физматгиз, 1963. 640с.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. -М.: Физматгиз, 1962. 511 с.
4. Erdogan F.E.,Gupta G.D.,Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations.- In: Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973, pp.368-425.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию 1.11.1990