ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 44, № 4, 1991 Механика

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ТЕЛ

ЗАДОЯН М.А.

Զադոյան Մ.Ա., Պրիզմատիկ մարմինների էքսպոնենցիալ դեֆորմացումը

Առաջարկվում է պլաստիկության հոսունության տեսության ընդհանուր հավասարումների լուծման մի դաս, որտեղ դեֆորմացիաների արագությունների տենզորը փոփոխվում է մի ուղղությամբ էքսպոնենցիալ օրենքով։Մասնավորապես ուսումնասիրվում է պրիզմատիկ ձողի համատեղ ծռումը, ոլորումը և ձգումը, որտեղ ընդհանրացվում են Հիլլի հայտնի լուծումը, և Բրեդտի թեորեմը՝ բազմակապ տիրույթների համար։Դիտարկվում է նաև բարակապատ խողովակի խնդիրը։

Предлагается класс решений общих уравнений теории пластического течения, когда тензор скоростей деформации меняется по одному направлению по экспоненциальному закону. В частности, рассматривается совместный изгиб кручения и растяжения призматического стержня, где обобщается известное решение Хилла и теорема Бредта для многосвязных областей. Обсуждается также случай тонкостенных труб.

Zadoyan M.A. Exponential Deformation of Prismatic Solid

Рассматривается класс пространственных задач идеально жестко - пластических тел, деформируемых в одном из направлений по экспоненциальному закону. Исследования по пространственным задачам теории пластичности немногочисленны [1-3]. Обзоры этих работ можно найти в [4,5].

1. *Исходные уравнения и представление решения.* Принимаем материал несжимаемым и удовлетворящим соотношениям теории идеально жестко - пластического течения с условием пластичности Губера-Мизеса. В прямоугольной системе координат в обычных обозначениях имеем: дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \qquad (1.1)$$

соотношения между компонентами скоростей деформаций, скоростей перемещений и напряжений

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda(\sigma_x - \sigma) \ , \ \ldots \ , \ 2\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \lambda \tau_{xy} \ , \ \ldots \tag{1.2}$$

условие пластичности Губера - Мизеса

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2$$

$$+ 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 6 \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем компоненты напряжений отнесены к пластической постоянной k.

1. Будем исследовать пластические течения среды, когда компоненты скоростей деформаций представляются в форме

$$\varepsilon_{ij} = \exp(\mu z)\,\omega_{ij} \tag{1.4}$$

где $\omega_{ij} = \omega_{ij}(x, y)$ - произвольные функции x и y, а μ - постоянный параметр. Из условия несжимаемости материала имеем

$$\omega_x + \omega_y + \omega_z = 0 \tag{1.5}$$

Компоненты напряжений, удовлетворяющие условиям пластичности и несжимаемости, можно представить следующим образом:

$$\sigma_x = \sigma_z + \frac{1}{\Omega}(2\omega_x + \omega_y) \ , \ \sigma_y = \sigma_z + \frac{1}{\Omega}(\omega_x + 2\omega_y)$$

$$\tau_{ij} = \frac{1}{\Omega}\omega_{ij} \ , \ \Omega = \sqrt{\omega_{xy}^2 + \omega_{xz}^2 + \omega_{yz}^2}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_x\omega_y + \omega_y^2 + \omega_{xy}^2} \tag{1.6}$$

Подставляя эти выражения компонентов напряжений в уравнения равновесия (1.1), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega_{xz}}{\Omega}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\omega_{yz}}{\Omega}\right) + 2E = 0 \tag{1.7}$$

и выжению

$$\sigma_z = F + 2Ez$$

где E - произвольная постоянная, а $F = F(x, y)$ - неизвестная функция x и y, удовлеторяющая системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{2\omega_x + \omega_y}{\Omega} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\omega_{xy}}{\Omega} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\omega_{xy}}{\Omega} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\omega_x + 2\omega_y}{\Omega} = 0 \tag{1.8}$$

Скорости перемещений из (1.2) можно представить в следующем виде:

$$u = u_0(x, y) - \frac{\partial w_0}{\partial x}z + \frac{2}{\mu}(e^{\mu z} - 1)\,\omega_{xz} - \frac{1}{\mu^2}(e^{\mu z} - \mu z - 1)\frac{\partial \omega_z}{\partial x}$$

$$v = v_0(x,y) - \frac{\partial w_0}{\partial y} z + \frac{2}{\mu}(e^{\mu z} - 1)\omega_{yz} - \frac{1}{\mu^2}(e^{\mu z} - \mu z - 1)\frac{\partial \omega_z}{\partial y}$$

$$w = w_0(x,y) + \frac{1}{\mu}(e^{\mu z} - 1)\,\omega_z \tag{1.9}$$

Здесь u_0, v_0, w_0 — произвольные функции x и y. Подставляя выражения u, v, w из (1.9) в (1.4), сопоставляя правые и левые части полученных уравнений и вводя обозначения

$$R = \mu w_0 - \omega_z\,, \quad Q_x = u_0 - \frac{2}{\mu}\omega_{xz} + \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial \omega_z}{\partial x}$$

$$Q_y = v_0 - \frac{2}{\mu}\omega_{yz} + \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial \omega_z}{\partial y}$$

приходим к двум системам дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} = 0$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$\omega_x = \frac{\partial u_0}{\partial x}\,, \quad \omega_y = \frac{\partial v_0}{\partial y}\,, \quad \omega_z = \lambda w_0 + Ax + By + C$$

$$2\omega_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\,, \qquad 2\omega_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \lambda u_0 + Dy \tag{1.10}$$

$$2\omega_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \lambda v_0 - Dx\,, \qquad A, B, C, D = const$$

Далее, исключая $F(x,y)$ из (1.8), приходим к выражению

$$F = H + \left[\frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\right]_{x=0} - \int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right]\right]_{x=0} dy$$

$$- \frac{1}{\Omega}\left(2\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right] dx, \; H = const \tag{1.11}$$

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \mu u_0 + Dy\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \mu v_0 - Dx\right)^2} \tag{1.12}$$

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial v_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2}$$

и к дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)-2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}-\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)=0 \tag{1.13}$$

С учетом (1.10) уравнение (1.7) перепишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\mu u_0+D y\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\mu v_0-D x\right)\right]+4E=0 \tag{1.14}$$

Далее из (1.5) и (1.10) будем иметь

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\lambda w_0+A x+B y+C=0 \tag{1.15}$$

Система дифференциальных уравнений (1.13)-(1.15) при заданных граничных условиях, в принципе, определяет функции u_0, v_0, w_0. Компоненты выражения определяются через эти функции следующим образом:

$$\sigma_x=\sigma_z+\frac{1}{\Omega}\left(2\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_y=\sigma_z+\frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+2\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_z=H+2Ez+\left[\frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}-\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\right]_{x=0}$$

$$-\frac{1}{2}\int_o^y\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}-\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right]\right]_{x=0}dy-\frac{1}{\Omega}\left(2\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int_o^x\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right]dx \tag{1.16}$$

$$\tau_{xy}=\frac{1}{2\Omega}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{xz}=\frac{1}{2\Omega}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\mu u_0+D y\right)$$

$$\tau_{yz}=\frac{1}{2\Omega}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\mu v_0-D x\right)$$

Скорости перемещения (1.9) при учете (1.10) можно представить в следующей форме:

$$u=u_0\exp(\mu z)+\frac{D}{\mu}y(\exp(\mu z)-1)-\frac{A}{\mu^2}(\exp(\mu z)-\mu z-1)$$

$$v = v_0 \exp(\mu z) - \frac{D}{\mu} x (\exp(\mu z) - 1) - \frac{B}{\mu^2} (\exp(\mu z) - \mu z - 1) \qquad (1.17)$$

$$w = w_0 \exp(\mu z) + \frac{1}{\mu} (\exp(\mu z) - 1)(Ax + By + C)$$

Таким образом, компоненты напряжений и скоростей перемещений выражаются через функции u_0, v_0, w_0, которые определяются из системы дифференциальных уравнений (1.13)-(1.15) при соответствующих граничных условиях.

Используя (1.15), можно из уравнений (1.13)-(1.14) и из отношений (1.16)-(1.17) при условии $\mu \neq 0$ исключить функцию w_0.

2. *Второе представление решений.* Если ввести функцию напряжений

$$\frac{1}{2\Omega} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \mu u_0 + Dy \right) = \frac{\partial f}{\partial y} - Ex \qquad (2.1)$$

$$\frac{1}{2\Omega} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \mu v_0 - Dx \right) = -\frac{\partial f}{\partial x} - Ey$$

из (1.12) будем иметь

$$\Omega = \frac{\omega}{\chi}, \quad \chi = \sqrt{1 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + Ey \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y} - Ex \right)^2}$$

Далее, исключая из (2.1) функцию w_0, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\omega}{\chi} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + Ey \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\omega}{\chi} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - Ex \right) \right]$$

$$= D + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \qquad (2.2)$$

Уравнение (1.15) и компоненты скоростей (1.17) остаются без изменения, а (1.13) перепишется в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\chi}{\omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)$$

$$- 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\chi}{\omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) = 0 \qquad (2.3)$$

Компоненты напряжения запишутся в форме

$$\sigma_x = \sigma_z + \frac{\chi}{\omega} \left(2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_y = \sigma_z + \frac{\chi}{\omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + 2 \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_z = H + 2Ez + \left[\frac{\chi}{\omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right]_{x=0}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{o}^{y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\chi}{\omega}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}-\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right]\right]_{x=0}dy-\frac{\chi}{\omega}\left(2\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{o}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\kappa}{\omega}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right]dx \tag{2.4}$$

$$\tau_{xy}=\frac{1}{2\omega},\quad \tau_{xz}=\frac{\partial f}{\partial y}-Ex,\quad \tau_{yz}=-\frac{\partial f}{\partial x}-Ey$$

Для определения функций f, u_0, v_0, w_0, входящих в (1.17) и (2.4), следует проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (1.15),(2.1)-(2.3) при соответствующих граничных условиях.

3. Случай $\mu=0$. В полученных формулах напряжений (1.16), переходя к пределу при $\mu\to 0$, будем иметь

$$\sigma_x=\sigma_z+\frac{1}{\Omega_*}\left(2\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right),\quad \sigma_y=\sigma_z+\frac{1}{\Omega_*}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+2\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_z=H+2Ez+\left[\frac{1}{\Omega_*}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}-\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\right]_{x=0}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{o}^{y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\Omega_*}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}-\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right]\right]_{x=0}dy-\frac{1}{\Omega_*}\left(2\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{o}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\Omega_*}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right]dx$$

$$\tau_{xy}=\frac{1}{2\Omega_*}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right),\quad \tau_{xz}=\frac{1}{2\Omega_*}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+Dy\right)$$

$$\tau_{yz}=\frac{1}{2\Omega_*}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}-Dx\right) \tag{3.1}$$

$$\Omega_*=\sqrt{\omega^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+Dy\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}-Dx\right)^2}$$

Скорости перемещений из (1.17) при $\mu\to 0$ запишутся в виде

$$u=u_0(x,y)+Dyz-\frac{A}{2}z^2$$

$$v=v_0(x,y)-Dxz-\frac{B}{2}z^2$$

$$w=w_0(x,y)+(Ax+By+C)z \tag{3.2}$$

Система дифференциальных уравнений (1.13)-(1.15) при $\mu\to 0$ примет следующую форму:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{1}{\Omega_*}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)-2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,\frac{1}{\Omega_*}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}-\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\Omega_*}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+Dy\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\Omega_*}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}-Dx\right)\right]+4E=0$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+Ax+By+C=0 \qquad (3.3)$$

Если ввести функцию перемещения $\varphi(x,y)$ в виде

$$u_0=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{1}{2}Ax^2-\frac{1}{2}Cx \qquad (3.4)$$

$$v_0=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{1}{2}By^2-\frac{1}{2}Cy$$

третье уравнение (3.3) превратится в тождество, а первое и второе перепишутся следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{1}{\Omega_0}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)$$

$$+2\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}-Ax+By\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\Omega_0}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+Dy\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\Omega_0}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}-Dx\right)\right]+4E=0 \qquad (3.5)$$

причем

$$\Omega_0=\sqrt{\omega_0^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+Dy\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}-Dx\right)^2}$$

$$\omega_0=\Big[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}-Ax-\frac{1}{2}C\right)^2$$

$$-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}-Ax-\frac{1}{2}C\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+By-\frac{1}{2}C\right)$$

$$+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+By+\frac{1}{2}C\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

Для компонентов напряжений будем иметь

$$\sigma_x=\sigma_z+\frac{1}{\Omega_0}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}-2Ax-By-\frac{3}{2}C\right)$$

$$\sigma_y=\sigma_z-\frac{1}{\Omega_0}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+Ax+2By+\frac{3}{2}C\right)$$

$$\sigma_z=H+2Ez+\left[\frac{1}{\Omega_0}\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+By\right)\right]_{x=0}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\Omega_0}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\right]\right]_{x=0} dy$$

$$-\frac{1}{\Omega_0}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}-2Ax-By-\frac{3}{2}C\right)$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\Omega_0}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\right] dx$$

$$\tau_{xy}=\frac{1}{2\Omega_0}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)$$

$$\tau_{xz}=\frac{1}{2\Omega_0}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+Dy\right)$$

$$\tau_{yz}=\frac{1}{2\Omega_0}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}-Dx\right) \qquad (3.6)$$

Подставляя (3.4) в (3.2), для компонентов скоростей перемещений будем иметь

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{1}{2}A(x^2+z^2)+Dyz-\frac{1}{2}Cx$$

$$v=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{1}{2}B(y^2+z^2)-Dxz-\frac{1}{2}Cy \qquad (3.7)$$

$$w=w_0(x,y)+Axz+Byz+Cz$$

Для определения функций w_0 и φ, входящих в выражения компонентов напряжений (3.6) и скоростей перемещений (3.7) необходимо интегрировать систему уравнений (3.5) при заданных граничных условиях.

3. В случае введения функции напряжения $f(x,y)$ по (2.1) при $\mu=0$

$$\frac{1}{2\Omega}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+Dy\right)=\frac{\partial f}{\partial y}-Ex$$

$$\frac{1}{2\Omega}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}-Dx\right)=-\frac{\partial f}{\partial x}-Ey$$

компоненты напряжений из (3.6) будут

$$\sigma_x=\sigma_z+\frac{\chi}{\omega_0}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}-2Ax-By-\frac{3}{2}C\right)$$

$$\sigma_y=\sigma_z-\frac{\chi}{\omega_0}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+Ax+2By+\frac{3}{2}C\right)$$

$$\sigma_z=H+2Ez+\left[\frac{\chi}{\omega_0}\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+By\right)\right]_{x=0}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\chi}{\omega_0}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\right]\right]_{x=0} dy$$

$$-\frac{\chi}{\omega_0}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}-2Ax-By-\frac{3}{2}C\right)$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\chi}{\omega_0}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\right] dx \qquad (3.8)$$

$$\tau_{xy}=\frac{\chi}{2\omega_0}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)$$

$$\tau_{xz}=\frac{\partial f}{\partial y}-Ex$$

$$\tau_{yz}=-\frac{\partial f}{\partial x}-Ey$$

Скорости перемещений (3.7) остаются без изменения, а система уравнений, определяющая функции φ и f запишется в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\chi}{\omega_0}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)$$

$$+2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}-Ax+By\right)\frac{\chi}{\omega_0}=0 \qquad (3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\omega_0}{\chi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+Ey\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\omega_0}{\chi}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-Ex\right)\right]-2D=0$$

4. Пусть призматический стержень под действием внешних сил на торцевых сечениях находится в равновесии в предельном напряженном состоянии (задача Р.Хилла).

Полагая

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\ , \qquad 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=Ax-By$$

интегрированием находим

$$\varphi=\frac{1}{12}Ay^3-\frac{1}{12}Bx^3+\frac{1}{4}Ax^2y-\frac{1}{4}Bxy^2-\frac{h}{2}(x^2+y^2) \qquad (3.10)$$

Далее, принимая $H=E=0$ из (3.8) для компонентов напряжений получаем

$$\sigma_z=\kappa\sqrt{3}\sqrt{1-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

$$\kappa=\mathrm{sign}(Ax+By+C)$$

$$\tau_{xz}=\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \tau_{yz}=-\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=0 \qquad (3.11)$$

Первое уравнение (3.9) удовлетворяется тождественно, а второе перепишется в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(Ax+By+C)f_x}{\sqrt{1-f_x^2-f_y^2}}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(Ax+By+C)f_y}{\sqrt{1-f_x^2-f_y^2}}\right]-\frac{2\kappa D}{\sqrt{3}}=0 \qquad (3.12)$$

где f_x и f_y означают частные производные $f(x,y)$.

Подставляя (3.10) в (3.7), для скоростей перемещений получаем

$$u=\frac{A}{4}(y^2-x^2-2z^2)-\frac{B}{2}xy+Dyz-\frac{1}{2}Cx-hy$$

$$v=-\frac{A}{2}xy+\frac{B}{2}(x^2-y^2-2z^2)-Dxz-\frac{1}{2}Cy+hx \qquad (3.13)$$

$$w=w_0(x,y)+Axz+Byz+Cz$$

Внешние нагрузки, приложенные на торцевых сечениях, статически эквивалентны продольной силе

$$N=\kappa\sqrt{3}\iint\sqrt{1-f_x^2-f_y^2}\,dx\,dy$$

крутящему моменту

$$M_z=\iint(x\tau_{yz}-y\tau_{xz})\,dx\,dy=-2\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

и изгибающему моменту с компонентами

$$M_x=\kappa\sqrt{3}\iint y\sqrt{1-f_x^2-f_y^2}\,dx\,dy$$

$$M_y=-\kappa\sqrt{3}\iint x\sqrt{1-f_x^2-f_y^2}\,dx\,dy$$

Уравнение (3.12) и формулы (3.11),(3.13) получены Р.Хиллом [1] в 1948г.

4. Боковое сжатие квадратного бруса. Рассмотрим брус из идеально жесткого материала с квадратным поперечным сечением, сжимающийся между четырьмя плитами с одинаковой шероховатостью и скоростью сближения. Такую гипотетическую задачу практически можно реализовать, пропуская, для сближения плит, необходимые для зазора в узлах $\pm h$, $\pm h$, z. Учитывая симметрию задачи, рассматриваем область

$$\tau_{xz}|_{x=h}=\tau_{yz}|_{y=h}=m, \quad \tau_{xz}|_{x=0}=\tau_{yz}|_{y=0}=0$$

$$u|_{x=h}=v|_{y=h}=-V, \quad u|_{x=0}=v|_{y=0}=0 \qquad (4.1)$$

. где V и m, соответственно, скорость сближения и степень шероховатости плит, причем $V > 0$, $0 \le m \le \sqrt{2}/2$.

Полуобратным способом принимаем

$$\tau_{xz} = ax, \qquad \tau_{yz} = ay \tag{4.2}$$

$$u = u_0 = -bx, \qquad v = v_0 = -by, \qquad b = \frac{V}{h}$$

Полагая также $A = B = D = 0$, первому уравнению (3.3) удовлетворяем тождественно, а из второго и третьего уравнений, соответственно, находим $E = -a$, $C = 2b$.

Сопоставляя выражения τ_{xz} и τ_{yz} из (3.1) при $D = 0$ и (4.2), получаем

$$\Omega_* = \frac{\sqrt{3}\ b}{\sqrt{1 - a^2(x^2 + y^2)}} \tag{4.3}$$

Остальные компоненты напряжения согласно (3.1) и (4.2)-(4.3) будут

$$\sigma_x = \sigma_y = H + 2Ez, \qquad \tau_{xy} = 0 \tag{4.4}$$

$$\sigma_z = H + 2Ez + \sqrt{3}\sqrt{1 - a^2(x^2 + y^2)}$$

Из условий равновесия части бруса $0 \le \xi \le z$

$$\int_0^h\int_0^h \sigma_z\, dx\, dy + 2mhz = 0$$

определяя H и подставляя в (4.4), получаем

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\sqrt{3}}{4m^2}K - 2az, \qquad \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_z = -\frac{\sqrt{3}}{4m^2}K - 2az + \sqrt{3}\sqrt{1 - a^2(x^2 + y^2)}$$

где

$$K = 4\int_0^m\int_0^m \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = 2\int_0^m (1 - x^2) \arcsin\frac{m}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

$$+ m(1 - m^2)\arcsin\frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} + m^2\sqrt{1 - 2m^2}$$

Сила давления на каждую плиту будет

$$P = -4\int_0^h\int_0^h \sigma_x dx\, dy = hl\left(\frac{\sqrt{3}}{m^2}K + 4m\frac{l}{h}\right)$$

Для определения функций w_0 приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\sqrt{3}\, a b x}{\sqrt{1 - a^2(x^2+y^2)}} , \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} = \frac{\sqrt{3}\, a b y}{\sqrt{1 - a^2(x^2+y^2)}}$$

После интегрирования из (3.2) при A = B = 0 получаем

$$w = L + 2bz - 2\sqrt{3}\,\frac{V}{m}\sqrt{1 - a^2(x^2+y^2)} \tag{4.5}$$

где L - произвольная постоянная. Из условий сохранения количества масс

$$\int_0^h\int_0^h w\, dx\, dy + 2Vh\,(l - z) = 0$$

определяя L и подставляя в (4.5), окончательно находим

$$\frac{w}{V} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{K}{m^3} - 2\left(\frac{l}{h} - \frac{z}{h}\right) - 2\frac{\sqrt{3}}{m}\sqrt{1 - a^2(x^2+y^2)} \tag{4.6}$$

Полученное решение имеет традиционный недостаток, характерный для решений типа решения Прандтля. Оно неточно в середине и на концах.

2. Переходя к цилиндрическим координатам, из приведенного решения можно получить решение задачи о вдавливании идеально жестко пластического материала из шероховатой цилиндрической втулки [1]. Обозначая внутренний радиус трубы h, а скорость уменьшения этого радиуса V и переходя к цилиндрическим координатам, из (4.2), (4.4), (4.5) будем иметь

$$\sigma_r = \sigma_\theta = H - 2az , \quad \tau_{rz} = ar$$

$$\sigma_z = H - 2az + \sqrt{3}\sqrt{1 - a^2 r^2} \tag{4.7}$$

$$u = -V\frac{r}{h} , \quad w = L + 2bz - 2\sqrt{3}\,\frac{V}{m}\sqrt{1 - a^2 r^2}$$

Из условий равновесия части цилиндрической массы

$$\int_0^h \sigma_z r\, dr + mhz = 0$$

определяя H, для напряжений окончательно будем иметь

$$\sigma_r = \sigma_\theta - \frac{2}{\sqrt{3}\, m^2}\left[1 - (1 - m^2)^{\frac{3}{2}}\right] - 2az \tag{4.8}$$

$$\sigma_z = -\frac{2}{\sqrt{3}\, m^2}\left[1 - (1 - m^2)^{\frac{3}{2}}\right] - 2az + \sqrt{3}\sqrt{1 - a^2 r^2}$$

Определяя L из условия сохранения количества масс

$$\int_0^h w r d r + V h (l - z) = 0 \tag{4.9}$$

окончательно получаем

$$\frac{w}{V} = \frac{4}{\sqrt{3} m^3} \left[1 - (1 - m^2)^{\frac{3}{2}} \right] - 2 \left(\frac{l}{h} - \frac{z}{h} \right) - \frac{2\sqrt{3}}{m} \sqrt{1 - a^2 r^2}$$

Формулы напряжений и скоростей перемещений (4.7)-(4.9) получены Р.Хиллом [1]

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности.-М.: ГИТТЛ, 1956. 407 с.
2. Соколовский В.В. Теория пластичности.-М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
3. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности.-М.:Наука, 1966. 231 с.
4. Аннин Б.Д.,Черепанов Г.П. Упруго-пластическая задача.-Новосибирск: Наука, 1983. 238 с.
5. Аннин Б.Д.,Бытов В.О.,Сенашов С.И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности.-Новосибирск: Наука, 1985. 144 с.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию 3.12.1990