

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ ТОКОНЕСУЩЕЙ НИТИ  
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

КАЗАРЯН К. Б.

Выведены натуральные уравнения равновесного состояния нити, определены функции кривизны и кручения нити. Показано, что нить принимает форму различных винтовых линий. Определены условия, при которых возможны бифуркации равновесных состояний нити.

В работах [1, 2] исследована задача равновесия упругой нити с током во внешнем магнитном поле. На основе методов теории бифуркации определены нетривиальные равновесные состояния и условия, при которых имеют место бифуркации равновесных состояний. В настоящей работе предложен иной подход к решению аналогичной задачи, связанной с определением натуральных уравнений пространственной кривой, соответствующей равновесным состояниям нити. Определены функции кривизны и кручения нити и показано, что нить под действием пондеромоторной силы взаимодействия тока с внешним магнитным полем может принять конечное число различных равновесных состояний в виде винтовых линий. Винтовые линии обвиваются вокруг цилиндра, образующие которого параллельны направлению вектора внешнего магнитного поля.

В работе [3] исследованы линейные колебания токонесущей нити в магнитном поле протекающего по ней тока. В [4] изучены нелинейные хаотические колебания токонесущей нити, растянутой механической силой и находящейся в продольном магнитном поле, параллельном току.

§1. Рассмотрим упругую гибкую нить длины  $L$ . По нити протекает электрический ток силы  $J_0$ . Нить находится во внешнем магнитном поле с постоянным вектором индукции  $\vec{B}_0$ . Нить закреплена в двух неподвижных точках, расстояние между которыми есть  $M_0$ . Эффекты самовоздействия токонесущей нити [3], обусловленные взаимодействием тока с собственным магнитным полем, не принимаются во внимание. Единственной силой, действующей на нить, является пондеромоторная сила Ампера (сила на единицу длины)

$$\vec{F}_0 = J_0 \times \vec{B}_0 \quad (1.1)$$

Мы будем исходить из следующих векторных уравнений статки нити [5]:

$$\frac{d\vec{Q}}{ds} + \vec{F}_0 = 0; \quad \vec{Q} \times \vec{\tau} = 0; \quad (\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}) = 1 \quad (1.2)$$

В (1.2)  $\vec{Q}$  — вектор упругих внутренних натяжений (силы),  $s$  — координата длины дуги вдоль нити,  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  — единичный вектор касательной к нити,  $\vec{r}$  — радиус-вектор точек нити. Так как вектор электрического тока всегда направлен по касательной к нити, то

$$\vec{J}_0 = J_0 \vec{\tau}$$

Из второго уравнения системы (1.1) имеем

$$\vec{Q} = Q_0 \vec{\tau} \quad (1.3)$$

Таким образом, нам следует решить векторное уравнение

$$\frac{d(Q_0 \vec{\tau})}{ds} + J_0 (\vec{\tau} \times \vec{B}_0) = 0 \quad (1.4)$$

со следующими граничными условиями закрепления нити:

$$\vec{r}(0) = 0; \quad \vec{r}(L) = \vec{M}_0 \quad (1.5)$$

Умножая уравнение (1.4) скалярно на вектор  $\vec{\tau}$ , получим

$$\vec{\tau} \cdot \frac{d(Q_0 \vec{\tau})}{ds} \equiv \vec{\tau} \cdot \frac{dQ_0}{ds} + \frac{Q_0 d\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}}{2 ds} = 0$$

откуда, в силу  $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$ , получим, что  $Q_0 = \text{const}$ . Умножая уравнение (1.4) скалярно на  $\vec{B}_0$ , получим

$$\left( \vec{B}_0 \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right) \equiv \frac{d}{ds} (\vec{B}_0 \cdot \vec{\tau}) = 0; \quad \vec{B}_0 \cdot \vec{\tau} = \text{const} \quad (1.6)$$

Далее, умножая уравнение (1.4) векторно на  $\vec{B}_0$ , получим

$$\frac{d(\vec{\tau} \times \vec{B}_0)}{ds} + \frac{J_0}{Q_0} [(\vec{\tau} \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_0 - B_0^2 \vec{\tau}] = 0 \quad (1.7)$$

Из (1.7) и (1.4) получим следующее уравнение относительно вектора  $\vec{\tau} \times \vec{B}_0$ :

$$\frac{d^2(\vec{\tau} \times \vec{B}_0)}{ds^2} + \lambda^2 (\vec{\tau} \times \vec{B}_0) = 0; \quad \left( \lambda^2 = \frac{J_0^2 B_0^2}{Q_0^2} \right) \quad (1.8)$$

Решением (1.8) является следующая функция:

$$\vec{\tau} \times \vec{B}_0 = \vec{A}_1 \sin^2 s + \vec{A}_2 \cos^2 s \quad (1.9)$$

В (1.9)  $\vec{A}_1, \vec{A}_2$  есть произвольные постоянные вектора, перпендикулярные вектору  $\vec{B}_0$ ,  $\vec{B}_0 \cdot \vec{A}_1 = \vec{B}_0 \cdot \vec{A}_2 = 0$ . Принимая во внимание (1.4) и (1.9), получим следующее решение для вектора  $\vec{\tau}$ :

$$\vec{\tau} = \rho \vec{B}_0 + \vec{A} B_0 \sin^2 s + (\vec{A} \times \vec{B}_0) \cos^2 s$$

где  $\rho$  есть произвольный скаляр,  $\vec{A}$  есть произвольный вектор, перпендикулярный к  $\vec{B}_0$ ,  $(\vec{B}_0 \vec{A}) = 0$

С учетом граничных условий (1.5) получим следующее искомое решение для радиус-вектора:

$$\begin{aligned} \vec{r} = & \frac{(\vec{M}_0 \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_0}{B_0^2 L} s + \frac{\vec{F}}{2 \sin \frac{\lambda L}{2}} \left[ \sin \frac{\lambda L}{2} + \right. \\ & \left. + \sin \left( s - \frac{L}{2} \right) \right] + \frac{\vec{F} \times \vec{B}_0}{2 B_0 \sin \frac{\lambda L}{2}} \left[ \cos^2 \left( s - \frac{L}{2} \right) - \cos \frac{\lambda L}{2} \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$\vec{F} = \vec{M}_0 - \frac{(\vec{M}_0 \cdot \vec{B}_0)}{B_0^2} \vec{B}_0$$

Отметим, что  $(\vec{F} \cdot \vec{B}_0) = 0$ , и, следовательно, функция  $\vec{r}(s)$  выражается посредством тройки взаимно-перпендикулярных векторов.

Для функции  $\vec{\tau}(s)$  имеем

$$\begin{aligned} \vec{\tau} = & \frac{(\vec{M}_0 \cdot \vec{B}_0)}{B_0^2 L} + \frac{\vec{F}_t}{2 \sin \frac{\lambda L}{2}} \cos^2 \left( s - \frac{L}{2} \right) - \\ & - \frac{(\vec{F} \times \vec{B}_0)_t}{2 B_0 \sin \frac{\lambda L}{2}} \sin^2 \left( s - \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из условия  $\vec{\tau}^2 = 1$  получим следующее уравнение, определяющее параметр  $\lambda$  (натяжение  $Q_0$ ):

$$\frac{(\vec{M}_0 \vec{B}_0)^2}{L^2 B_0^2} + \frac{\lambda^2 (\vec{M}_0 \times \vec{B}_0)^2}{4 B_0^2} \csc^2 \left( \frac{\lambda L}{2} \right) = 1 \quad (1.12)$$

§2. На основе формул Френе для пространственной кривой для функций кривизны  $K(s)$  и кручения  $\gamma(s)$  нити имеем:

$$K(s) = \left| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right| = \frac{(\vec{M}_0 \times \vec{B}_0)_t^2}{2 B_0 \sin \frac{\lambda L}{2}} \quad (2.1)$$

$$\chi(s) \equiv \frac{\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \left( \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \times \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial s^2} \right)}{\left( \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right)^2} = \frac{(\vec{M}_0 \cdot \vec{B}_0)L}{B_0 L}$$

Как видно из (2.1), функции кривизны и кручения не зависят от  $s$ , то есть они являются постоянными вдоль длины нити.

Исходя из постоянства этих функций, мы приходим к выводу, что нить в общем случае представляет собой в пространстве винтовую линию, вид которой определяется посредством параметра  $\lambda$ .

Рассмотрим отдельно конкретные частные случаи. Обозначим через  $\Theta$  угол между векторами  $\vec{B}_0$  и  $\vec{M}_0$ .

Запишем условие (1.12) в виде

$$\frac{\chi^2}{\sin^2\gamma} \sin^2\Theta = \frac{L^2}{M_0^2} - \cos^2\Theta; \quad \left( \chi = \frac{\lambda L}{2} \right) \quad (2.2)$$

При  $\Theta \rightarrow 0$  (что соответствует случаю параллельности вектора магнитного поля линии, соединяющей точки закрепления) правая часть уравнения (2.2) стремится к  $L^2/M_0^2 - 1$ , и, следовательно,  $\chi \rightarrow \pi m$  ( $m=1; 2; 3, \dots$ ) так, что

$$\lim_{\chi \rightarrow \pi m, \Theta \rightarrow 0} \left( \frac{\chi^2}{\sin^2\gamma} \sin^2\Theta \right) = \frac{L^2}{M_0^2} - 1 \quad (2.3)$$

Из (2.3) для функций  $K, \chi$  имеем

$$K = \frac{2M_0\pi m}{L^2} \sqrt{\frac{L^2}{M_0^2} - 1}; \quad \chi = \frac{2M_0\pi m}{L^2}$$

Для функции  $\vec{r}(s)$  в этом частном случае имеем следующее решение:

$$\vec{r}(s) = \frac{M_0 s}{L} \hat{k} + \sqrt{1 - \frac{M_0^2}{L^2}} \frac{L}{2\pi m} \{ \hat{i} \sin(\lambda s - \pi m) + \hat{j} [\cos(\lambda s - \pi m) + (-1)^{m+1}] \} \quad (2.4)$$

где  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  есть взаимно-перпендикулярные единичные векторы, причем вектор  $\hat{k}$  направлен вдоль магнитного поля  $\vec{B}_0$ .

Таким образом, в продольном магнитном поле нить принимает форму винтовой линии, обвитой вдоль цилиндра, образующие которого параллельны направлению магнитного поля. Причем имеется бесконечное дискретное множество бифуркационных состояний нити с натяжением  $Q_0 = I_0 B_0 L / 2\pi m$ . Этот же результат получен в [1] на основе другого подхода. При  $M_0 = L$  мы имеем тривиальное решение  $\vec{r} = M_0 s (L B_0)^{-1} \vec{B}_0$  при всех значениях параметра  $\lambda$ .

В случае, когда магнитное поле перпендикулярно вектору

$\vec{M}_0(\vec{B}_0 \cdot \vec{M}_0) = 0$ , функция кручения нити становится равной нулю, и, следовательно, нить является плоской кривой, а именно, дугой окружности с радиусом

$$R = L^2 \sin \eta / 2M_0 \gamma^2 \quad (2.5)$$

В (2.5)  $\eta$  определяется из уравнения

$$\frac{\sin^2 \eta}{\eta^2} = \frac{M_0^2}{L^2} \quad (2.6)$$

Так как для дуги окружности с заданными длиной дуги  $L$  и длиной хорды  $M_0$  радиус определяется однозначным образом, то из корней уравнения (2.6) имеет смысл только первый наименьший корень  $\eta_0 < \pi$ .

В остальных случаях, когда  $(\vec{B}_0 \cdot \vec{M}_0) \neq 0$ ;  $(\vec{B}_0 \times \vec{M}_0) \neq 0$ , нить также представляет собой винтовую линию, намотанную на цилиндр с образующими, параллельными вектору  $\vec{B}_0$ .

Кривизна и кручение нити определяются по формулам

$$K = \frac{2M_0 \sin \Theta}{L^2} \frac{\eta^2}{\sin \eta}; \quad \gamma = \frac{2M_0 \eta \cos \Theta}{L^2}$$

где  $\eta$  удовлетворяет уравнению (2.2).

Уравнение (2.2) имеет единственный корень, если

$$\frac{M_0^2 \sin^2 \Theta}{L^2 - M_0^2 \cos^2 \Theta} > \cos^2 \eta_1 = 0,046$$

где  $\eta_1$  есть наименьший положительный корень уравнения  $\operatorname{tg} \eta = \eta$ , ( $\eta_1 = 4,494$ ).

В остальных случаях, когда

$$\cos^2 \eta_{n-1} > \frac{M_0^2 \sin^2 \Theta}{L^2 - M_0^2 \cos^2 \Theta} > \cos^2 \eta_n \quad (n \geq 1)$$

уравнение (2.2) имеет  $2n-1$  корней.

Таким образом, в этих случаях мы имеем дело с многозначными равновесными состояниями нити, то есть при заданных значениях пондеромоторной силы  $\vec{F}_0 = J_0 \vec{B}_0$ , для  $L$  и  $M_0$  нить может принять различные равновесные состояния в виде винтовой линии с натяжениями, для каждого состояния равными

$$Q_0 = \frac{J_0 B_0 L}{2\eta_n}$$

С другой стороны, в равновесных состояниях нити может быть реализована такая ситуация, что при различных значениях пондеромоторной силы  $F_{0n}$ , удовлетворяющих условию

$$F_{0n} \eta_n^{-1} = \alpha_0 = \text{const} \quad (n=1; 2; 3, \dots, 2n-1)$$

для разных реализуемых состояний равновесия в нити натяжение будет одинаковым и равным  $Q_0 = \alpha_0 L$ .

Отметим, что вопрос устойчивости бифуркационных состояний должен быть рассмотрен на основе анализа динамики нити, что требует отдельного изучения.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть угол между векторами  $\vec{B}_0$  и  $\vec{M}_0$  составляет  $\Theta = \pi/6$ . Тогда, при  $L/M_0 = \sqrt{3}$  нить принимает единственное равновесное состояние с натяжением  $Q_0 = J_0 B_0 L / 2\gamma_1$ ;  $\gamma_1 = 2,28$ . При  $L/M_0 = \sqrt{7}$  нить принимает три различных равновесных положения с натяжениями  $Q_0 = J_0 B_0 L / 2\gamma_n$ ;  $\gamma_1 = 2,58$ ,  $\gamma_2 = 4,12$ ;  $\gamma_3 = 4,91$ .

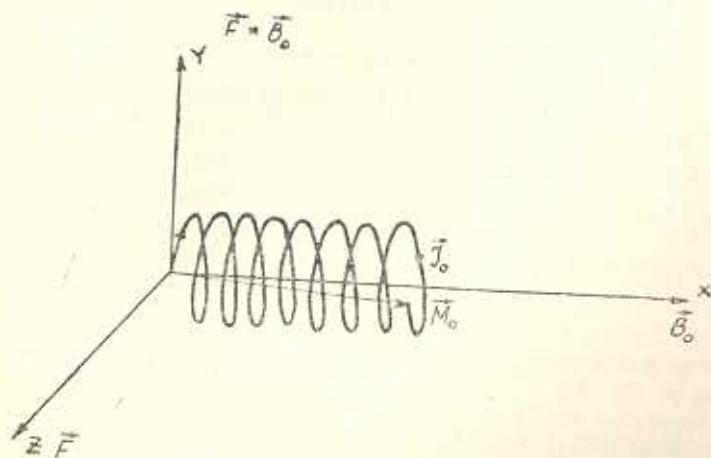
§3. Приведем теперь решение для нити в декартовой системе координат.

Введем в рассмотрение декартовую систему координат с осями  $\hat{i}_x, \hat{i}_y, \hat{i}_z$ , связанными с векторами  $\vec{F}, \vec{F} \times \vec{B}_0, \vec{B}_0$  следующим образом:

$$\hat{i}_x = \frac{\vec{B}_0}{B_0}; \quad \hat{i}_y = \frac{\vec{F} \times \vec{B}_0}{|\vec{F} \times \vec{B}_0|}; \quad \hat{i}_z = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} \quad (3.1)$$

в этой системе вектор  $\vec{M}$  расположен в плоскости  $(x, z)$ . Тогда в этой системе решение запишется в виде

$$\begin{aligned} x &= \frac{M_0 \cos \Theta}{2\pi} \varphi \\ y &= \frac{M_0 \sin \Theta}{2 \sin \gamma} \{ \cos[\gamma \pi^{-1}(\varphi - \pi)] - \cos \gamma \} \\ z &= \frac{M_0 \sin \Theta}{2 \sin \gamma} \{ \sin \gamma + \sin[\gamma \pi^{-1}(\varphi - \pi)] \} \end{aligned} \quad (3.2)$$



Фиг. 1.

где  $\varphi$  есть полярный угол  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  в плоскости  $(y, z)$ .

Исключив из (3.2) угол  $\varphi$ , мы получим решение пространственной кривой (фиг. 1) в виде функции  $w(x) = y(x) + iz(x)$ ;  $i \equiv \sqrt{-1}$ ,  $0 \leq x < M_0 \cos \Theta$ ;

$$w(x) = \frac{M_0 \sin \Theta}{2 \sin \gamma} \left[ \exp i \gamma \left( \frac{2x}{M_0 \cos \Theta} - 1 \right) - \exp(i\gamma) \right]$$

Длина нити определяется из условия

$$\int_0^{M_0 \cos \theta} \sqrt{1 + \left| \frac{dw}{dx} \right|^2} dx = L$$

Следует отметить, что если бы мы первоначально рассматривали данную задачу в произвольной декартовой системе координат, ставя целью определить уравнения нити, как функцию от координаты  $x$ , то мы бы имели дело с системой нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

В заключение укажем, что рассматриваемая задача в некотором смысле аналогична задаче движения заряженной частицы в магнитном поле, уравнения которой имеют вид [6]

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{e}{m_0 c} (\vec{v} \times \vec{B}_0) = 0; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

где  $e$  — заряд,  $m_0$  — масса частицы,  $\vec{v}$  — скорость частицы.

## DETERMINATION OF THE CURRENT-CARRYING THREAD EQUILIBRIUM FORMS IN MAGNETIC FIELD

K. B. KAZARIAN

ՄԱԳՆԻՍՏԱԿԱՆ ԳԱՇՏՈՒՄ ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ԹԵՒԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇԵԹ  
ԶԵՎԵՐԻ ԲՆՈՐՈՇՈՒՄԸ

Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ա ճ փ ո փ ո լ ճ

Սրտածված են թևի հաճախարակչին զիճակի բնական հաճախումները, որոշված են թևի կորույթյան և սյրման ֆունկցիաները: Յույց են տրված, որ թևն բնորոշում է զանազան պտտաակային զժերի ձև: Որոշված են այն պայմանները, երբ հնարավոր են թևի հաճախարակչին զիճակների բիֆուրկացիաները:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Wolfe P. Equilibrium states of an elastic conductor in a magnetic field.—TAMS 278 (1983), p. 377—387.
2. Wolfe P. Bifurcation theory of an elastic conducting wire subject to magnetic Forces. —Technical report, MD88—05—PW, TR88—05, (1988), p. 22.
3. Nowacki J. P., Vibrating string in a magnetic field. —Int. J. of Appl. electromag- netic in materials, 1, (1990), p. 127—133.
4. Kazarian K. B., Galoian V. Ts. Chaotic vibration of a current-carrying string in a magnetic field.—Proc. 28-th Polish solid mechanics conference, (1990), p. 115—117.
5. Саеглицкий В. А. Механика гибких стержней и нитей.—М.: Машиностроение, 1978, 221 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.—М.: Изд. Физико-мат. литер., 1960, 107 с.