

УДК 534.1

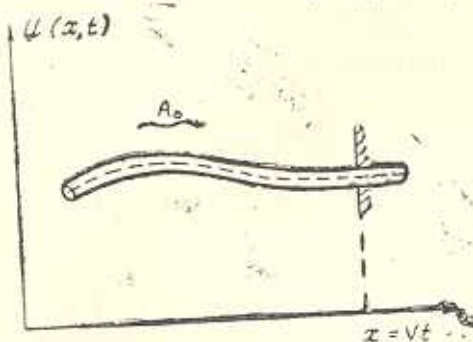
ОДНОКРАТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН С
 ДВИЖУЩИМСЯ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ

ТРУБИН М. В.

Рассмотрена задача об однократном взаимодействии изгибных волн в балке с движущимся закреплением. Вскрыт эффект преобразования энергии волн на движущемся закреплении, посредником которого являются силы волнового давления. Приводится зависимость силы давления волн от скорости движения. На основе точного решения проанализированы качественно различные случаи волнообразования. Найдены первые интегралы задачи—законы сохранения энергии, волнового импульса и числа квантов волновой энергии.

Изучению динамического поведения упругих систем с движущимися закреплениями посвящено большое количество работ [1—3], в которых основное внимание уделяется постановкам краевых задач, определению собственных частот и форм колебаний. Наряду с этим, в работах [4—6] развивались волновые подходы к исследованию указанных систем, которые позволили вскрыть механизм преобразования энергии волн на движущихся закреплениях, показано, что динамическое поведение упругих систем с движущимися закреплениями определяется волновыми эффектами. В связи с этим представляет интерес выявление полного набора волновых эффектов и изучение особенностей их проявления с учетом конкретных моделей упругих систем. В данной работе проводятся исследования волновых эффектов на примере простейшей задачи об однократном взаимодействии упругих волн с движущимся закреплением.

Рассмотрим отражение изгибных волн от абсолютно жесткого закрепления, движущегося с постоянной скоростью v , на примере балки, описываемой моделью Бернулли-Эйлера (фиг. 1).



Фиг. 1.

Пусть слева на движущееся закрепление падает гармоническая волна (фиг. 1), колебания балки ($x \leq vt$) представим в виде суперпозиции волн

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^2 A_n \exp(i(\omega_n t - k_n x)) + A_0 \exp(i(\omega_0 t - k_0 x)) \quad (1)$$

где $u(x, t)$ — поперечное отклонение балки, $A_0, \omega_0, k_0, A_n, \omega_n, k_n$ — соответственно амплитуды, частоты и волновые числа падающей и вторичных волн. Из (1) и уравнения, описывающего колебания балки

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = 0$$

где $\alpha^2 = EJ/\rho F$, EJ — изгибная жесткость, ρF — погонная плотность, для частот и волновых чисел следует дисперсионное уравнение

$$\omega_i^2 - \alpha^2 k_i^4 = 0 \quad (2)$$

После подстановки (1) в условия на движущемся закреплении

$$u|_{x=vt} = u_x|_{x=vt} = 0$$

получим кинематический инвариант

$$\omega_i - k_i v = \omega_0 - k_0 v, \quad i=1, 2 \quad (3)$$

который означает равенство частот всех волн в системе координат, связанной с движущимся закреплением, а также систему линейных алгебраических уравнений, определяющих амплитуды отраженных волн

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^2 A_i = -A_0 \\ \sum_{i=1}^2 k_i A_i = -k_0 A_0 \end{cases}$$

Для выявления физически реализуемых решений потребуем выполнения условия излучения Мандельштама (для вторичных волн)

$$v_{г\phi i} < v, \quad i=1, 2$$

и ограниченности решения на бесконечности

$$u|_{x \rightarrow \pm \infty} < \mu < \infty$$

которые на языке кинематики волн можно записать в виде

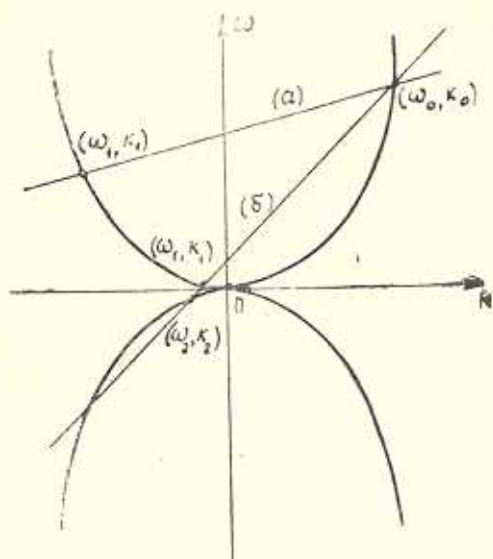
$$\frac{d\omega_i}{dk_i} < v, \quad \text{Im} k_i > 0 \quad (5)$$

Таким образом, задача кинематики (2), (3), (5) об определении частот и волновых чисел вторичных волн отделяется от задачи динамики (4), состоящей в нахождении амплитуд.

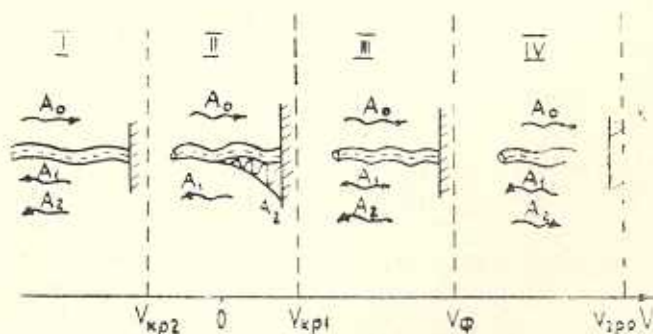
Графически проиллюстрируем решение задачи кинематики на плоскости ω, k , где действительные частоты и волновые числа вторичных волн лежат на пересечении дисперсионной кривой (2) и прямой, изо-

бражающей кинематический инвариант (3) и проходящей через точку ω_0, κ_0 (фиг. 2).

В зависимости от скорости движения возможны качественно различные случаи волнообразования, которые представлены на (фиг. 3), где схематично изображены бегущие гармонические волны и колебания, экспоненциально спадающие по мере удаления от закрепления. Критические скорости, отложенные на оси v (фиг. 3), имеют значения



Фиг. 2.



Фиг. 3.

$v_{кр1} = v_{гр0}(\sqrt{2}-1)$, $v_{кр2} = v_{гр0}(-1-\sqrt{2})$, где $v_{гр0} = 2ak_0$ — групповая скорость падающей волны, $v_\phi = ak_0$ — фазовая скорость падающей волны. При малых скоростях движения $v_{кр2} < v < v_{кр1}$ (фиг. 3 зона II, фиг. 2(a)) так же, как и при $v=0$, возникает одна отраженная волна

$$\omega_1 = \frac{v_{гр0}}{2} \left(1 - \frac{2v}{v_{гр0}}\right)^2; \quad k_1 = \frac{v}{\alpha} - k_0; \quad A_1 = A_0 e^{i\omega_1 t} \left/ \left(1 - \frac{2v}{v_{гр0}}\right)\right.;$$

найдем длины цугов отраженных волн

$$l_1 = \tau(v - v_{rp1}) = l_0; \quad l_2 = \tau(v - v_{rp2}) = l_0 \frac{v - v_{rp2}}{v - v_{rp0}}$$

Зная время взаимодействия и длины цугов вторичных волн, запишем законы сохранения энергии и импульса для докритических скоростей $v_{кр1} < v < v_{кр2}$

$$W_0 + Fv\tau = W_1, \quad P_0 + F\tau = P_1 \quad (8)$$

где $W_i = h_i l_i$ — энергия цуга, $h_i = \frac{1}{2}(\rho F u_i^2 + E J u_{xx}^2)$ — плотность энергии,

$P_i = p_i l_i$ — импульс цуга, $p_i = -\rho F u_i u_i$ — плотность импульса, $F = \frac{1}{2}(\rho F u_i^2 + E J u_{xx}^2 - 2E J u_{xx} u_i)$ — сила давления [6].

Из (8) видно, что энергия отраженной волны не равна энергии падающей, поскольку за время взаимодействия τ закрепление совершает работу $Fv\tau$. При этом имеют место следующие инвариантные соотношения

$$\frac{h_0}{\omega_0} = \frac{h_1}{\omega_1} = I_1 = \text{const}, \quad \frac{p_0}{k_0} = \frac{p_1}{k_1} = I_3 = \text{const}$$

$$\frac{W_0}{\omega_0} = \frac{W_1}{\omega_1} = I_2 = \text{const}, \quad \frac{P_0}{k_0} = \frac{P_1}{k_1} = I_4 = \text{const}$$

Два последних выражают закон сохранения числа квантов волновой энергии [7].

Для закритических скоростей ($v < v_{кр2}$, $v > v_{кр1}$) законы сохранения и соответствующие им инвариантные соотношения принимают вид:

$$W_0 + Fv\tau = W_1 + W_2, \quad P_0 + F\tau = P_1 + P_2$$

$$\frac{W_0}{\omega_0} = \frac{W_1}{\omega_1} + \frac{W_2}{\omega_2} = I_5 = \text{const}, \quad \frac{P_0}{k_0} = \frac{P_1}{k_1} + \frac{P_2}{k_2} = I_6 = \text{const}$$

При взаимодействии волн с закреплением имеет место эффект волнового давления. Для отыскания постоянной составляющей силы волнового давления приравняем изменение энергии, усредненное на периоде $T = 2\pi/(\omega_0 - \kappa_0 v)$, работе силы давления волн и получим для докритических скоростей

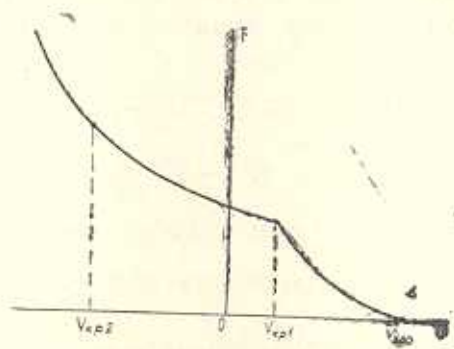
$$F = \frac{1}{2} u_0^2 \omega_0^2 \rho F \left(1 - \frac{2v}{v_{rp0}}\right)^2$$

для закритических

$$F = \frac{1}{2} u_0^2 \omega_0^2 \left(1 - \frac{2v}{v_{rp0}}\right)^2 \left(\frac{2v}{v_{rp0}} + \frac{v^2}{v_{rp0}^2} - \left(1 - \frac{v}{v_{rp0}}\right) \sqrt{\frac{v^2}{v_{rp0}^2} + \frac{2v}{v_{rp0}} - 1}\right)$$

На фиг. 4 приведен график силы давления в зависимости от скорости движения.

Таким образом, использование волнового подхода позволило впервые вскрыть эффект преобразования энергии волны в балке с движущимся закреплением. Посредником этого преобразования выступают силы давления волны. На основе точного решения проанализированы



Фиг. 4.

качественно различные случаи волнообразования. Приводятся зависимость силы волнового давления на закрепление от скорости движения. Найдены первые интегралы задачи в виде законов сохранения волновой энергии, волнового импульса и квантов волновой энергии. Полученные результаты наглядно интерпретируют особенности динамического поведения и могут быть использованы при проектировании систем, содержащих упругие элементы с движущимися закреплениями.

ONE TIMES BENDING WAVES INTERACTION WITH MOOVING CLAMPING

M. V. TRUBIN

ՄՈՄԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՄԻԱՊԱՏԻՒ ՓՈԽԱԶԳԵՅՈՒԹՅՈՒՆԸ ՇԱՐԺՎՈՂ ԱՄՐԱՅՄԱՆ ՀԵՏ

Մ. Վ. ՏՐՈՒԲԻՆ

Ա մ փ ո փ ո մ

Դիտարկված է հեծանում ծաման ալիքների շարժող ամրացման հետ միապատիկ փոխազդեցության մասին խնդիրը: Բացահայտված է շարժվող ամրացման վրա ալիքների էներգիայի փոխակերպման երևույթը, որի միջնորդը ալիքային ճնշման ուժերն են: Ստացված է ալիքների ճնշման ուժի կախումը շարժման արագությունից: Ըշղրիտ լուծման հիման վրա վերլուծված են ալիքազույացման որակապես տարրեր դեպքեր: Ստացված են էներգիայի պահպանման և ալիքային իմպուլսի օրենքները, ինչպես նաև ալիքային էներգիայի քվանտների թվերը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Светлицкий В. А. Механика гибких стержней и нитей.—М.: Машиностроение, 1978, 222 с.
2. Горошко О. А., Савин Г. П. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины.—Киев: Наукова Думка, 1971, 287 с.
3. Мовсисян Л. А. Колебания полубесконечной балки с перемещающимся концом.—Инж. журн. Механика твердого тела, 1966, №1, с. 174—176.
4. Весницкий А. И., Потапов А. И. Волновые явления в одномерных системах с движущимися границами.—Динамика систем, Горьк. ун-т.—Горький, 1978, вып. 13, с. 38—88.
5. Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А. Вывод естественных граничных условий для одномерных задач динамики упругих систем с движущимися закреплениями и нагрузками.—Дифференц. и интегр. уравнения: Сб. научн. работ Горьк. ун-та.—Горький, 1982, с. 75—80.
6. Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А. Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками.—ПММ, 1983, т. 47, вып. 5, с. 862—866.
7. Островский Л. А. Некоторые общие соотношения для волн на движущейся границе раздела двух сред.—ЖЭТФ, 1971, т. 61, № 2(8), с. 551—561.

Филиал Института машиноведения
в Нижнем Новгороде

Посупила в редакцию
18.1.1991

